新课程

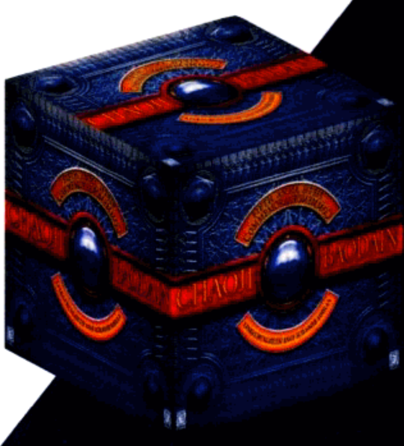
解题方法

CHAOJIBAODIAN

超级宝典

掌握 一种 解题方法

比做 一百道 题更重要



北师大版

九年级 数学

山西教育出版社

出版宣言

我们的口号：掌握1种解题方法比做100道题更重要！

方法是什么？

方法是攀登顶峰时你选择的最佳路径；方法是茫茫大海上引你前行的点点白帆；方法是身陷困境后突然伸出的一只援手；方法是无边沙漠中远处传来的声声驼铃；方法是皓首穷经后的会心一笑；方法是苦思冥想中的恍然大悟；方法是百思千转而获得的关键“巧解”；方法是眉头紧皱涌上心间的锦囊“妙计”……

方法是举一反三，以一当十；方法是以勤补拙，触类旁通；方法是科学高效，事半功倍；方法是以平常的付出，考出能够上北大清华的成绩。方法是你做过三道同类题后的驾轻就熟；方法是你遇到似曾相识时的推己及彼；方法是你拨开杂芜透过现象看到的本质；方法是你题海泛舟得到秘诀和启迪的片刻轻松……

正是基于这样的认识，我们在

全国范围内约请一批富有经验的知名学科老师，从现有教材尤其是新课标教材所呈现的理念内容，知识体系中，从全国数以百计的各类考试状元、竞赛获奖者的学习经验和总结提炼中，从每位老师各自数十年的教学实践和体会感受中，提纯归纳、总结升华、探索规律、凝炼方法，精心编写了这一套“新课程解题方法超级宝典”系列丛书，意在为广大中小学生提供最优质的材料、最精当的训练、最科学的思路、最实用的方法，意在使你付出一倍的汗水，取得十倍的喜悦，花同样的心血，收获骄人的成绩。

这是我们的一种理想，一种孜孜不倦的追求。究竟能实现多少，还有待广大师生试用检验。**你的建议和意见（书末附有专纸奉候）**，我们将视为珍宝，并将在以后的修订中进一步吸收消化，完善提高。你的关注和参与，将会给我们带来新的希望和动力。在你成长求知的过程中，愿我们的这本书能成为你学习路上的好伙伴，在你实现人生理想的奋斗中，愿我们的这本书能为你留下一段值得回味的美好记忆。

编委会

《新课程解题方法超级宝典》系列图书

读者编者作者交流互动平台

非常感谢您选择和使用《新课程解题方法超级宝典》系列图书，为了使本书更加完善，为了使本书能够成为您学习中更加得力的助手，为了能更加周到地为您服务，请将您阅读本书后的感受、意见、想法、建议尽快寄给我们，我们将在下一版的编写出版工作中做进一步的改进，让本书真正成为您学习中的良师益友。

1. 您是怎样得到本书的____：
A. 自己购买　B. 同学介绍　C. 老师推荐　D. 家人代购

2. 您认为本书的优点在哪里？

3. 您认为本书不足之处是什么？

4. 您从本书中学到了哪些有用的方法？还需要做哪些补充？

5. 在数、理、化的学习中你最需要哪一类的书？

您的反馈是我们的期待，您的建议是我们的宝藏，您的参与对我们很重要！您可以通过以下方式和我们取得联系：

1. 电子邮件：sxjyzjz@yahoo.com
2. 写信：山西省太原市水西门街庙前小区 8 号楼
   收信人：《新课程解题方法超级宝典》编辑室
   邮编：030002
3. 电话：0351—4729831

九年级 上册

目录

九年级　下册

目录

第一章　证明(二)

整体感悟

本章主要包括：等腰三角形(等边三角形)的性质与判定定理，直角三角形全等的条件，勾股定理及其逆定理，线段垂直平分线的性质及其判定定理，角平分线的性质及其判定定理.

