组合理论的基本方法

DANIEL I.A.COHEN 著

左孝凌　王攻本　李为鑑　王广泰 译

王攻本 校

北京大学出版社

组合理论的基本方法

DANIEL I.A. COHEN 著

左孝凌　王攻本　李为鑑　王广泰 译

王攻本 校

北 京 大 学 出 版 社

组合理论的基本方法

DANIEL I.A.COHEN 著
左孝凌 王攻本 李为鑑 王广泰 译
王攻本 校
责任编辑：李怀玺

北京大学出版社出版
（北京大学校内）
北京大学印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

850×1168毫米 32开本 11.5印张 270千字
1989年10月第一版 1989年10月第一次印刷
印数：0001— 3500册
ISBN 7-301-00551-2/O·111
定价：5.95元

内容简介

本书主要介绍了组合等式、生成函数、容斥原理、高等计数、置换和图形计数等组合理论的基本内容。全书着重于组合方法与技巧的介绍，并以丰富的实例，广泛阐述了组合理论在物理、化学、计算机科学、管理科学等各方面的应用。书中很多定理都有多种证明方法，并从代数、几何以及组合学的多种角度进行解释，有助于读者开拓思路。

本书取材精炼，难点分散，论述清晰，富于启迪，把组合的思想和方法做了全面的归纳和总结，可作为计算机科学或其他有关专业相应课程的教材。

译 者 序

组合数学又称组合理论，是一门既古老但又新兴发展的数学分支。自本世纪五十年代以来，由于计算机科学中离散结构不断发展，组合数学的方法和思想日趋重要。在理论上它与数论、代数学、函数论、概率统计等学科密切相关；在应用方面，对物理、化学、生物、空间技术、电子工程、信息管理、计算机科学等各个领域，具有显著的作用。

近年来，由于组合算法、组合逻辑、组合计数等在计算机学科中的各种应用，使得组合数学成为计算机和其他各种信息科学的一门重要基础理论课程。

DANIEL I.A.COHEN 所著《组合理论的基本方法》一书，不仅介绍了组合理论的基本课题，而且把组合的思想和方法，作了完善的归纳和至美的总结。这本教材把基本理论与组合技巧融然贯通，使读者深深感到组合方法不仅是饶有趣味，而且富于启迪。本书寓教于"技"，而主旨着重于能力和素质的训练。作为方法和技巧的概述，全书取材堪称精炼，论述也很清晰，一个论题，往往用多种模型解释，读来引人入胜。

为了介绍组合数学的基本技巧，推广和促进这个课程的教学，1983年春，我们受全国计算机教育学会的委托，在武汉市举办了《组合数学》讲习班，为此翻译了本书并用它作为教材。讲习班以后，我们重新勘译了原文，并作了仔细的校审。译文改正了原书中的一些错误。译文中所有人名均用原文，在附录中给出参考的译法。

本书的前言、附录、第二、五章由上海交通大学左孝凌译；第六章、人名、名词对照表由北京大学王攻本译；第一、三章由复旦大学李为鑑译；第四、七章由华中工学院王广泰译。左孝凌

对全书作过一些初校；王攻本作了全书的总校和审定。

限于译者水平，错误疏漏在所难免，敬请读者不吝批评赐正。

北京大学屈婉玲同志对本书译稿提出了宝贵的意见，特此致谢。

前 言

组合理论广泛地被认为是最引人入胜的数学分支。这是由于它的双重性质：它包含所有抽象论证的最巧妙的证明，它亦有当代科学中最综合的应用领域。不论是数值的、几何的、或者仅只包括图形和花样的各种智力游戏，混合博弈和饶有趣味的谜语，都可在书中作为一般理论的基础，同时对物理、化学、工程、统计学、社会学、经济学、计算机科学和运筹学有重要意义的细节亦都包括在本书之中。

本书打算作为只学过一学期微积分的新学生的组合论导引。本书最初形成于哈佛大学的一个讨论班，以后又用于东北大学的一个班级中。它设计为一学期课程的教材，并且对于每个课题的数量和分析的深度都作了适当的调整。

