高等学校经济数学基础教程

全国高等教育科学“十五”规划重点研究课题

概率论与数理统计

张从军　刘亦农
肖丽华　周惠新　编著

博学·经济数学系列

复旦大学出版社

www.fudanpress.com.cn

高等学校经济数学基础教程
全国高等教育科学“十五”规划重点研究课题

概率论与数理统计

张从军　刘亦农
肖丽华　周惠新　编著

博学·经济数学系列

復旦大學出版社
www.fudanpress.com.cn

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/张从军等编著.—上海:复旦大学出版社,2006.12
(复旦博学·经济数学系列)
高等学校经济数学基础教程
ISBN 7-309-05278-1

Ⅰ.概… Ⅱ.张… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 143744 号

概率论与数理统计
张从军 刘亦农 肖丽华 周惠新 编著

出版发行 复旦大学出版社 上海市国权路 579 号 邮编 200433
86-21-65642857(门市零售)
86-21-65118853(团体订购) 86-21-65109143(外埠邮购)
fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com

责任编辑 范仁梅
总 编 辑 高若海
出 品 人 贺圣遂

印 刷 上海申松立信印刷厂
开 本 787×960 1/16
印 张 22.75
字 数 420 千
版 次 2006 年 12 月第一版第一次印刷
印 数 1—8 000

书 号 ISBN 7-309-05278-1/O·384
定 价 34.00 元

"博学而笃志，切问而近思。"

(《论语》)

博晓古今，可立一家之说；
学贯中西，或成经国之才。

内容提要

本书是“高等学校经济数学基础教程”之一，为财经类各专业本科二年级概率论与数理统计课程的教材．书中除了介绍概率论与数理统计的基本内容外，还特别注意到它们的经济应用，并增加介绍了相应的数学软件内容及数学建模的基本方法．

本书主要内容包括随机事件与随机变量、二维随机变量及其联合概率分布、随机变量的数字特征、统计估计方法、统计检验方法、回归分析与方差分析等各章，并配有适量习题，书后附有偶然问题的必然规律等3个附录和7个附表．

本书贯彻问题教学法的基本思想，对许多数学概念，先从提出经济问题入手，再引入数学概念，介绍数学工具，最后解决所提出的问题，从而使学生了解应用背景，提高学习的积极性；书中详细介绍相应的数学软件，为学生将来的研究工作和就业奠定基础；穿插于全书的数学建模的基本思想和方法，引导学生学以致用，学用结合．因此，本书可最大限度地适应财经类各专业学习该课程和后续课程的需要，以及报考研究生的需要和将来从事与财经有关的实际工作的需要．

本书适合作为高等学校财经类各专业概率论与数理统计课程的教材，也可供自学选用和经济工作者及有关教师参考．

前　言

随着社会经济的迅猛发展,随着数学在经济活动和经济研究中的作用日益凸显,随着数学的理论和方法越来越广泛地应用到自然科学、社会科学和工程技术的各个领域,对高等学校财经类各专业培养人才的数学素养要求越来越高.经济数学基础课程在提高财经类专业人才的数学素养方面,起着至关重要的基础性作用.这类课程的思想和方法,是人类文明发展史上理性智慧的结晶,它不仅提供了解决实际问题的有力数学工具,同时还给学生提供一种思维的训练,帮助学生提高作为复合型、创造型、应用型人才所必须具备的文化素质和修养.

怎样使经济数学基础课程充分发挥上述作用?怎样使经济数学基础课程更趋符合培养目标的课程体系?怎样兼顾经济数学基础课程的理论性与应用性、思想性与工具性?怎样突出经济数学基础课程的财经类专业特色?现有的经济数学基础教材固然很多,但要处理好以上问题,仍需认认真真地思考与探索,仍有大量的工作要做.作为我们主持承担的全国高等教育科学"十五"规划重点研究课题的研究内容之一,我们编写了现在的这套经济数学基础课程教材,本书是其中的概率论与数理统计部分.我们在编写思想、体系安排、内容取舍、教学方法等方面按照上述要求作了一些尝试.