本章以全等三角形的四个公理为基础，严格证明上述内容通过直观方法探索过的有关结论，在探索证明的思路和方法的过程中，掌握证明的基本要求，正确地表达推理的全过程.

在本章的学习过程中，我们还应注意自己在思考问题的方法方面的训练和发展，体会在分析和解决问题的过程中所蕴涵的数学思想方法. 比如，将未知问题转化成已知问题的转化思想、将特殊结论进行推广和一般化等等.

1.1　你能证明它们吗

典题精析

例1　已知：如图 1-1-1，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，D、E 分别是 AC、AB 的中点.

求证：$BD=CE$.

思维互动

思路 >> 证明 $BD=CE$，可证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$(SAS)或者 $\triangle BDC \cong \triangle CEB$(SAS).

解答 >> **证法一**：在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACE$ 中，

$\because$　$AB=AC$(已知)，$AC=2AD$，$AB=2AE$(中点的定义).

$\therefore$　$AD=AE$(等量代换).

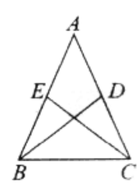


图 1-1-1

又∵ $\angle A=\angle A$(公共角),

∴ $\triangle ABD\cong\triangle ACE$(SAS),

∴ $BD=CE$(全等三角形的对应边相等).

证法二:在$\triangle BDC$与$\triangle CEB$中,

∵ $AB=AC$(已知),$AC=2CD$,$AB=2BE$(中点的定义).

∴ $CD=BE$(等量代换),

又∵ $\angle ABC=\angle ACB$(等边对等角),$BC=BC$(公共边),

∴ $\triangle BDC\cong\triangle CEB$(SAS).

∴ $BD=CE$(全等三角形的对应边相等).

探究评析

1. 全等三角形是证明线段或角相等的常用方法.利用全等三角形证明线段(角)相等的一般方法和步骤是:①找到以待证的线段(角)为边(内角)的两个三角形;②证明这两个三角形全等;③由全等三角形的性质得出所要证的线段(角)相等.在寻找三角形全等条件时,除了题目中给出的已知条件外,若图中有公共角、公共边或对顶角都可作为已知条件使用.

2. 本题反映了等腰三角形是轴对称图形的性质,可推广到一般化.即在等腰三角形ABC中,

如果$AD=\frac{1}{2}AC$,$AE=\frac{1}{2}AB$,那么$BD=CE$.

如果$AD=\frac{1}{3}AC$,$AE=\frac{1}{3}AB$,那么$BD=CE$.

……

如果$AD=\frac{1}{n}AC$,$AE=\frac{1}{n}AB$,那么$BD=CE$.

3. 题目中BD、CE是中线,若变换为角平分线时,仍有$BD=CE$成立,并可推广到一般.在图1-1-1的等腰三角形ABC中,如果$\angle ABD=\frac{1}{2}\angle ABC$,$\angle ACE=\frac{1}{2}\angle ACB$,那么$BD=CE$.

如果$\angle ABD=\frac{1}{3}\angle ABC$,$\angle ACE=\frac{1}{3}\angle ACB$,那么$BD=CE$.

如果$\angle ABD=\frac{1}{n}\angle ABC$,$\angle ACE=\frac{1}{n}\angle ACB$,那么$BD=CE$.

4. 题目中BD、CE是高时,结论仍然成立.这些结论请你自己证明.

例2 如图1-1-2,在$\triangle ABC$中,$AB=AC$,D是BC边上的一点,且点D到两腰AB、AC的距离分别是DE、DF,当点D在何位置时,有$DE=DF$,并证明你的结论.

思维互动

思路>>根据等腰三角形的轴对称性,点D在BC的中点时,有$DE=DF$.要证明$DE=$

DF,可证明$\triangle BDE\cong\triangle CDF$(AAS). 或者连接$AD$,利用等腰三角形的"三线合一",证明$\triangle AED\cong\triangle AFD$(AAS).