我选取了我认为是必不可少的那些核心的材料，那些本可以包括在本书中但也可以通过其他更精确的数学方法来完善描述的课题被忽略了。由于这个原因，我略去了某些极好的和重要的组合论分支，但是我仍希望能激励学生去作进一步的研究。

我宁肯对于每一个结果花费更多的时间，而不是对每个定理导出最快证明后急速地去进行下一步推导。这里首先要强调的是发展研究的方法而不是高效率地罗列事实。由于这个原因很多定理给出了不止一种的证明。在本书中定理本身仅是特征概念——组合论的基本方法的说明和应用。

我的目的是要保持所有记号清晰明瞭，为此求和记号总是用省略号标志以代替流行的Σ记号。

作为另外一种尝试，我必须承认这样的事实，在所有的证明方法中，数学归纳法最难令人满意，它常常是不可构造的、粗糙的、难于概括的，并且也无助于对所需证明公式原始意义的理解，

鉴于这个原因，我把所有归纳法所考虑的内容都放入附录之中。

更抽象的定理是从简单的结果，通过概括的过程相继地得到的更抽象的命题。按照我的看法，一本介绍一门学科的教科书，首先证明一般命题，然后再综观有趣的推论，这不仅有歪曲数学发展历史顺序之嫌，而且也妨碍了学生对数学研究过程的深入认识.不幸,这种深入认识，在各种水平的数学教科书中是很少的。

我试图把荣誉归于书中所含材料的最初作者。由于过去有一种缄默而广泛的倾向，它抑制着这方面的资料，使确定其真正的创始根源往往存在着困难，并且某些记载也可能有错，对它鉴定常受阻于其他因素：很多定理很古老，几个结果被多次重复地发现,在一个定理的发现和首次正确的证明之间常常相隔几个世纪，而且探索的技巧也常常被发现者本人有意地遮掩了。

我非常感谢在撰写本书底稿时 George .E. Andrews 教授，Pouglas. G. Kelly 教授、Richard .M. Wilson 教授、Richard .P. Stanley 教授和我的学生们对我的帮助。由于他们的赐教使本书得以避免出现比现在更多的错误。

目　　录

第一章　引论 …………………………………………………… (1)

计数 …………………………………………………… (1)

一一对应 …………………………………………………… (3)

奇偶性 …………………………………………………… (5)

习题 …………………………………………………… (9)

第二章　二项式系数 …………………………………………………… (15)

排列与组合 …………………………………………………… (15)

恒等式 …………………………………………………… (23)

应用 …………………………………………………… (37)

有重复抽样 …………………………………………………… (47)

习题 …………………………………………………… (53)

第三章　生成函数 …………………………………………………… (71)

引言 …………………………………………………… (71)

FIBONACCI数 …………………………………………………… (76)

另一些生成函数 …………………………………………………… (81)

划分 …………………………………………………… (86)

另一些递推关系 …………………………………………………… (97)

习题 …………………………………………………… (100)

第四章　高等计数 …………………………………………………… (124)

多项式系数 …………………………………………………… (124)

STIRLING 数 …………………………………………………… (129)

CATALAN 数 …………………………………………………… (147)

习题 …………………………………………………… (160)

第五章　两个基本原理……(174)

DIRICHLET 鸽洞原理……(174)
RAMSEY 定理……(178)
容斥原理……(185)
习题……(201)

第六章　置换……(215)

圈……(215)
奇偶性……(226)
共轭类……(235)
轨道……(239)
POLYA 定理（特殊情况）……(246)
POLYA 定理（一般情况）……(251)
习题……(259)

第七章　图……(273)

路……(273)
树……(281)
CAYLEY 公式……(290)
图的计数……(307)
EULER 公式……(315)
习题……(323)

附　录……(336)

数学归纳法……(336)
人名索引……(351)
名词索引（英汉）……(353)