我们特别注重了以下几点:

1. 最大限度地适应财经类各专业学习该课程和后续课程的需要,以报考研究生和将来从事与财经有关的实际工作的需要.

2. 贯彻问题教学法的基本思想,对许多数学概念,先从提出经济问题入手,再引入数学概念,介绍数学工具,最后解决所提出的问题.使学生了解应用背景,提高学习的积极性.

3. 详细介绍相应的数学软件,为学生将来的研究工作和就业奠定基础.

4. 穿插了数学建模的基本思想和方法，引导学生学以致用，学用结合；编写了附录部分，增加了数学文化的内容.

本书由张从军教授提出编写思想和编写提纲、列出章节目录、编写附录部分，最后对全书进行修改补充、统稿、定稿. 肖丽华副教授编写了第一、第二两章，刘亦农副教授编写了第三、第六两章以及全书的软件部分内容，周惠新副教授编写了第四、第五两章.

复旦大学数学学院博导应坚刚教授、管理学院统计学系主任郑明教授审阅了书稿并提出了宝贵意见，南京财经大学经济学院陈耀辉副教授阅读了书稿并提出了有益的建议，南京财经大学应用数学系一些经济数学基础课程任课教师在教学中试用了本书内容. 编者在此向他们表示衷心感谢！

我们还要感谢南京财经大学的校领导和教学管理部门的负责人，他们对本书的编写工作给予了许多鼓励和帮助；感谢复旦大学出版社，特别是科技编辑室范仁梅主任，他们对该书的出版给予了大力支持. 他们的严谨作风和敬业精神、细致的编辑工作为本书增色不少.

本书在编写过程中，参考了大量的相关教材和资料，选用了其中的有关内容和例题、习题，在此谨向有关编者、作者一并表示谢意.

编写一本教材似乎不难，但编写一本适用的教材绝非易事. 编写此类经济数学基础教材更不是一劳永逸、一蹴而就的事. 因此，既要保持相对的连续性和稳定性，又要紧紧围绕人才培养的目标体系、课程体系，吸收最新的有关教学科研成果，不断修改完善. 作为一项教学研究课题，我们还在探索之中. 诚恳期望有关专家、学者不吝赐教，诚恳期望使用该教材的教师和学生，提出并反馈宝贵意见.

yysxx@njue.edu.cn

编　者

于南京财经大学

2006 年 9 月 16 日

目　　录

第一章　随机事件与随机变量

在社会生活与生产实践中存在着大量随机现象,虽然这种现象具有偶然性,但因其存在统计规律性,使人们对它的研究迅速发展起来,概率论和数理统计就是一门以随机现象及其规律为研究对象的数学学科. 它于 17 世纪由帕斯卡(Pascal)和费马(Fermat)等人创建,目的是把机会博弈问题用数学术语公式化. 苏联数学家柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)在 1933 年正式出版的《概率论基础》中,给出了概率论公理化的完整结构.

本章从实际问题出发,介绍概率论中两个最基本的概念:随机事件及其概率;进而讨论两类随机变量及其概率分布;最后举例介绍所涉上述问题的软件应用. 本章内容是学习概率论的基础.

§1.1　从投票问题和银行账户管理谈起

一、投票问题

1887 年,著名的法国数学家贝特朗(J. Betrand)提出了这样一个问题:"有甲、乙两个候选人参加竞选. 假设投票结果是甲得 n 票,乙得 m 票,且 $n>m$. 按惯例,开票时选票是一张一张唱出的,直至全部选票唱完. 假定开票时选票的排列是完全随机的,即各种排列方式是等可能的,求在整个开票过程中,甲的累计票数始终超过乙的累计票数的概率."

这个问题的解法很多,在这里介绍一种较为新颖的方法.