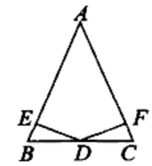


图1-1-2

解答>>当点D为BC的中点时,$DE=DF$.

证法一:$\because$ $AB=AC$,$\therefore$ $\angle B=\angle C$(等边对等角).

$\because$ D为BC的中点,$\therefore$ $BD=CD$.

$\because$ $DE\perp AB$,$DF\perp AC$,$\therefore$ $\angle BED=\angle CFD=90°$.

在$\triangle BDE$和$\triangle CDF$中,

$\because$ $\angle B=\angle C$,$\angle BED=\angle CFD$,$BD=CD$,$\therefore$ $\triangle BDE\cong\triangle CDF$(AAS),

$\therefore$ $DE=DF$(全等三角形的对应边相等).

证法二:连接AD(如图1-1-2(a)).

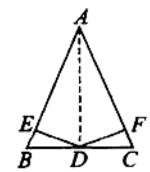


图1-1-2(a)

$\because$ $AB=AC$,D是BC的中点,

$\therefore$ $\angle BAD=\angle CAD$(等腰三角形底边上的中线与顶角平分线重合).

$\because$ $DE\perp AB$,$DF\perp AC$,$\therefore$ $\angle AED=\angle AFD=90°$.

在$\triangle ADE$和$\triangle ADF$中,

$\because$ $\angle BAD=\angle CAD$,$\angle AED=\angle AFD$,$AD=AD$,

$\therefore$ $\triangle ADE\cong\triangle ADF$(AAS),

$\therefore$ $DE=DF$(全等三角形的对应边相等).

探究评析

1. 这是一道动点位置探究题,利用等腰三角形的轴对称性可确定其位置. 另外当D为BC上任意一点时,存在$DE+DF$为一定值的结论,即$DE+DF$等于腰上的高. 这个结论后面将给予证明.

2. 在等腰三角形中常有选择"三线(底边上的高、底边上的中线、顶角平分线)"中的"一线"作辅助线.

例3 把一张对边平行的纸条像图1-1-3中那样折叠,重合部分是一个等腰三角形吗? 为什么?

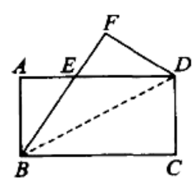


图1-1-3

思维互动

思路>>问题实质上是证明$\triangle BDE$为等腰三角形. 由折叠知$\angle CBD=\angle EBD$. 又$AD//BC$,得$\angle EDB=\angle CBD$,可证明$\angle EBD=\angle EDB$,利用"等角对等边"证明结论.

解答>>把一张对边平行的纸条像图1-1-3中那样折叠,重合部分是一个等腰三角形.

证明:如图所示,由折叠知$\angle CBD=\angle EBD$.

$\because$ $AD//BC$,$\therefore$ $\angle EDB=\angle CBD$,

∴ $\angle EBD = \angle EDB$，∴ $EB = ED$（等角对等边），

∴ $\triangle BDE$ 为等腰三角形.

探究评析

1. 判断三角形是等腰三角形的常用方法有三种：(1)可以用定义来判断，即只要证明这个三角形有两条边相等.(2)证明这个三角形有两个角相等.(3)一个角的平分线也是它对边的中线(高)，即"三线中的两线合一".

2. 将实际问题抽象化(将实际问题抽象成数学问题)，用数学语言(几何语言)表达说理过程(证明)，是我们学习证明应具备的基本能力.

例4 已知：如图1-1-4，在等边三角形ABC的三边AB、BC、CA上截取$AD = BE = CF$，试证明$\triangle DEF$是等边三角形.

思维互动

思路>>题目中已知边的相等关系多，可联想用三边相等的方法来证明.即要证明$\triangle DEF$是等边三角形，可证$DF = DE = EF$，由已知易得$\triangle AFD \cong \triangle BDE \cong \triangle CEF$(SAS).

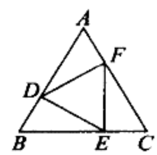


图1-1-4

解答>>**证明**：∵ $\triangle ABC$是等边三角形，

∴ $AB = AC = BC$，$\angle A = \angle B = \angle C = 60°$.