第一章　引　　论

计　　数

大体上，组合论是研究计数方法的，即有多少个符合给定描述的对象，或者说有多少种方式使确定的事件能发生。例如，下面一些传统的问题可用组合论来回答。

1．四个人就座一张圆桌，可有多少种不同的坐法？

2．五个人分17元钱，有多少种不同的分法？

3．将五个男人和五个女人介绍给乔治，每次介绍一个，使他所认识的男人数总不超过女人数，可有多少种介绍法？

4．平面上10条直线，可以构成多少个区域？

5．如果有三种颜色可以选用，那么有多少种方法对立方体的六个面进行着色？

6．将八个皇后放在一张棋盘上，使得沒有两个处于互相可攻击的位置，那么有多少种放法？

当我们考察一个问题，就象是上面那一个安排或设计的问题时，我们必须考虑到要我们计数的结构根本不存在的可能性。例如，这样的问题：

将九个皇后放在一张棋盘上，使得沒有两个处于互相可攻击的位置，可有多少种放法？

其答案是“零”。在一张棋盘上只有八行，如果我们放九个皇后，那么必定有两个要放在同一行上，这两个就是可以互相攻击的。这仍然不能保证放置八个皇后是会太平的。我们必须确定（1）是否能做到，以及（2）如果能做到，那么有多少种方法。

因为组合论涉及到计数，所以我们所用到的数几乎都是正整

数。当我们提到“数”这个字时，通常是指整数。

因为我们要计算有多少对象存在于一个确定的集合中，所以我们假定所涉及的是一个有限集，这种有限集的本质就象是数学的分支或物理世界中提出来的那样多种多样。

正如所有数学的情况一样，研究该学科的基本价值是为了它自身的认识，可是，组合论在现实世界中是特别有用的，最通常的应用之一就是概率的计算。

Pierre Simon de Laplace (1749—1827) 首先明确地定义了概率的概念。他说，如果在一个确定的集合中总共有T个对象，并且有一个具有F个对象的有利子集，那么，随机地从这个全集中选取有利对象的概率是F/T。

$$概率=\frac{有利对象的数目}{对象的总数}$$

例如

$$正面的概率=\frac{硬币的正面数}{硬币的表面数}=\frac{1}{2}$$

在纸牌游戏中发成顺子的概率

$$=\frac{可能是顺子的数目}{不同纸牌束的总数}=\frac{10240}{2598960}\sim\frac{1}{254}$$

一个人的前两个孩子是不同性别的概率

$$=\frac{有利排列(BG,GB)的数目}{排列(BB,BG,GB,GG)的总数}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

两粒骰子掷出是 5 点的概率

$$=\frac{组成5点的方法(1\&4,2\&3,3\&2,4\&1)的数目}{不同掷法(1\&1,1\&2,\cdots,6\&6)的总数}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

为了从这个定义来计算概率，我们必须会计算有利情况的数目与可能情况的总数，这就是组合论纯理论的例子。

一一对应

当 Arthur Cayley（1821—1895）探讨对于所有值 n，确定饱和碳氢化合物 C_nH_{2n+2} 的不同异构体的数目这样的问题时，就产生了对另一种抽象计数的需要。例如，C_4H_{10} 可以是丁烷或者异丁烷（见图1.1）。