整个开票过程是一个排列选票的过程,$n+m$ 张选票的全排列是$(n+m)!$. 将 $n+m$ 张选票排列在一个圆周上,若没有首尾的区别时,圆周排列总数是$(n+m-1)!$,从 $n+m$ 个位置中的任一个位置开始顺时针走一圈作为一种排列,可得到 $n+m$ 个排列,这时总排列数为

$$(n+m-1)!\times(n+m)=(n+m)!\ ,$$

即基本事件数为$(n+m)!$.

在圆周排列之后,我们来看从哪些位置顺时针走一圈,所得的排列保证了甲

的累计票数始终超过乙的累计票数，即在这$n+m$个排列中哪些符合条件. 第一步先找到两个相邻的先甲后乙票的位置，并把这两个位置除去，然后在剩下的位置中再这么做下去，直至最后只剩下$n-m$个甲票位置为止. 显然，从这$n-m$个甲票开始顺时针走就能使甲的累计票数始终超过乙的累计票数，而从被除去的位置开始走，就必定会在开票过程中碰到甲乙票数相同的情况，所以在整个开票过程中，甲累计所得票数始终超过乙的累计所得票数的概率是：

$$P=\frac{(n-m)\times(n+m-1)!}{(n+m)!}=\frac{n-m}{n+m}.$$

二、银行账户管理问题

某银行将客户分为(信用)好和(信用)坏两类，并通过分析历史数据得到：在每个月都会有近1%的好客户和10%的坏客户透支银行账户. 当一位新客户来银行开办现金账户时，信用处通过基本检验后认为这位客户大概有70%的机会是一位好客户. 问题是这位客户在第一个月内就透支，请问银行对这位客户的信用度有什么改变? 如果这位客户在第二个月仍透支呢?

假设H="信用好"，T="透支其账户"，银行的历史数据显示：

$$P(T\mid H)=0.01,\ P(T\mid \overline{H})=0.1.$$

另一方面，银行关于这位客户最初的信用观点是：

$$P(H)=0.7.$$

由贝叶斯(Bayes)理论，有

$$P(H\mid T)=\frac{P(H)\cdot P(T\mid H)}{P(H)\cdot P(T\mid H)+P(\overline{H})\cdot P(T\mid \overline{H})}=\frac{7}{37}\approx 18.92\%.$$

银行认为他是好客户的可能性由70%降到不足20%. 在这里$P(H)=0.7$称为先验概率，$P(H|T)=\frac{7}{37}$称为后验概率. 下面我们来考虑第二个月，在第二个月内这位客户透支，此时

$$P(H)=\frac{7}{37},$$

$$\begin{aligned}P(H\mid T)&=\frac{P(H)P(T\mid H)}{P(H)P(T\mid H)+P(\overline{H})P(T\mid \overline{H})}\\&=\frac{\frac{7}{37}\times 0.01}{\frac{7}{37}\times 0.01+\frac{30}{37}\times 0.1}=\frac{7}{307}\approx 2.28\%.\end{aligned}$$

此时银行不会再认为他是一位(信用)好的客户了.

通过上述两个问题可以看到,人们对现实世界的种种认识很多情况下是对各种事件发生可能性大小的判断.反过来,这些事件发生的可能性大小又影响着人们的行为,我们的生活离不开概率.以下从最基本的内容开始讨论.

§1.2 随机事件及其概率

一、样本空间

在自然界和人类社会活动中存在着许多现象,其中有些现象只要满足一定的条件就必然发生.例如:"在标准大气压下,纯水加热到 100 ℃时会沸腾","在没有外力作用的条件下静止的物体必然静止".这类现象称为**确定性现象**.

自然界和人类社会活动中还广泛存在着与确定性现象有着本质区别的另一类现象,例如:掷一枚硬币,可能正面朝上也可能反面朝上;某城市明天发生交通事故的次数;从生产线下来的产品是否为合格品,这种在同样条件下进行同样的观测或实验却可能发生不同结果的现象称为**随机现象**.这种普遍存在的看起来好像毫无规律的随机现象后面实际却隐藏着某种规律性.例如,多次重复抛一枚硬币得到正面朝上大致有一半,某城市明天发生交通事故的次数按照一定规律分布等等.这种在大量重复试验或观察中所呈现出的固有规律性称为**统计规律性**.概率论和数理统计就是研究随机现象统计规律性的一门学科.