∵ $AD = BE = CF$， ∴ $AF = BD = CE$，

∴ $\triangle AFD \cong \triangle BDE \cong \triangle CEF$(SAS)，

∴ $DF = DE = EF$(全等三角形的对应边相等)，∴ $\triangle DEF$是等边三角形.

探究评析

1. 判断三角形是等边三角形常用方法有三种：(1)三边相等的三角形是等边三角形；(2)有一个角是60°的等腰三角形是等边三角形；(3)有三个角相等的三角形是等边三角形.

2. 在证明方法的选择上，要挖掘题目条件，联想基本的判定方法，选择较为简捷的证明.如若将上面命题条件改为"在等边三角形ABC的三边上，分别取点D、E、F，使$DE \perp AB$，$EF \perp BC$，$DF \perp AC$."如何证明$\triangle DEF$是等边三角形呢？如果同样选择用全等三角形来证明，相比较而言太繁琐.题中所给的角的关系多，可联想用"三个角都是60°的三角形是等边三角形"来证明，即证明"$\angle FDE = \angle DEF = \angle EFD = 60°$".请你写出此变式题目的证明过程.

例5 如图1-1-5，在$\triangle ABC$中，D、E分别是AC、AB上的点，BD与CE交于点O.给出下列四个条件：①$\angle EBO = \angle DCO$；②$\angle BEO = \angle CDO$；③$BE = CD$；④$OB = OC$.

(1)上述四个条件中，哪两个条件可判定$\triangle ABC$是等腰三角形(用序号写出所有情况)？

(2)选择第(1)小题中的一种情形，证明$\triangle ABC$是等腰三角形.

思维互动

思路>>要想证明$\triangle ABC$是等腰三角形,我们可构造两个全等三角形,证明$AB=AC$、也可以利用等角对等边的判定定理.题目要写出所有情况,这要求我们能不重不漏地进行判断.所有的组合应是:①②;①③;①④;②③;②④;③④.但不是所有的都可以证明$\triangle ABC$是等腰三角形,需要逐一排查.

解答>>(1)①③;①④;②③;②④.

(2)选择①③,证明$\triangle ABC$是等腰三角形.

证明:$\because$ $\angle EBO=\angle DCO$,$\angle BOE=\angle COD$,$BE=CD$,

$\therefore$ $\triangle BOE\cong\triangle COD$, $\therefore$ $OE=OD$,$OB=OC$,

$\therefore$ $OE+OC=OD+OB$,即$BD=CE$.

在$\triangle BCE$和$\triangle CBD$中,

$BC=BC$,$BE=CD$,$BD=CE$,

$\therefore$ $\triangle BCE\cong\triangle CBD$(SSS), $\therefore$ $\angle ABC=\angle ACB$,

$\therefore$ $\triangle ABC$是等腰三角形.

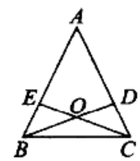


图1-1-5

探究评析

1. 题目中所给4个条件均在$\triangle BOE$与$\triangle COD$中,由此我们可以寻找条件证明$\triangle BOE\cong\triangle COD$.通过三角形全等,得出有关的线段相等,进一步通过三角形全等证明$\angle ABC=\angle ACB$或$AB=AC$,从而证明结论.

2. 题目的解答方式要求先判断后选择,答案不唯一,具有选择性,思维能力要求高,证明思路复杂,是近年来的热门考查方式.

例6 已知:如图1-1-6,$\triangle ABC$是等边三角形,BD是角平分线,延长BC到E,使$CE=CD$.

求证:$DB=DE$.

思维互动

思路>>要证$DB=DE$,可转化为证$\angle DBE=\angle DEB$.$\triangle ABC$是等边三角形,BD是角平分线,$\angle CBD=30°$,$\angle BCD=60°$.又$\angle BCD=\angle CDE+\angle CED$,$DC=CE$,$\angle CDE=\angle CED$,可得$\angle BED=\angle DBE=30°$,从而有$BD=DE$.

解答>>**证明**:$\because$ $\triangle ABC$是等边三角形,

$\therefore$ $\angle BCD=\angle CBA=60°$.

