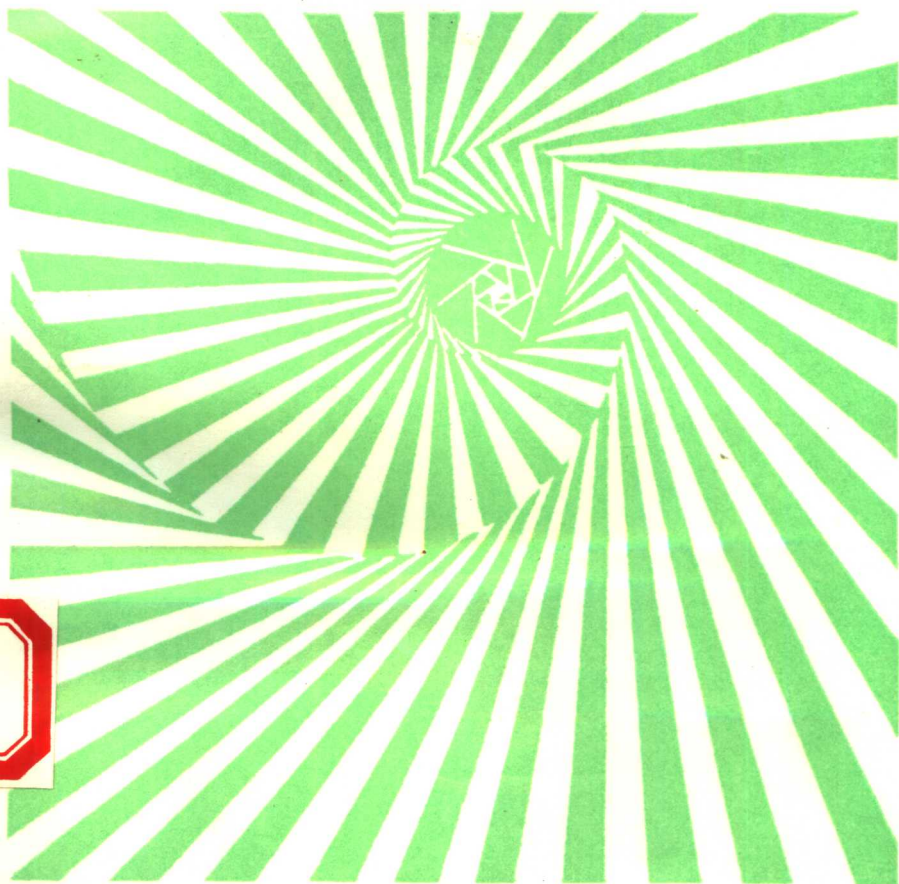


高等数学学习指南

· 上 册 ·

石福庆 陈 凯 钱辉镜 编著



中国标准出版社

高等数学学习指南

上册

石福庆 陈 凯 钱辉镜 编著

中国标准出版社

1996年 北京

/

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指南 上册/石福庆等编著. --北京:中国标准出版社, 1996. 9

ISBN 7-5066-1247-X

I. 高… II. 石… III. 高等数学 教学参考资料 IV. 013-62

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 06092 号

中国标准出版社出版

北京复兴门外三里河北街16号

邮政编码 100045

电话 68522112

永清县第一胶印厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

版权专有 不得翻印

*

开本 850×1168 1/16 印张 13 $\frac{5}{8}$ 字数 387 千字

1996 年 8 月第一版 1996 年 8 月第一次印刷

印数 1—2 500

定价 26.00 元

前 言

目前除了普通高校大学生外,还有电大、职大学生和许多自学者都在学习高等数学。我们结合在清华大学、中央电大等高等学校讲授、辅导高等数学课程中讲课、上辅导课、学生作业、平时答疑和考试等各个教学环节,深入研究教学方法,编写了《高等数学学习指南》,希望能对学生学习本课程有所帮助。本书分上、下两册。上册包括一元函数微积分学、多元微积分学,下册包括级数、微分方程以及空间解析几何与矢量代数等内容,共 15 章,每章按下述四个部分编写:

一、内容提要 这一部分说明本章学习哪些内容,给出了基本概念的定义、重要定理以及常用公式,同时也说明了它们之间的关系。

二、要求 这一部分具体明确对本章内容应掌握的程度。

三、典型例题分析 这一部分是根据教学大纲的要求,我们选择了大量的例题,由浅入深,由易到难,以例题的形式体现每部分的基本内容及具体要求。例题包括概念题、计算题以及证明和应用题,同时也选择了某些容易弄错的概念和解题过程中在方法上常见的错误,通过正反两个方面对例题的剖析,辅导学生掌握基本概念,提高分析问题和解决问题的能力。

四、思考题与习题 在每章最后列出了一些概

念和计算方面的问题,供学生在复习总结时自我检查使用。

为了使本书能更符合读者的需要,对读者有更多的启发和有益的指导,在编写前我们邀请了部分有经验的教师座谈,听取了他们的意见,同时也征求了部分电大、职大学生和自学青年的意见。本书编写过程中得到了许多教师的帮助,在此谨向他们表示衷心的感谢。

由于作者水平有限,书中错误在所难免,请读者批评指正。

编 者

1996年1月8日

于北京

目 录

第一章 函数及其图形	(1)
一、内容提要	(1)
二、要求	(11)
三、典型例题分析	(12)
四、思考题与习题	(35)
第二章 数列的极限及函数的极限	(41)
一、内容提要	(41)
二、要求	(46)
三、典型例题分析	(47)
四、思考题与习题	(96)
第三章 函数的连续性	(101)
一、内容提要	(101)
二、要求	(103)
三、典型例题分析	(104)
四、思考题与习题	(115)
第四章 导数及微分	(117)
一、内容提要	(117)
二、要求	(122)
三、典型例题分析	(123)
四、思考题与习题	(161)
第五章 中值定理	(165)
一、内容提要	(165)
二、要求	(168)
三、典型例题分析	(169)
四、思考题与习题	(204)
第六章 导数的应用	(206)

一、内容提要·····	(206)
二、要求·····	(211)
三、典型例题分析·····	(211)
四、思考题与习题·····	(249)
第七章 不定积分·····	(252)
一、内容提要·····	(252)
二、要求·····	(258)
三、典型例题分析·····	(259)
四、思考题与习题·····	(316)
第八章 定积分·····	(318)
一、内容提要·····	(318)
二、要求·····	(323)
三、典型例题分析·····	(323)
四、思考题与习题·····	(378)
第九章 定积分的应用·····	(381)
一、内容提要·····	(381)
二、要求·····	(385)
三、典型例题分析·····	(386)
四、思考题与习题·····	(411)
思考题与习题答案或提示·····	(414)

第一章 函数及其图形

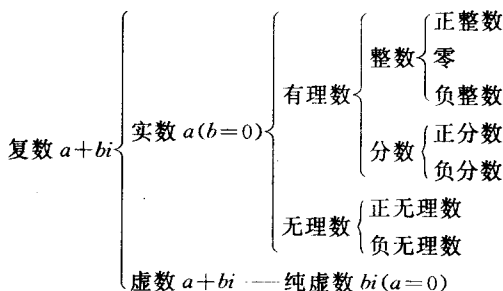
函数是数学分析研究的对象,它是高等数学中最重要的概念之一。在这里将结合一些典型例题讨论函数的概念、符号、性质以及函数作图的方法。本章的重点是搞清函数的概念、初等函数和基本初等函数的定义域,函数图形及其简单性质。

一、内 容 提 要

(一) 实数、区间和绝对值

1. 实数

数是数学中一个重要的对象,也是数学分析中研究的主要对象。到目前为止,我们所学过的数可归类为:



实数是有理数和无理数的总称。

一般来讲,在数学分析中研究的数是实数。

实数轴是具有方向、原点和单位长度的有向直线。任何一个实数均可用实数轴上的一个点来表示。反过来,实数轴上任何一点都表示一个实数。这就是点和数的一一对应关系。

实数有两个重要性质:

I. 有理数在实数中的稠密性。即任何两个不同的有理数之间存在着无穷个有理数;

II. 实数的连续性。即实数与数轴上的点一一对应而没有空隙。

2. 区间

在实际中,由于要在某个实数范围内考虑问题,因而引进了区间的概念。

闭区间: $[a, b]$ 是指介于实数 a 与 b 之间并包括两个端点在内的一切实数的集合。除了用符号 $[a, b]$ 表示外,还可用不等式 $a \leq x \leq b$ 或在数轴上表示。

开区间: (a, b) 是指介于 a 与 b 之间而不包括两个端点在内的一切实数的集合。除用符号 (a, b) 表示外,还可用不等式 $a < x < b$ 或在数轴上表示。

半开区间: $[a, b)$ 是指介于 a 与 b 之间并仅包括一个端点 a 在内的一切实数的集合。除用符号 $[a, b)$ 表示外,还可用不等式 $a \leq x < b$ 或在数轴上表示。

值得注意的是,“ $-\infty$ ”和“ $+\infty$ ”是两个记号而不是数,我们用 $(-\infty, +\infty)$ 表示整个实数轴。

3. 绝对值

I. 定义 任意实数 a 的绝对值用符号“ $|a|$ ”表示,定义为

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

由定义可知,任何一个实数 a 的绝对值非负。

II. 绝对值的运算

1) $|ab| = |a| \cdot |b|;$

2) $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}.$

III. 有关绝对值的不等式

1) 若 $a, b, \dots, k$ 为任意实数, 则

$$|a \pm b| \leq |a| + |b|,$$

$$|a \pm b \pm \dots \pm k| \leq |a| + |b| + \dots + |k|.$$

2) 若 a, b 为任意实数, 则

$$|a| - |b| \leq |a - b| \leq |a| + |b|.$$

3) 若 $|a| \leq b, b > 0$, 则 $-b \leq a \leq b$. 特别有 $-|a| \leq a \leq |a|$.

4) 若 $|a| \geq b, b > 0$, 则 $a \geq b$ 或 $a \leq -b$.

(二) 常量、变量和函数的概念

1. 常量和变量

在某一过程中, 保持一定数值的量叫常量, 可以取不同数值的量叫变量。

注意, 有的量在这一过程中是变化的而在另一过程中是不变的; 或者有的量在某个过程中虽是变化的, 但其变化极小, 这时可将它视作常量。因此常量和变量的概念是相对的而不是绝对的。

2. 函数

(1) 函数的定义 设在某个过程中, 有两个变量 x 和 y , 如果对于变化范围内的每一个 x 值, y 按一定的规则总有一个或多个确定的值与之对应, 那么 y 是 x 的函数, 记作 $y = f(x)$ 。并称 x 为自变量, y 为因变量。

对于函数的概念要抓住以下三点:

I) 自变量的变化范围即函数的定义域;

II) 因变量与自变量的对应关系;

III) 因变量的取值范围即函数的值域。

(2) 定义域

使函数有定义的所有自变量取值的集合叫函数的定义域。

(3) 函数的表示方法

I) 解析法

用一个解析表达式(如 $y=x^2+1$)来表示两个变量之间的关系。这种方法便于理论上研究,但不直观。

II) 图示法

借助于坐标系,将变量之间的关系用图形来描绘。其优点是直观,但精确度不够。

III) 列表法

用一表格表示变量之间的关系。其优点是可以按所要求的精确度列表并便于查阅,但不直观。

在实际中,上述三种方法经常可结合起来应用。

(4) 函数的符号

我们通常用 f, g, φ 等字母来表示变量 x 与 y 之间的对应关系。例如 $y=f(x)$ 。

(三) 函数的性质

1. 函数的单值性与多值性

函数的自变量在其定义域内任取一个值时,若仅有一个函数值与之对应,则称为单值函数;若有两个或两个以上的函数值与之对应,则称为多值函数。

2. 函数的奇偶性

若 $f(-x)=f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数;若 $f(-x)=-f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数。

