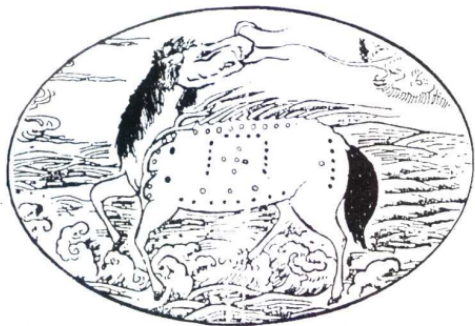


趣味数学读物



| | | | |
|----|----|----|----|
| 4 | 14 | 7 | 9 |
| 15 | 1 | 12 | 6 |
| 10 | 8 | 13 | 3 |
| 5 | 11 | 2 | 16 |



奇妙的幻方

高源 著
陕西师范大学出版社

奇妙的幻方

高 源 著

陕西师范大学出版社

(陕)新登字 008 号

奇妙的幻方

高 源 著

陕西师范大学出版社出版发行
(西安市陕西师大 120 信箱 邮政编码 710062)

陕西延安大学印刷厂印刷

新华书店经销

开本 850×1168 1/32 印张 12 字数 300 千
1995 年 10 月第 1 版 1995 年 10 月第 1 次印刷

印数: 1—3000

ISBN7-5613-1234-2/G·921

定价: 12.00 元

序

幻方起源于我国,相传,远古时有神龟浮现于洛水,背上有按规律排布的花点,谓之洛书,后世人称九宫图,杨辉称九宫图以及由此而演生的类似数表为纵横图。此后,我国陆续有一些数学家,编制出了行列更多的纵横图。传至欧洲后,也引起了人们极大的兴趣,进而又不局限于方阵排列,出现了排列于圆、三角形等图形上的数字排布图。但这些都是作为一种益智游戏而进行研究的。

近代,一些学者深入研究了幻方的编造原理和其中蕴涵的数学关系,当在电子计算机、图论等方面有了一些应用之后,更引起了人们的注意,成为组合数学的研究内容。

高原同志多年来致力于幻方的学习和研究,积累了丰富的资料,提出了编制幻方的一些方法,特别是进一步挖掘了蕴涵于其中的数学

美学因素。近年来又勤著述细心编排，集成《奇妙的幻方》一书。它既是一本介绍幻方数学理论的书籍；也是一本涉猎极其广泛的数学趣味读物。读者将会从中学到幻方的知识和若干编制方法，并会受到数学文化的美的熏陶。

这本书中，广征博引，奇思妙想处处可见，涉及周易、气功、中医、天文等广泛领域。可惜我的知识面窄狭，对于这些有趣的联系未能有深入的领会，但高源同志优美的笔法和海阔天空的思考，却常常引发我的遐想，把我带入到一个个从未思考过的境域。

读书，本应有独立思考的精神，结合自己的认识，方能有真正的收获，我相信广大读者将会从本书的广泛涉猎和联想中受到思想的启迪。

李元中

95年国庆于西安

绪 论

相传在公元前 23 世纪大禹治水的时候,在黄河支流洛水中,浮现出一个大乌龟,甲上背有 9 种花点的图案,人们将图案中的花点数了一下,竟惊奇地发现 9 种花点数正巧是 1—9 这 9 个数,各数位置的排列也相当奇妙,后来人们就称这个图案为洛书(见图 1)。洛书给出的 9 个数所排成的方阵具有绝妙的性质,横的 3 行、纵的 3 列以及两对角线上各自的数字之和都为 15。人们因它的性质之独特而大感兴趣,对其进行了多方面的研究。我国汉朝的一本叫《数术记遗》的书,把图 2 叫“九宫算”,又叫九宫图,宋朝数学家杨辉把类似于“九宫图”的图形叫“纵横图”,国外数学家把它叫做“幻方”。

杨辉是第一个把“洛书”作为一个纯数学问题来加以研究的,公元 1275 年,他在《续古摘奇算法》的上卷中记录了这方面的成就,给出了三至十阶幻方及变式,并提出了三阶、四阶幻方的构造方法。在他之前,人们对“洛书”的描述附有神秘色彩,发挥了各种想象,认为它是“天地生成之