$\because$ BD是角平分线, $\therefore$ $\angle CBD=30°$.

$\because$ $DC=CE$, $\therefore$ $\angle CDE=\angle CED$(等边对等角).

$\because$ $\angle BCD=\angle CDE+\angle CED$(三角形的一个外角等于不相邻的两个内角的和),

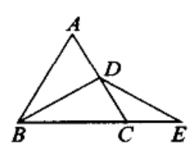


图1-1-6

∴ $\angle BED=\angle DBE=30°$.

∴ $BD=DE$(等角对等边).

探究评析

1. 若将题中条件“BD 是角平分线”改为“$\triangle ABC$ 的中线或高”,结论仍然成立.

2. 此题综合运用了等边三角形的有关性质,证明两线段相等除了三角形全等方法外,还可用“等角对等边”的方法.

自主演练

一、选一选,慧眼识金

1. 如图 1,已知 $\angle A=15°$,$AB=BC=CD=DE=EF$,则 $\angle DEF$ 为 ( )

A. 60° B. 70° C. 75° D. 90°

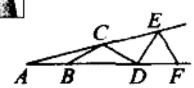


图 1

2. 如图 2,在 $\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,$\angle A=36°$,BD 与 CE 分别是 $\angle ABC$ 与 $\angle ACB$ 的平分线,则图中等腰三角形的个数为 ( )

A. 12 B. 8 C. 9 D. 10

3. 如果直角三角形的一个锐角为 30°,而斜边与较短的直角边之和为 18cm,那么斜边长为 ( )

A. 6cm B. 9cm C. 12cm D. 15cm

图 2

二、填一填,画龙点睛

4. 等腰三角形的三个内角与顶角的一个外角之和等于 260°,则这个等腰三角形的底角是________°.

5. 把两个一样大的含 30°角的直角三角板按图 3 的方式拼在一起,其中 AC 平分 $\angle BAF$,AD 平分 $\angle EAF$,请写出图中所有的等腰三角形:________________________.

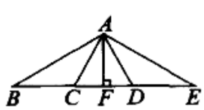


图 3

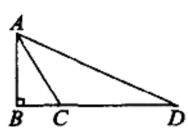


图 4

6. 如图 4,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle B=90°$,$AC=DC$,$\angle D=15°$,$AB=18$cm,则 CD 的长为________cm.

三、做一做,马到成功

7. 如图 5,在等腰三角形 ABC 中,$AB=AC$,D、E 分别是 AC、AB 上的点,BD、

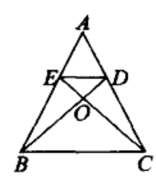


图 5

CE 相交于点 O,连接 DE.

(1)增加一个条件,使得 $AE=AD$,并说明理由;

(2)在(1)中所增加的条件下,找出两个等腰三角形和两对全等三角形.

8. 如图 6,$AB=AE$,$\angle B=\angle E$,$BC=ED$,点 F 是 CD 的中点.

(1)求证:$AF\perp CD$;

(2)连接 BE,AC,AD,标出相应的交点,你能从图中发现什么新的结论?请写出三个,并说明理由.

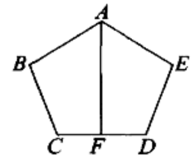


图 6

9. 在一次数学活动课上,小明想检验墙上钉的一根木条是否水平,他制作了一个简易三角架测平仪. 如图 7,在△ ABC 中,$AB=AC$,在 BC 的中点 D 挂一个重锤,自然下垂. 小明将 BC 边与木条重合,观察此时重锤是否通过点 A. 如果点 A 恰好在重锤线上,那么这根木条是水平的. 你能解释其中的道理吗?

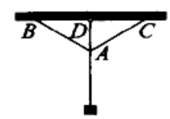


图 7

10. 如图 8,在△ ABC 中,$\angle C=90°$,$\angle B=30°$,$\angle A$ 的平分线交 BC 于 D,$DC=3\text{cm}$,求 BC 的长.