偶函数的图形对称于 y 轴, 奇函数的图形对称于坐标原点。

3. 函数的单调性

若函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内随 x 增加而增加, 即设 x_1, x_2 是 (a, b) 内任意两点, 而 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数在区间 (a, b) 内为单调增加。

若函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内随 x 增加而减少, 即设 x_1, x_2 是 (a, b) 内任意两点, 而 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数在区间 (a, b) 内为单调减少。

同样可以在无限区间上定义单调增加(或减少)的函数。

在整个区间上为单调增加(或减少)的函数称为单调函数。

4. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 在 $\mathcal{R}$ 上有定义($\mathcal{R}$ 可以是函数 $f(x)$ 的整个定义域,但也可以只是定义域的一部分)。如果存在一个正数 M ,使得当 x 取 $\mathcal{R}$ 内的任一值时,对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)| \leq M,$$

则函数 $f(x)$ 在 $\mathcal{R}$ 内是有界的。若这样的 M 不存在,就说 $f(x)$ 在 $\mathcal{R}$ 内是无界的。

5. 函数的周期性

若对函数 $y=f(x)$ 存在一个正数 T ,使得 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 是以 T (T 是满足这种关系的最小正数)为周期的周期函数。

(四) 反函数

设已给 y 是 x 的函数 $y=f(x)$ 。若将 y 作为自变量, x 当作函数,所确定的函数 $x=\varphi(y)$ 叫做函数 $f(x)$ 的反函数。而 $f(x)$ 叫做直接函数。

(五) 显函数与隐函数

对于反映函数与自变量关系的表达式,若已解出因变量为自变量的解析表达式,称为显函数;若未能解出因变量而只能由方程 $F(x, y)=0$ 表示 x, y 之间的关系,这种关系叫做隐函数。

例如函数 $y=\sqrt{R^2-x^2}$ 是显函数;而 $x^2+y^2=R^2$ 是隐函数。

(六) 初等函数

1. 基本初等函数

基本初等函数包括:常数函数 $y=C$ 、幂函数 $y=x^a$ (a 是实数)、指数函数 $y=a^x$ ($a>0, a\neq 1$)、对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0, a\neq 1$)、三角函数、反三角函数。

为了查阅方便,把初等函数的图形和简单性质列表如下页。

2. 复合函数

设 y 是 z 的函数 $y=f(z)$, 而 z 又是 x 的函数: $z=\varphi(x)$ 。

设 $\mathcal{X}$ 表示 $\varphi(x)$ 的定义域或其一部分。若对于在 $\mathcal{X}$ 上取值时对应的 z 值, 函数 $y=f(z)$ 是有定义的, 则 y 成为 x 的函数, 记为 $y=f[\varphi(x)]$ 。这个函数叫做由函数 $y=f(z)$ 及 $z=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数。其定义域为 $\mathcal{X}$ 。 z 叫中间变量。

例如 $y=\sin z, z=x^2$, 则复合函数为 $y=\sin x^2$ 。

3. 初等函数

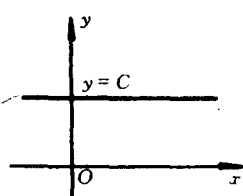
初等函数是能用一个分析式子表示的函数, 而这一分析式是由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算(加、减、乘、除)以及有限次的复合步骤所形成的。

例如双曲函数 $y=\operatorname{sh} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ 是初等函数。而不能用一个分析式子表示的函数

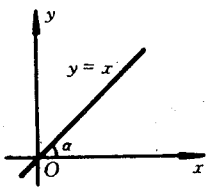
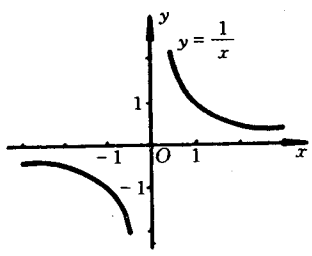
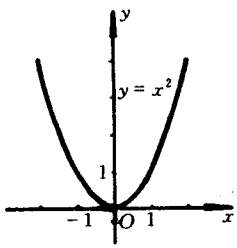
$$y = \begin{cases} 2-x, & x < 2, \\ x-2, & x \geq 2 \end{cases}$$