一般地,使随机现象得以实现及对它观察的全过程通称为**随机试验**,简称**试验**,记为 E.要完成一个随机试验,主要是明确实现它的"一定条件"以及由它产生的一切可能的"基本结果".这里的"一定条件"可以是人为的也可以是客观存在的;这里的"基本结果"是指随机实验最简单的,不可(或不必)再细分的结果.

定义 1.1 随机试验的每一个基本结果称为**样本点**,记作 $\omega_1, \omega_2, \cdots$随机试验的所有样本点组成的集合称为**样本空间**,记作 Ω,即

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots\}.$$

例 1.1 E:"掷一枚硬币观察其朝上的面";可能出现的结果是正面或反面;$\Omega = \{$正,反$\}$.

例 1.2 E:"一个人进行射击,记录他直至击中目标的射击次数";可能结果是 $1, 2, \cdots$; $\Omega = \{1, 2, \cdots\}$.

例 1.3 E:"观察一只灯泡的使用寿命";可能出现的结果是任一非负正数;$\Omega = [0, +\infty)$.

例 1.4 E:"观测某市每日的最高气温和最低气温";以 x, y 分别表示最高

和最低气温，人们总可以确定此地气温的上界 a 和下界 b，可能出现的结果是坐标平面中的一个三角形：$\Omega = \{(x, y) \mid b \leqslant y \leqslant x \leqslant a\}$.

不难看出，样本空间 Ω 可以是数集，也可以是任何抽象的集合；可以是有限集，可列集，也可以是不可列的无穷集合；可以是一维的也可以是多维的集合．所以，正确地确定不同随机试验的样本点和样本空间是非常重要的．

二、随机事件及其运算

在一次随机试验中，我们通常关心的是带有某些特征的那些样本点所组成的集合．例如：例 1.2 中“3 次以内击中目标”；例 1.3 中的“一只灯泡的寿命超过 500 小时”．这种带有某种特征的样本点组成的集合称为**随机事件**，通常用大写字母 $A, B, C, \cdots$ 等表示．因此，可记

$$A = \{\text{一个人射击，3 次以内击中目标}\} = \{1, 2, 3\},$$
$$B = \{\text{一只灯泡的寿命超过 500 小时}\} = (500, +\infty).$$

随机事件是样本空间 Ω 的一个子集．在试验中，如果事件 A 包含的某一个样本点 ω 出现了，则称 A 发生，记为 $\omega \in A$．由样本空间 Ω 中的单个元素组成的子集称为基本事件，而样本空间 Ω 的最大子集（即 Ω 本身）称为必然事件，样本空间 Ω 的最小子集（即空集 $\varnothing$）称为不可能事件．

一个样本空间 Ω 中，可以有很多随机事件，人们通常研究这些事件的关系及运算，以便通过较简单的事件的统计规律去研究较复杂事件的统计规律．下面介绍事件间的关系及运算，它们与集合论中集合之间的关系及运算是一致的．

1. 包含

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B **包含**事件 A，记作 $B \supset A$ 或 $A \subset B$.

如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称事件 A 与事件 B **相等**，记作 $A = B$.

2. 互不相容

如果事件 A 与 B 不能同时发生，则称事件 A 与 B **互不相容**或**互斥**，此时必有 $AB = \varnothing$.

如果 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意两个事件都互不相容，即

$$A_iA_j = \varnothing \qquad (1 \leqslant i < j \leqslant n),$$

则称这 n 个事件是互不相容的或互斥的．

3. 和

两个事件 A 与 B 中至少有一个发生，称为事件 A 与事件 B 的**和**，记作 $A + B$ 或 $A \cup B$.

$\sum\limits_{i=1}^{n} A_i = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ 表示 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生;

$\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \cdots$ 表示可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 中至少有一个发生.