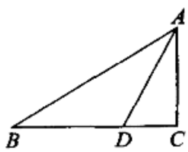


图 8

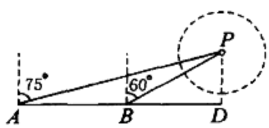


图 9

11. 如图 9,一轮船由西向东航行,在 A 处测得小岛 P 的方位是北偏东 75°,又航行 6 海里后,在 B 处测得小岛 P 的方位是北偏东 60°. 若小岛周围 3.5 海里内有暗礁,问:该船一直向东航行有无触礁危险?

12. 如图 10,P 是线段 AB 上一点,△ APC、△ BPD 是等边三角形.

(1)请你判断 AD 与 BC 相等吗? 并说明理由;

(2)求证:△ PMN 是等边三角形.

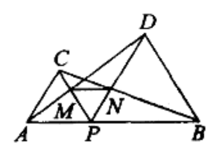


图 10

参考答案

一、1. A　2. A. 图中所有的三角形都是等腰三角形.　3. C

二、4. 40°　5. △ ABE、△ ABC、△ ADE、△ ACD　6. 36

三、7. 提示:(1)答案不唯一. 如:添加条件为 $DE\parallel BC$.

证明:$\because\ AB=AC$,　$\therefore\ \angle ABC=\angle ACB$.

$\because\ DE\parallel BC$,　$\therefore\ \angle AED=\angle ABC$,$\angle ADE=\angle ACB$.

∴ $\angle AED=\angle ADE$,

∴ $AE=AD$.

(2) $DE/\!/BC$ 时,等腰三角形有:$\triangle AED$,$\triangle ABC$,$\triangle BOC$,$\triangle EOD$.

全等三角形有:$\triangle ADB\cong\triangle AEC$,$\triangle BDC\cong\triangle CEB$,$\triangle BEO\cong\triangle CDO$,$\triangle BDE\cong\triangle CED$.

8. 提示:(1)连接 AC、AD. 由 $\triangle ABC\cong\triangle AED$,得 $AC=AD$,利用“三线合一”证明 $AF\perp CD$.

(2)答案不唯一. 如:$\triangle ABE$ 是等腰三角形;$AF\perp BE$;五边形 $ABCDE$ 是以直线 AF 为对称轴的图形.

9. 提示:利用等腰三角形“三线合一”与重锤自然下垂时垂直于水平面进行说理.

10. 提示:$BD=AD=2DC=6\text{cm}$,得 $BC=9\text{cm}$.

11. 提示:$\triangle ABP$ 为等腰三角形,$AB=BP=6$ 海里. 又 $\angle PBD=30°$,得 $PD=3$ 海里. 说明轮船一直向东航行时,距小岛的最短距离小于 3.5 海里,有触礁的危险.

12. 提示:(1)证明 $\triangle APD\cong\triangle CPB$(SAS).

(2)证明 $\triangle PBN\cong\triangle PDM$,得 $PN=PM$. 又 $\angle MPN=60°$,所以 $\triangle PMN$ 为等边三角形.

1.2 直角三角形

典题精析

例 1 如图 1-2-1,一个梯子 AB 长 2.5 米,顶端 A 靠在墙 AC 上,这时梯子下端 B 与墙角 C 距离为 1.5 米,梯子滑动后停在 DE 的位置上,测得 BD 长为 0.5 米,求梯子顶端 A 下落了多少米?

思维互动

思路>> 问题实质是求 AE 的长. 在 Rt $\triangle ACB$ 中,利用勾股定理可求得 AC,在 Rt $\triangle DEC$ 中,可求得 CE,进而求得 AE. 在解决问题中抓住梯子的长度为 2.5 米固定值这一特点.

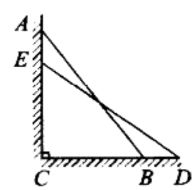


图 1-2-1

解答>> 在 Rt $\triangle ACB$ 中,$AC^2+BC^2=AB^2$,

$\therefore AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{2.5^2-1.5^2}=2$.

在 Rt $\triangle DEC$ 中,$ED=AB=2.5$,$CD=CB+BD=2$,

$\therefore CE=\sqrt{ED^2-CD^2}=\sqrt{2.5^2-2^2}=1.5$.

$\therefore AE=AC-CE=0.5$.