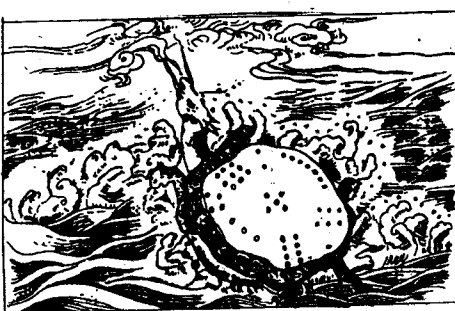


图 1 神龟背洛书

数”,对它敬而仰之,奉若神明。杨辉对“纵横图”的著述,内容丰实,方法简明,沿袭至今仍是很宝贵的数学典籍。杨辉之后,对纵横图的研究相继不断,明朝程大位,清朝保其寿、方中通、张潮,以及我国著名数学史家李俨,还有一些近代的学者们,都为纵横图的发展作出了贡献。

我国的纵横图传到欧洲,它的多彩的变化特征吸引了西方的数学家们,他们对此也很感兴趣,并称纵横图为“幻方”,意为“幻妙的方阵”。著名的数学家欧拉和汉弥尔登,大发明家富兰克林都对幻方有过深入的探讨。

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

图 2

在 16、17 世纪,甚至更晚,构造幻方非常盛行,各种特色的幻方不断诞生,1759 年,欧拉发表了独具一格的“马步幻方”,1901 年法国数学家里利发明了“平方幻方”,1958 年美国数学家霍纳造出了“双重幻方”等。西方研究幻方的热潮,一浪高过一浪。目前,国外已作出的最大幻方,是美国纽约的一位 13 岁少年所完成的 105 阶幻方。美国 1977 年发射的寻求外星文明的宇宙飞船旅行者 1 号、

2 号上,除了有向宇宙人致意的问候讯号外,还带有一些图片,这些图片中就有一张是四阶幻方图,这个四阶幻方的构图,同我国的洛书一样,也是用不同数量的图点布局成的,而且它又是一个具有多种奇妙性质的四阶幻方(见图 3),向宇宙人告示了我们地球人的智慧。

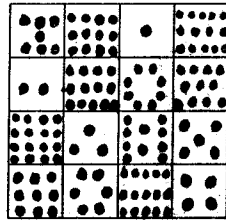


图 3 向宇宙人告示我们的智慧

我国的纵横图也传到了印度、日本以及阿拉伯等国家,也引起了他们的极大兴趣,把它作为“魔方阵”来研究,得到不少新成果。他们还提出一些与此类似的新概念,如“魔立方体”、“魔术矩形”等。印度所编的 64 数的魔立方体就别具特色,它的各层的纵横线上及立方体之垂线和对角线上各数之和皆相等,

富兰克林是一个幻方迷,他曾承认,当他任宾夕法尼亚洲议会

的职员时,为了消磨那乏味的办公时间,他填出一些特殊的幻方,甚至一些幻圆——它是这样构成的,在一些按一定规则分布的互相相交的圆的交叉处,填上一定的数字,使得每个圆上的数字之和相等。最近,富兰克林的幻圆的彩色作品在纽约的一次拍卖中被一个私人收藏家高价买去了。

近年来,我国对幻方的研究也颇为重视,各种杂志上不断刊载对幻方研究的新成果。其中尤以北京联合大学李立老师的研究成果最多,他分别在《内蒙古大学学报》和《数学进展》两杂志上,发表了许多关于幻方及幻立方的理论性很强的文章。1988年,丁宗智的“幻方”的研究成果,在台湾的“中华易学”中连载。1990年3月,合肥召开了“国际组合数学学术会议”,这次会议,对幻方研究的论文颇多,并对幻方的进一步发展起了推动作用。1991年,舒文中《幻方》一书出版,1993年,孙友、孙群策、孙群力父子仨的《幻方专辑》发行。通过我国学者的艰苦探索,大大地开拓了幻方研究的视野,使幻方具有更多独特而深邃的性质,在构造的难度和奥妙的深度上都大大超过以往。幻方这个起源于我国的神秘的数学问题,最终在我国形成了一个丰富的体系,并逐步成为数学研究的重要课题。

一、幻方的概念

不同的书上对“幻方”的叫法也不同,本书为了便于研究,我们规定含有 n 行 n 列的正方形叫做 n 阶方阵。若将 n^2 个数填入 n 阶方阵的 n^2 个小格中,则称这个填满数字的方阵为 n 阶纵横图。图4就是一个三阶纵横图,它是将1—9这9个数按自然数的顺序排列成的,像图4那样,将1到 n^2 中各数按自然数的顺序填成的纵横图,我们叫 n 阶循序纵横

