依据国家教育部中小学最新教材编写

代数

高中下册

（修订版）

主　编：北京师范大学　向佐初

北京师范大学实验中学

北京师范大学附中

北京师范大学二附中

首都师范大学附中

北京四中

高中精讲金则丛书

西苑出版社

《高中精讲检测丛书》编委会

张绛珠	张淑琴	张 莉	魏 伟	李秀娟
尹鲜芝	杜素英	严 洁	张景富	王景山
王 颖	李 勇	薛艳梅	赵 研	王艳军
李国柱	张 滨	胡国燕	许连壁	刘玉平
朱湘君	张立新	崔君方	李 艳	陈 丽
尹欲宏	蒙 琳	栾 谦	张秀芬	马志雄
林春芳	郑秀华	周朝晖	蒋学敏	狄 燕
李金英	时振兴	葛玉红	吴建新	张书琴
张培靖	吴 峥	安宏志	薛景娣	吴 磊
张梦云	路 华	石俊华	万 妞	黄秀英
刘玉清	熊珍秀	杨玉娇	郭晓军	玲 燕
阎黛雅	邢素芬			

前　　言

为了加强高中基础知识与同步强化训练，帮助学生更好地学习和掌握教学大纲规定的内容，给学生复习、考试提供一套高质量有特色的导读丛书，以利于全面提高学生素质，打好基础，顺利应试，我们编撰了这套《高中精讲检测丛书》。本《丛书》由北京师范大学有关专家学者领衔主持，并组织北京师范大学实验中学、北京师范大学附中、北京师范大学二附中、首都师范大学附中、北京四中、北京大学附中、北京二中、北京九中、北京八十中、北京理工大学附中、北京师范大学、北方工业大学、北京教育学院西城分院、北京市石景山区教师进修学校，以及其他部分省市教育系统的教授、副教授、特级教师、高级教师、博士、讲师和基础教育专家共百余人，精心笔耕而成。

《丛书》以国家教育部审定的《全日制中学语文、数学、物理、化学、英语教学大纲(修订本)》为指导，以新教材为依据，按教科书的安排逐章编写，力求少而精，特别注意教材知识点的提炼，重点难点精讲，解题技巧与思路分析，巩固提高练习，期中期

末测试，还兼顾高考的需要，收录高考指导等方面的内容，涵盖了高中全部教材知识点。

这套《丛书》与教材同步配套，知识要点精炼，释文简明确切，例证新颖翔实，论证深入浅出，内容全面丰富，重点突出，独树一帜，具有较强的实用性、指导性、权威性，是高中生最佳的辅导读物，也是高中教师、家长们备课和辅导时较好的参考材料。

我们希望广大的高中生、教师、家长会喜欢她、珍爱她，这将使您受益匪浅。

本《丛书》在编辑出版中，曾得到中共中央办公厅西苑出版社的大力支持、杨宪金社长兼总编辑的指导及编辑工作人员的热情帮助，谨在此表示衷心的感谢。由于编写时间仓促，缺点和疏漏是难免的，恳请广大读者、专家批评指正。

北京师范大学　　向佐初
巴　丹

目　　录

第五章　不等式

本章考察了不等式的性质，在此基础上，研究不等式的证明与解不等式。比较法、综合法和分析法是最基本的证明不等式的重要方法，必须达到能够熟练应用的程度。掌握一元一次不等式、一元二次不等式、指数不等式、对数不等式、特殊的高次不等式、分式不等式、无理不等式以及含绝对值不等式的解法是解不等式的基本要求。此外，还要掌握利用平均值不等式证明不等式和求某些函数最大、最小值的方法。

一、教材精讲

（一）知识要点

1．不等式的定义与基本性质

(1)对任意两个实数 a、b，定义

$$a>b \Leftrightarrow a-b\in \mathrm{R}^{+}$$

$$a=b \Leftrightarrow a-b\in \{0\}$$

$$a<b \Leftrightarrow a-b\in \mathrm{R}^{-}$$

由不等号“>”、“<”、“≥”或“≤”联结的式子称为不等式。

(2)不等式的基本性质

①三歧性

对任意两个实数 a、b，下列三种关系有且只有一种成立：

$$a>b、a=b、a<b$$

②$a>b \Leftrightarrow b<a$。

③传递性

$$a>b, b>c \Rightarrow a>c$$

④加法保序性

$$a>b \Rightarrow a+c>b+c$$

推论:

$$a>b, c>d \Rightarrow a+c>b+d$$

⑤乘法保序性

$$a>b, c>0 \Rightarrow ac>bc$$

$$a>b, c<0 \Rightarrow ac<bc$$

推论 1: $\left.\begin{array}{l} a>b>0 \\ c>d>0 \end{array}\right\} \Rightarrow ac>bd$