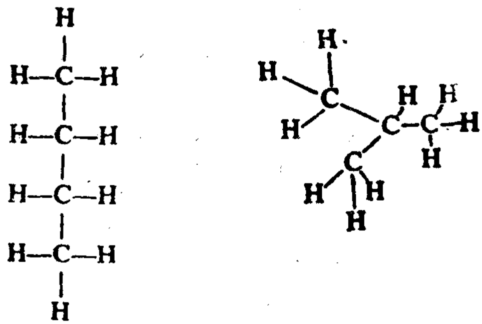

图 1.1

他首先画成示意图，它是线和点的集合，称为树，每条线连结两个点，而每个点连接一条或四条线。这些图不包含线和点所形成的闭圈（见图1.2）。

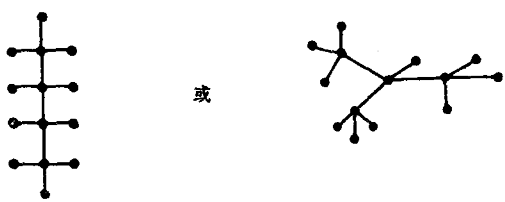

图 1.2

这些结构的计数问题是组合论的又一个部分。

这个例子阐明了一种在计数时常用的技巧，称为一一对应。只要一个计数问题的对象与另一个计数问题的对象的个数相同，

就可以用第一个问题来取替第二个问题。在上面的情况下，我们注意到有多少个 C_nH_{2n+2} 的异构体就有多少棵具有 n 个4-线簇顶点和$(2n+2)$ 个1-线簇顶点的树。在这个特殊的例子中，虽然我们还没有通过这种转换把问题简化到一目了然的地步，然而，这是首要的一步。

以下的例子提供了一一对应的一个趣味性的应用。总统、副总统、秘书以及财务大臣，都是从10个人的集合中挑选的，而且每个人都可以兼职，问有多少种挑选法？让我们给10个人中的每一个人与数字0,1,…,9中的一个相联系。现在让我们给总统、副总统、秘书、财务大臣的每一种挑选分配一个四位数字构成的数，若有兼职，那么也一起在一个数中。数4373对应着 4 号当总统，3 号当副总统兼财务大臣，以及 7 号当秘书。每一种挑选对应着一个且仅仅对应着一个四位数，而且每一个四位数对应着一种且仅仅对应着一种挑选法。因此，恰好有与数 0000,0001,…,9999 一样多的挑选法，即10000种。在这种情况下，我们用了一一对应来计数。

例 有 101 个竞争者参加某种网球锦标赛，这是一个单淘汰赛，就是说，任何一个选手输一局就被淘汰。每一场比赛以某个运动员的胜利而告终，即不存在平局。在每一轮比赛中，保留下来的选手们尽可能多地配成对，但是，如果有奇数个竞争者，那么就要剩下某个单人。这个锦标赛要进行足够的轮数，直到得出一个胜利者，总共要进行多少场比赛？

有两种方法去探讨这个问题。直截了当的方法是分析每一轮比赛。在第一轮中有50场比赛和一个单人，50个胜者和一个单人进入第二轮并且有25场比赛和一个单人，然后，这25个胜者和一个单人进入第三轮并且他们恰有13场比赛。13个胜者将有 6 场比赛和一个单人，7 个幸存者又是一轮且有 3 场比赛和一个单人，这一轮将剩下 4 个选手，他们将构成 2 场比赛的一轮，那么，两个保留下来的选手总有一个将夺得冠军。总计有

$$50+25+13+6+3+2+1=100$$

场比赛。

解这个问题的一个好的方法是：注意到比赛场次的数目与失败者数目之间的一一对应。每一场比赛有唯一的失败者，而每一个失败者是在唯一的一场比赛中被击败。因此，比赛的总场数与失败者的总数相同。开始有 101 个竞爭者，而最后只有一人沒有被击败，因此，恰好有100个失败者。

这个探讨方法不仅是十分漂亮的，而且它给出了问题的一个比较深刻的理解，具有一般意义。类似于上面的一个锦标赛，开始有 n 个竞爭者，那么，恰有$n-1$场比赛。

在组合论的发展中，将有很多场合要用到这种技巧。

奇 偶 性

组合论不仅应用于现实世界，也应用于数学的其他分支。当运用计数论证法来证明某些数学对象是存在还是不存在时，一些绝妙事情发生了，这些论证法往往依赖于奇偶性考虑。一个整数的奇偶性就是偶数或奇数，当然，这依赖于该数用 2 来除是否有余数。有时，在数学中，当我们希望知道是否有对于某对象的确切描述时，我们使用组合论去证明这些对象的总数是奇数，那么，我们就能断定至少有一个这样的对象存在。