即梯子顶端 A 下落了 0.5 米.

探究评析

1. 在直角三角形中,已知两条边的长,根据勾股定理可以求出第三条边的长. 应用勾股定理时,可根据需要进行变形.

2. 本题根据实际问题情境,转化成直角三角形中求边长的问题,而勾股定理是解决直角三角形求边的长度的重要定理. 已知两边求第三边,通过勾股定理就变成了解方程的问题.

例2 如图 1-2-2,在 Rt $\triangle ABC$ 中,$\angle ACB = 90°$,$\angle A = 30°$,$CD \perp AB$,$DE \perp BC$,D、E 为垂足,$AB = 24\text{cm}$. 求 BE 的长.

思维互动

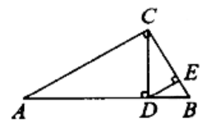


图 1-2-2

思路>> 由已知条件,可得 $\angle B = 60°$. 因为 $CD \perp AB$,$DE \perp BC$,所以 $\angle DCB = \angle EDB = 30°$. 在 Rt $\triangle DCB$ 中,可得 $BD = \frac{1}{2}BC$. 在 Rt $\triangle BDE$ 中,$BE = \frac{1}{2}BD$. 又因为 BC 是 Rt $\triangle ABC$ 中 30°角所对的边,所以 $BC = \frac{1}{2}AB$. 已知 $AB = 24\text{cm}$,BC 可求得.

解答>> $\because$ $\angle ACB = 90°$,$\angle A = 30°$,

$\therefore$ $\angle B = 60°$(直角三角形两锐角互余).

$\therefore$ $BC = \frac{1}{2}AB = 12\text{cm}$(在直角三角形中,30°角所对的直角边是斜边的一半).

$\because$ $CD \perp AB$,$DE \perp BC$,　$\therefore$ $\triangle BCD$ 和 $\triangle BED$ 都是直角三角形,且 $\angle B = 60°$,

$\therefore$ $\angle DCB = \angle EDB = 30°$.　$\therefore$ $BD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 12 = 6\text{cm}$.

$BE = \frac{1}{2}BD = 3\text{cm}$.

探究评析

1. 直角三角形常用的几条重要性质:

(1)直角三角形中,两条直角边的平方和等于斜边的平方. 即勾股定理.

(2)直角三角形的两个锐角互余.

(3)在直角三角形中,30°角所对的直角边是斜边的一半.

本题多次应用性质(2)(3),寻找三边之间的数量关系解决问题.

2. 使用"在直角三角形中,30°角所对的直角边是斜边的一半"性质,要分清 30°角所对的直角边和斜边,不可混淆,利用勾股定理求第三边时,列方程是常用方法.

例3 已知 a,b,c 是 $\triangle ABC$ 的三边,且满足 $a^2 + b^2 + c^2 + 50 = 8a + 6b + 10c$,试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

思维互动

思路 >> 由三边满足的等式 $a^2+b^2+c^2+50=8a+6b+10c$，通过配方，求出 a,b,c，就可确定形状.

解答 >> $a^2+b^2+c^2+50=8a+6b+10c$，

$\therefore\ a^2-8a+16+b^2-6b+9+c^2-10c+25=0$，

$\therefore\ (a-4)^2+(b-3)^2+(c-5)^2=0$，

$\therefore\ a-4=0, b-3=0, c-5=0$，

$\therefore\ a=4, b=3, c=5$.

$\because\ 4^2+3^2=5^2$，即 $a^2+b^2=c^2$，

$\therefore\ \triangle ABC$ 是直角三角形.

探究评析

1. 直角三角形的性质定理的逆定理，又是判断三角形是直角三角形的常用方法. 即：

(1) 如果三角形两边的平方和等于第三边的平方，那么这个三角形是直角三角形.（勾股定理的逆定理）

(2) 如果三角形的两个锐角互余，那么这个三角形是直角三角形.

2. 当三角形三边满足一个等式，可通过配方法将这个等式变换成几个非负数的和为零的形式，再利用每个非负数必为零，求出三边的长，从而确定三边之间的关系来判断三角形的形状.