推论 2: $a>b>0 \Rightarrow a^n>b^n$

⑥ $a>b>0 \Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$

⑦三角不等式

$$|a|-|b| \leqslant |a+b| \leqslant |a|+|b|$$

$$|a|-|b| \leqslant |a-b| \leqslant |a|+|b|$$

2. 不等式的证明

(1)不等式证明的基本方法

①比较法

比较法分为"作差"比较与"作商"比较。"作差"比较是不等式证明的最重要、最根本的方法,从内容上看"作差"比较就是"回到定义",而从方法上看则是化归。很多重要的、复杂的不等式都可以直接用"作差"比较得到证明。"作商"比较是"作差"比较的某种结构上的对偶,在某些特定情形

非常方便。

“作差”比较：

$$a>b \Leftrightarrow a-b>0$$

$$a=b \Leftrightarrow a-b=0$$

$$a<b \Leftrightarrow a-b<0$$

“作商”比较：

$$a、b>0, a>b \Leftrightarrow \frac{a}{b}>1$$

$$a、b>0, a=b \Leftrightarrow \frac{a}{b}=1$$

$$a、b>0, a<b \Leftrightarrow \frac{a}{b}<1$$

②综合法

任何问题都是由已知和未知构成，解决问题就是在已知和未知之间寻求联系，一旦得到了这种联系，问题即宣告解决。综合法就是指从已知出发，不断推出一系列结论，最终达到未知的方法。

③分析法

与综合法相对应，通过对未知进行分析，得到一系列未知的充分条件，直到达到已知的解决问题的方法称为分析法。

综合法与分析法可以单独使用，但对较复杂的问题，往往需要将两种方法综合起来使用。在使用分析法时，要注意叙述方式。

此外，与自然数 n 有关的不等式也经常使用数学归纳法证明。

(2)平均值不等式及其应用

①平均值不等式

设 a_1、a_2、…、$a_n \in \mathrm{R}^+$，则

$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$称为这 n 个正数的算术平均值；

$G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$称为这 n 个正数的几何平均值。

平均值不等式：$A_n \geqslant G_n$，当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时等号成立。

$n = 2$ 时的平均值不等式：

对任意 a_1、$a_2 \in \mathrm{R}^+$，都有

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1 a_2}，等号当且仅当 a_1 = a_2 时成立。$$

$n = 3$ 时的平均值不等式：

对任意 a_1、a_2、$a_3 \in \mathrm{R}^+$，都有

$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geqslant \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$，等号当且仅当 $a_1 = a_2 = a_3$ 时成立。

②平均值不等式的应用

利用平均值不等式可以证明很多复杂的不等式，证明方法见范例分析。利用平均值不等式还可以解决一些函数的最大值、最小值问题，具体方法和需要注意的问题见范例分析。

3. 不等式的解法

(1)一元一次不等式的解法

形如 $ax + b > 0$（“$>$”也可以是“$<$”、“$\geqslant$”、“$\leqslant$”，以下不再说明）其中 $a \neq 0$ 的不等式称为一元一次不等式。利用不等式的基本性质，很容易解得：

①当 $a>0$ 时，以上一元一次不等式的解集为 $\{x|x>-\frac{b}{a}\}$；

②当 $a<0$ 时，不等式的解集为 $\{x|x<-\frac{b}{a}\}$。

(2)一元二次不等式的解法

形如 $ax^2+bx+c>0(a\neq0)$ 的不等式称为一元二次不等式。由一元二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的性质，不难得到以上一元二次不等式的解：

①$a>0$

若 $\Delta=b^2-4ac>0$，设 $ax^2+bx+c=0$ 的两根分别为 $x_1<x_2$，则不等式的解集为：$\{x|x<x_1$ 或 $x>x_2\}$；若 $\Delta=0$，则不等式的解集为 $\{x|x\neq-\frac{b}{2a}\}$；若 $\Delta<0$，则不等式的解集为 R。

②$a<0$

若 $\Delta=b^2-4ac>0$，设 $ax^2+bx+c=0$ 的两根分别为 $x_1<x_2$，则不等式的解集为 $\{x|x_1<x<x_2\}$；若 $\Delta\leqslant0$，则不等式的解集为 $\varnothing$（空集）。

其它情形的一元二次不等式的解法类似于此。

(3)指数不等式的解法

指数中含有未知数的不等式称为指数不等式。在中学阶段，指数不等式通常有两种，一种是可以整理成 $a^{f(x)}>a^{g(x)}(a>0,a\neq1)$ 的对数不等式，另一种是可以通过换元转化为代数不等式（即只含未知数的整数次幂，通常是一元二次不等式）的对数不等式。关于这两种对数不等式的解法见范例分析。