另一方面，我们可以用奇偶性来证明某些对象是根本不可能存在的。由 Leonhard Euler（1707—1783）所发现的子感应理论就是一个很好的实例。

在德国的 Königsberg 城（现在的 Kaliningrad，在R.S.F.S R.）有一个岛位于两条河的汇交处，七座桥连结着 不同的陆地，如图1.3所示。

七桥问题是要找一条经过每一座桥恰好只有一次的路。有多

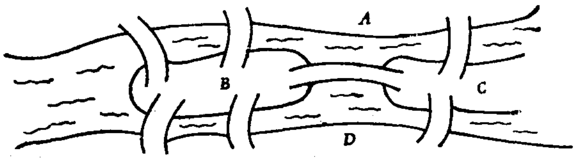

图 1.3

少条路存在？它们是哪些？Euler 解决了这个问题，并且证明这样的路是不存在的。一条路开始于陆地并且终止于陆地，甚至可能是陆地的同一部分。让我们注意到，如果陆地的任何一部分既不是路的起始也不是路的终止，那么，它必须用偶数座桥与另一些部分相连结。这是因为，对于每一座有一条路经过它而进入这个部分的桥必对应着且仅仅对应着一座这条路经过它而离开这个部分的桥，所以，对于每一个中间部分来说，这条路自己形成了入口桥和出口桥之间的一一对应。一种可能性如图1.4所示：

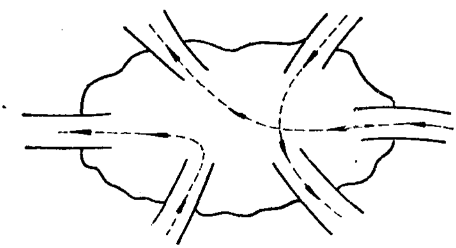

图 1.4

所以，对于每一个中间部分来说，入口桥的数目等于出口桥的数目，而且，连结桥（入口加出口）的总数是偶数。因此，陆地的任何一部分，如果是由奇数座桥连结的话，那么，它必定是这条路的起始或终止。在 Königsberg 的情况下，A,B,C 和 D 都有奇数座桥通向它们，既然，它们之中至多有两个可以是这条路的两端，因此，这样的路是不可能有的。

与这个情况不同的是，在 Paris 有两个岛在一条河中，且有

15座桥连结它们，如图1.5所示。

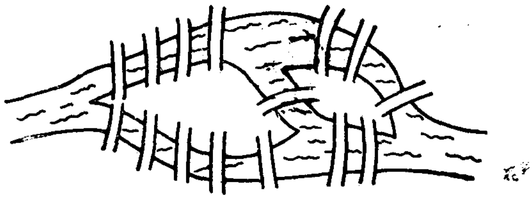

图 1.5

陆地的两个部分都是由偶数座桥连结的（即两个岛），而两个部分都是由奇数座桥连结的（即两个岸）。这就是说，可以有一条路存在，那就是一个岸作为起始通过来回数次而终止于另一岸。事实上，这样的路是能够找到的。

William Rowan Hamilton（1805—1865）探讨了一个类似的问题。他考虑的图形称为图，它类似于Cayley的树形图，这些图是由称为顶点的点和称为边的线段所构成，这里，环是允许有的，就象图1.6所示。

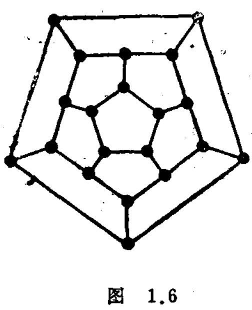

图 1.6

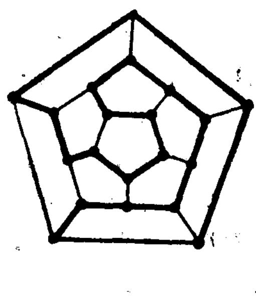

图 1.7

我们将在第七章中给出图和树的更精确的定义。

Hamilton说，如果存在一条由图中的边所构成的路，这条路