例 4 如图 1-2-3，已知 $\angle ACB=\angle BDA=90°$，再添加一个条件：________________________，使 $\triangle ACB\cong\triangle BDA$.

思维互动

思路 >> 判定 $\triangle ACB\cong\triangle BDA$，已知两个条件：$\angle ACB=\angle BDA=90°$，$AB=BA$（公共边），只需添加：有一条直角边对应相等或一个锐角对应相等即可.

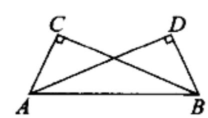


图 1-2-3

解答 >> 要添加一个条件判定 $\triangle ACB\cong\triangle BDA$，这个条件可以是：$AC=BD$（HL）或 $AD=BC$（HL）或 $\angle CAB=\angle DBA$（AAS）或 $\angle ABC=\angle BAD$（AAS）.

探究评析

1. 判定直角三角形全等的方法有：SSS、SAS、AAS、ASA、HL. 其中 HL 是判定直角三角形全等特有的方法.

2. 这类题目是给出结论、条件残缺的“条件探索型”填空题，需要答题者采取“执果索因”法进行探索，答案不是唯一的. 也就是说，要判定 $\triangle ACB\cong\triangle BDA$，要充分利用 $\angle ACB=\angle BDA=90°$，$AB=BA$ 已知条件，再根据判定方法找出另一个具备的条件，即所要填写的条件. 解答

这类题目条件较宽,难度不是很大.

例5 如图1-2-4,在$\triangle ABE$和$\triangle ACD$中,给出以下四个论断:

①$AB=AC$;②$AD=AE$;③$AM=AN$;④$AD\perp DC$,$AE\perp BE$.

以其中三个论断为题设,一个论断为结论,组成一个真命题,并写出证明过程.

思维互动

思路>> 本题需要在分类构造命题的基础上,对命题的真假性给出判断.解答此题需要逐一分类组合构造命题,判断真伪.一些分类构成的命题,可直观判断其是假命题,如:①$AB=AC$;②$AD=AE$;③$AM=AN$作为题设,④$AD\perp DC$,$AE\perp BE$作为结论时,命题为假命题.

解答>> 以①$AB=AC$;②$AD=AE$;④$AD\perp DC$,$AE\perp BE$为题设,③$AM=AN$为结论可得到一个真命题.

已知:在$\triangle ABE$和$\triangle ACD$中,$AB=AC$,$AD=AE$,$AD\perp DC$,$AE\perp BE$.

求证:$AM=AN$.

证明:$\because$ $AD\perp DC$,$AE\perp BE$, $\therefore$ $\angle D=\angle E=90°$.

$\because$ $AB=AC$,$AD=AE$, $\therefore$ $Rt\triangle ABE\cong Rt\triangle ACD$(HL),

$\therefore$ $\angle EAB=\angle DAC$.

$\therefore$ $\angle EAN+\angle BAC=\angle DAM+\angle BAC$, 即 $\angle EAN=\angle DAM$.

在$\triangle ADM$和$\triangle AEN$中,

$\angle DAM=\angle EAN$,$AD=AE$,$\angle D=\angle E$, $\therefore$ $\triangle ADM\cong\triangle AEN$(ASA),

$\therefore$ $AM=AN$.

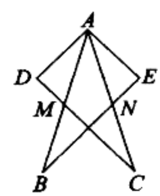


图1-2-4

探究评析

1. 本题综合性较强,关键在于对图形、所给条件的充分观察、分析、推理,使用两次直角三角形全等证明结论,推理、思维能力要求高.

2. 以②$AD=AE$;③$AM=AN$;④$AD\perp DC$,$AE\perp BE$为题设,①$AB=AC$为结论得到的是一个真命题.

以①$AB=AC$;③$AM=AN$;④$AD\perp DC$,$AE\perp BE$为题设,②$AD=AE$为结论得到的也是一个真命题.

3. 开放探索性试题在中考中越来越受到重视.本题是探索性问题中颇具新意的一例,本题需要在分类构造命题的基础上,对命题的真假性作出判断,以一种新的方式突出了对学生推理、思维能力的考查,问题开放,贴近基础,值得学习.