就不是初等函数。

表 1-1

名称	表达式	图 形	简单性质
常数函数	$y=C$		$-\infty < x < +\infty$

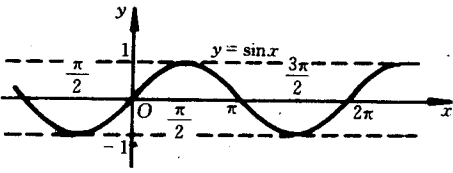
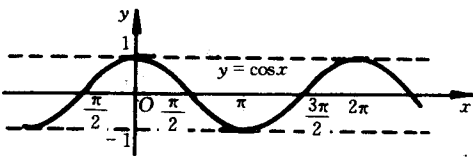
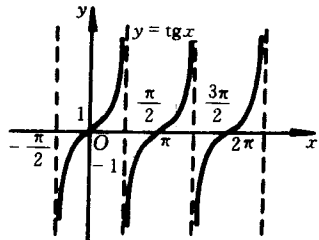
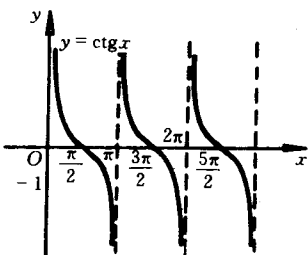
续表 1-1

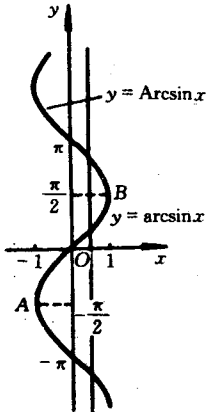
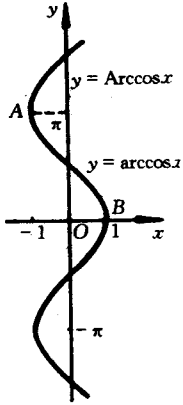
名称	表达式	图 形	简单性质
幂 函 数	$y=x$		$-\infty < x < +\infty$
	$y=1/x$		$-\infty < x < 0$ 及 $0 < x < +\infty$ 图形关于原点 对称
	$X=y^2$		$-\infty < x < +\infty$ 图形关于 y 轴 对称

续表 1-1

名称	表达式	图 形	简单性质
幂函数	$y=x^a$		$0 < x < +\infty$
指数函数	$y=e^x$ $y=e^{-x}$		$-\infty < x < +\infty$ 过(0,1)点 e^x 随 x 增大而急速增大, e^{-x} 随 x 增大而急剧趋向于 0
对数函数	$y=\ln x$		$0 < x < +\infty$ 过(0,1)点 $\ln x$ 随 x 增大而缓慢地趋于无穷

续表 1-1

名称	表达式	图 形	简单性质
三角函数	$y = \sin x$		$-\infty < x < +\infty$ 图形关于原点对称 以 2π 为周期
	$y = \cos x$		$-\infty < x < +\infty$ 图形关于 y 轴对称 以 2π 为周期
三角函数	$y = \operatorname{tg} x$		$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 图形关于原点对称 以 π 为周期
	$y = \operatorname{ctg} x$		$x \neq k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 图形关于原点对称 以 π 为周期

名称	表达式	图 形	简单性质
反三角函数	$y = \text{Arcsin} x$		$-1 \leq x \leq 1$ $y = \text{Arcsin} x$ 的主值为 $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ 记作 $\arcsin x$ 图形关于原点对称
	$y = \text{Arccos} x$		$-1 \leq x \leq 1$ $y = \text{Arccos} x$ 的主值为 $0 \leq y \leq \pi$ 记作 $\arccos x$