4. 积

两个事件 A 与 B 同时发生,称为事件 A 与 B 的**积**,记作 AB 或 $A \cap B$.

$\prod\limits_{i=1}^{n} A_i = A_1A_2\cdots A_n$ 表示 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生;

$\prod\limits_{i=1}^{\infty} A_i = A_1A_2\cdots A_n\cdots$ 表示可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 同时发生.

5. 对立(逆)

如果两个事件 A 与 B 满足 $A + B = \Omega$, $AB = \varnothing$,则称事件 A 是事件 B 的对立事件或**逆**事件. 此时事件 B 也是事件 A 的逆事件,所以事件 A 与事件 B 是互逆事件,记作 $\overline{A} = B$ 或 $\overline{B} = A$. 显然 $\overline{\Omega} = \varnothing$, $\overline{\varnothing} = \Omega$, $\overline{\overline{A}} = A$.

6. 差

如果事件 A 发生且事件 B 不发生,称为事件 A 与 B 的**差**,记为 $A-B$. 显然 $A - B = A - AB = A\overline{B}$.

维恩(John Venn)图(见图 1-1)能更直观地将事件间的关系及运算表示出来. 用一矩形表示样本空间 Ω,矩形内的点表示样本点,矩形区域内的子集 A, B 代表随机事件 A, B.

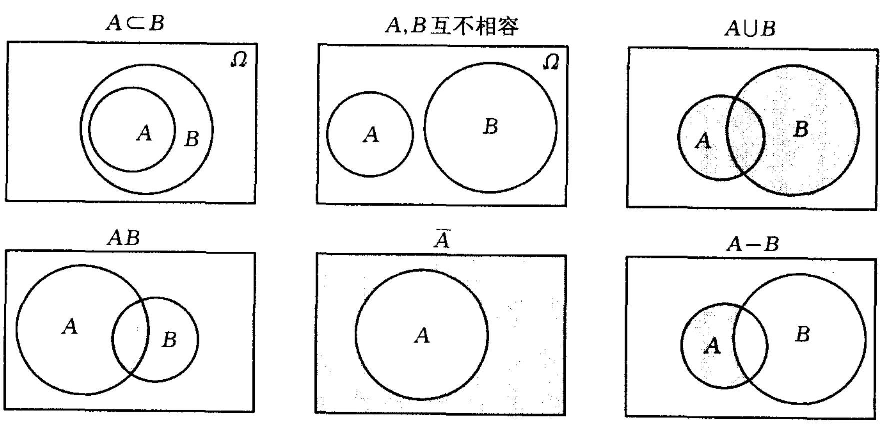

图 1-1

对于事件的运算有如下的运算规律.

事件的运算律

(1) **交换律**: $A+B=B+A$, $AB=BA$;

(2) **结合律**: $(A+B)+C=A+(B+C)$, $(AB)C=A(BC)$;

(3) **分配律**: $(A+B)C=AC+BC$;

(4) **对偶原理**: $\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$, $\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$.

对于 n 个事件,甚至对于可列个事件,对偶原理也成立.

例 1.5 证明$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$.

证法一 $\overline{A+B}=\overline{\{A,\ B\text{至少有一个发生}\}}=\{A,\ B\text{都不发生}\}$

$$=\{\overline{A},\ \overline{B}\text{都发生}\}=\overline{A}\,\overline{B}.$$

证法二 $\forall\omega\in\overline{A+B}$,有 $\omega\in\Omega-(A+B)$,即

$$\omega\in\Omega-A\text{ 且 }\omega\in\Omega-B,$$

所以 $\omega\in\overline{A}$ 且 $\omega\in\overline{B}$,即 $\omega\in\overline{A}\,\overline{B}$,亦即$\overline{A+B}\subset\overline{A}\,\overline{B}$.

反之,$\forall\omega\in\overline{A}\,\overline{B}$,有 $\omega\in\overline{A}$ 且 $\omega\in\overline{B}$,即

$$\omega\in\Omega-A\text{ 且 }\omega\in\Omega-B,$$

于是 $\omega\in\Omega-A-B$,即 $\omega\in\overline{A+B}$,所以 $\overline{A}\,\overline{B}\subset\overline{A+B}$.