(4)对数不等式的解法

对数的真数中含有未知数的不等式称为对数不等式。对数不等式的类型和解法与指数不等式类似，具体情况见范例分析。

(5)特殊的高次不等式的解法

形如 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0>0(a_n\neq0)$的不等式称为一元 n 次不等式，$n\geqslant3$ 时，统称为高次不等式。

如果上述一元 n 次不等式的左端能够分解为 $a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$的形式(其中诸 x_i 可以相等也可以不相等)，则我们可以通过分析函数 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 在某些区间上的取值情况来得到原不等式的解集，详细讨论见范例分析。

(6)分式不等式的解法

形如$\dfrac{f(x)}{g(x)}>0$ 的不等式称为分式不等式。一般中学所能见到的分式不等式都可以利用类似于上述一元 n 次不等式的解法得到解决(见范例分析)。

(7)无理不等式的解法

含有关于 x 的无理式的不等式称为无理不等式。解无理不等式的关键是将无理不等式转化为有理不等式，通常使用乘方等方法，要视具体问题具体分析(见范例分析)。

(8)含绝对值不等式的解法

解含绝对值的不等式关键在于对绝对值的讨论，一般可以通过平方或分情况讨论等方法解决，具体问题见范例分析。

(二)重点难点提示

本章的重点是：

1. 不等式证明的基本方法：比较法、综合法和分析法。

2. 解不等式的基本方法(结合一元一次不等式、一元二次不等式、指数不等式和对数不等式的解法等)。

3. 平均值不等式及其应用。

本章的难点是：

1. 不等式的证明。

2. 无理不等式的解法。

3. 平均值不等式的应用。

(三)范例分析

例 1. 证明不等式的基本性质：

(1)三歧性

对任意两个实数 a、b，下列三种关系有且只有一种成立：

$$a>b、a=b、a<b$$

(2)$a>b\Leftrightarrow b<a$

(3)传递性

$$a>b,\ b>c\Rightarrow a>c$$

(4)加法保序性

$$a>b\Rightarrow a+c>b+c$$

推论：$a>b,\ c>d\Rightarrow a+c>b+d$

(5)乘法保序性

$$a>b,\ c>0\Rightarrow ac>bc$$

$$a>b,\ c<0\Rightarrow ac<bc$$

推论 1：
$$\left.\begin{array}{l}a>b>0\\ c>d>0\end{array}\right\}\Rightarrow ac>bd$$

推论 2:　　$a>b>0 \Rightarrow a^n>b^n$

(6)$a>b>0 \Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{a}$

(7)三角不等式

$$|a|-|b| \leqslant |a+b| \leqslant |a|+|b|;$$
$$|a|-|b| \leqslant |a-b| \leqslant |a|+|b|。$$

分析与解答:

(1)考虑 $a-b$。因为 $R=R^+ \cup \{0\} \cup R^-$,即全体实数恰好由正实数集、负实数集和$\{0\}$组成,所以,$a-b$ 只能是正数、负数或 0 而且三种情形必居其一,即 $a>b$、$a<b$、$a=b$有且只有一种情形成立。

(2)$a-b \Leftrightarrow a-b \in R^+ \Leftrightarrow -(a-b)=b-a \in R^- \Leftrightarrow b<a$

(3)$\left.\begin{array}{l} a>b \Rightarrow a-b \in R^+ \\ b>c \Rightarrow b-c \in R^+ \end{array}\right\} \Rightarrow (a-b)+(b-c)=a-c \in R^+ \Rightarrow a>c$

(4)$a>b \Rightarrow a-b \in R^+ \Rightarrow (a+c)-(b+c) \in R^+ \Rightarrow a+c>b+c$

推论:

证法 1:$\left.\begin{array}{l} a>b \Rightarrow a+c>b+c \\ c>d \Rightarrow b+c>b+d \end{array}\right\} \Rightarrow a+c>b+d$(由传递性)。

证法 2:$\left.\begin{array}{l} a>b \Rightarrow a-b \in R^+ \\ c>d \Rightarrow c-d \in R^+ \end{array}\right\} \Rightarrow$

$(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d) \in R^+ \Rightarrow a+c>b+d$

$$\left.\begin{array}{r}(5)\,a>b\Rightarrow a-b\in\mathrm{R}^{+}\\ c>0\Rightarrow c\in\mathrm{R}^{+}\end{array}\right\}\Rightarrow(a-b)c=ac-bc\in\mathrm{R}^{+}$$

$\Rightarrow ac>bc$

推论 1:

$\left.\begin{array}{r}c>d>0\Rightarrow c>0\\ a>b\end{array}\right\}\Rightarrow ac>bc$,同理 $\left.\begin{array}{r}a>b>0\Rightarrow a>0\\ c>d\end{array}\right\}\Rightarrow$ $bc>bd$,由传递性,$ac>bd$。

推论 2:

证法 1:将推论 1 用于推论 2 即得。

证法 2:注意到 $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}$,而 $a>b>0$,即 $a-b\in\mathrm{R}^{+}$,$a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}\in\mathrm{R}^{+}$,所以 $(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})\in\mathrm{R}^{+}$,即 $a^n-b^n\in\mathrm{R}^{+}$,$a^n>b^n$。

(6)证法 1:假设$\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$或$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$,但$\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}\Rightarrow a<b$,$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}\Rightarrow a=b$,均与 $a>b$ 矛盾,所以$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$。

证法 2:注意到 $a-b=(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\cdots+\sqrt[n]{ab^{n-2}}+\sqrt[n]{b^{n-1}})$即得。

$$\left.\begin{array}{r}(7)\,-|a|\leqslant|a|\leqslant|a|\\ -|b|\leqslant b\leqslant|b|\end{array}\right\}\Rightarrow-(|a|+|b|)\leqslant a+b$$

$\leqslant|a|+|b|\Rightarrow|a+b|\leqslant|a|+|b|$

$|a|=|a+b-b|\leqslant|a+b|+|-b|\Rightarrow|a|-|b|\leqslant|a+b|$

由 $|a|-|-b|\leqslant|a+(-b)|\leqslant|a|+|-b|$ 可得 $|a|-|b|\leqslant|a-b|\leqslant|a|+|b|$

说明：

以上证明基于这样的事实，即

(1)全体实数构成的集合可以看成三个不相交子集的并：$R=R^+\cup\{0\}\cup R^-$。R^+中的元素称为正实数，R^-中的元素称为负实数。

(2)对任意 $x\in R^+$，都有 $-x\in R^-$。

(3)对任意 x、$y\in R^+$，都有

$$x+y\in R^+$$

$$xy\in R^+$$

实数之所以可以比较大小，正是由于实数有以上性质。将来，同学们如果有兴趣的话，可以看一看复数是不是也有这样的性质，由此可以从根本上理解复数为什么一般不能比较大小。

性质(7)之所以称为三角不等式，是因为在稍广一点的背景之下可以将这个不等式理解为"三角形两边之和大于第三边，两边之差小于第三边"。

例 2. 判断下列命题的正误，并说明理由：

(1)$a>b\Rightarrow ac^2>bc^2$；

(2)$a>b>c\Rightarrow ab>ac$；

(3)$a^2>b^2, ab>0\Rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；

(4)$\frac{a}{c^2}>\frac{b}{c^2}\Rightarrow a>b$；

(5)$a>b$、$c>d\Rightarrow a-c>b-d$；

(6)$a>b$、$c>d\Rightarrow ac>bd$。

分析与解答：

(1)不对。因为 $c=0$ 时，$ac^2=bc^2=0$。

(2)不对。因为若取 $a=0, b=-1, c=-2$，则 $ab=ac=0$。也可以取 $a=-1, b=-2, c=-3$，则 $ab=2, ac=3$，但 $2<3$。

(3)不对。因为若取 $a=-2, b=-1$，则 $a^2=4>1=b^2, ab=2>0$，但 $\frac{1}{a}=-\frac{1}{2}>-1=\frac{1}{b}$。

(4)正确。因为由 $\frac{a}{c^2}>\frac{b}{c^2}$ 知 $c^2>0$，于是，$c^2\frac{a}{c^2}>c^2\frac{b}{c^2}$ 即 $a>b$。

(5)不对。因为若 $a=2, b=1, c=1, d=-3$，则 $a>b, c>d$，但 $a-c=1<b-d=4$。

(6)不对。因为若 $a=2, b=1, c=-2, d=-3$，则 $a>b, c>d$，但 $ac=-4<-3=bd$。

说明：

(1)可以改成以下正确形式：$a>b, c\neq 0\Rightarrow ac^2>bc^2$。

(2)可以改成以下正确形式：$a>b>c>0>\Rightarrow ab>ac$。

(3)可以改成以下正确形式：

$$a^2>b^2, a>0, b>0\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}\text{或}$$

$$a^2>b^2, a<0, b<0\Rightarrow\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$$

例 3. 求证：$a^2+b^2+2\geqslant 2(a+b)$。

分析与解答：

作差
$$\begin{aligned}&(a^2+b^2+2)-2(a+b)\\=&(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)\\=&(a-1)^2+(b^2-1)\geqslant 0\end{aligned}$$

$\therefore$
$$a^2+b^2+2\geqslant 2(a+b)$$