因此$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$.

例 1.6 设 A, B 是随机事件,试证:$\overline{A}B+A\overline{B}+\overline{A}\,\overline{B}=\overline{AB}$.

证明 由事件的运算规律知:

$$\begin{aligned}\overline{AB}&=\overline{A}+\overline{B}=\Omega\overline{A}+\Omega\overline{B}=(B+\overline{B})\overline{A}+(A+\overline{A})\overline{B}\\&=B\overline{A}+\overline{B}\,\overline{A}+A\overline{B}+\overline{A}\,\overline{B}=\overline{A}B+A\overline{B}+\overline{A}\,\overline{B},\end{aligned}$$

故 $\overline{A}B+A\overline{B}+\overline{A}\,\overline{B}=\overline{AB}$.

例 1.7 小王下班后开车回家,途经 4 个交通信号灯. A_i 表示第 i 个路口遇上红灯($i=1, 2, 3, 4$),试用 A_i 表示下列事件:

(1) 一路绿灯;

(2) 至少遇到一次红灯;

(3) 只遇到一次红灯;

(4) 至少遇到 3 次红灯;

(5) 至多遇到 3 次红灯.

解 (1) $\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}=\overline{A_1+A_2+A_3+A_4}$.

(2) $A_1+A_2+A_3+A_4$.

(3) $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\overline{A_4}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4$.

(4) $\overline{A_1}A_2A_3A_4+A_1\overline{A_2}A_3A_4+A_1A_2\overline{A_3}A_4+A_1A_2A_3\overline{A_4}+A_1A_2A_3A_4$.

(5) $\overline{A_1A_2A_3A_4}=\overline{A}_1+\overline{A}_2+\overline{A}_3+\overline{A}_4$.

例 1.8　掷一枚骰子(6 个面),观察其朝上面的数字. 设事件 $A=\{$出现奇数点$\}$,事件 $B=\{$出现偶数点$\}$,$C=\{$小于 4 点$\}$,求:事件 $A+C$, BC, $A-C$, AB, $A+B$,并问 A, B, C 中哪两个事件是对立的?

解　因为 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, $A=\{1,3,5\}$, $B=\{2,4,6\}$, $C=\{1,2,3\}$,所以

$A+C=\{1,2,3,5\}$,

$BC=\{2\}$,

$A-C=\{5\}$,

$AB=\varnothing$,

$A+B=\Omega$.

因此,A 与 B 是对立事件.

三、频率与概率

定义 1.2　设 E 为任一随机试验,A 为 E 中的一事件. 在 n 次重复试验中 A 出现的频数(次数)记为 $\mu_n(A)$,称比值

$$f_n(A)=\frac{\mu_n(A)}{n} \tag{1.1}$$

为事件 A 在 n 次试验中出现的**频率**.

易知频率 $f_n(A)$ 具有下述性质.

频率 $f_n(A)$ 的性质

(1) 非负性: $f_n(A)\geqslant 0$;

(2) 规范性: $f_n(\Omega)=1$;

(3) 有限可加性:若 A_1, A_2, $\cdots$, A_m 是 m 个互不相容的事件,即

$$A_iA_j=\varnothing,\ i\neq j,$$

则有

$$f_n\Big(\sum_{i=1}^{m}A_i\Big)=\sum_{i=1}^{m}f_n(A_i),$$

其中 n 为任意正整数.

频率是人们常用的统计工具. 在长期的生活实践中,经验告诉我们:事件 A 发生的可能性越大,其发生的频率也越大;反之,事件 A 发生的频率越大,可以想象事件 A 发生的可能性也越大. 虽然频率的数值不固定,但当试验次数 n 充分大时,事件 A 发生的频率将在某个实数的附近波动,一般来说,试验次数越多,波动越小,这称作频率的稳定性.