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 |

图4 三阶循序纵横图

图。

一般来说,将 n^2 个不同的数填入 n 阶方阵的 n^2 个方格中,若 n 行 n 列及两条主对角线上诸数之和都等于一常数 H_n ,则称此纵横图为 n 阶幻方, H_n 称为该 n 阶幻方的幻和。图 2 是一个三阶幻方,幻和 $H_3=15$,图 5 是一个四阶幻方,幻和 $H_4=34$ 。

每个幻方的幻和是确定的,我们可以将 n 阶幻方的幻和的计算公式推导出来。若 n 阶幻方含有 1 到 n^2 中的 n^2 个数,则根据等差数列的求和公式,我们容易得到:

| | | | |
|----|----|----|----|
| 1 | 8 | 15 | 10 |
| 12 | 13 | 6 | 3 |
| 14 | 11 | 4 | 5 |
| 7 | 2 | 9 | 16 |

图 5

$$n \cdot H_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n^2 = \frac{n^2(n^2+1)}{2}.$$

$$\text{则得 } n \text{ 阶幻方的幻和 } H_n = \frac{n(n^2+1)}{2}.$$

例如, $H_4 = \frac{4 \cdot (4^2+1)}{2} = 2 \cdot 17 = 34$. 同样可按公式计算出三阶幻方的幻和 $H_3=15$.

二、幻方的应用

幻方在电子计算机、图论、实验设计、海上漂浮建筑和工艺美术方面都有出色的应用。电子计算机的发展,又给幻方增添了新的活力。美国计算机协会主编的 CACM 程序汇编中,也把幻方的编造程序收了进去。建筑学家勃拉东发现幻方的对称性相当丰富,它采用幻方组成许多美丽的图案,他把图案中的那些方阵内的线条称为“魔线”,并应用于轻工业品、封面包装设计中。加拿大滑铁卢大学的一位专家发现了幻方与“拉丁方”的内在联系,由于“拉丁方”在实验设计领域中有着无比的重要性,从而幻方原理成了正交

试验设计的新思路。国外新出版的《现代代数及其应用》这本专著中,破天荒地把这个从前认为是“雕虫小技”的东西列为专门题材。

幻方在美术绘画家眼里,也是一个五彩缤纷的宫殿。如果我们把方格内的数字作为定点方位,按照1、2、3、4、5...的顺序将其用线连接起来,就会产生许多有趣的线迹。这原本是一种数学游戏,如将洛书数字依次连起来遂成“三三迷宫”(图6)。而由洛书衍生出来的高阶幻方所作成的迷宫,不但比“三三迷宫”之图形高妙百倍,而且千变万化,是一种规则平衡而合于自然旋律的线迹。如果在此基础上再作线形、黑白或多色彩的处理,会产生出更多的意趣,这将会出现一幅幅奇特的“魔方阵构图”(图7、8、9)。其中图7就是由“三三迷宫图”涂色后构成的。

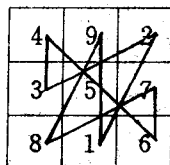


图6 三三迷宫图

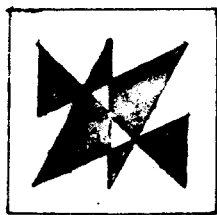


图7



图8

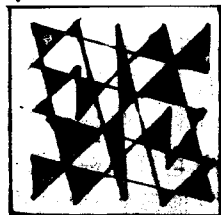


图9

由于幻方中数的排列的规律性,在这形式的背后隐藏着一种均衡的美,表面变化无穷,而内在井然有序,它对几何形图案的意匠有一种多角度的启迪。在远古时期流传下来的两幅河图、洛书图案(图10、11),具有非常含蓄而有味的艺术美,河图是由55朵五瓣花构成的圆图,像是一个绚丽多彩的花坛,洛书是由45条粗细曲线构成的方图,给人一种行云流水般的美感。可见,幻方还能给

绘画家们提供丰富多样的创作素材。在中世纪,幻方的这种不可思议的性质被认为是具有奇异魔力的,因而它们被用来作护身符,以保护佩戴者免受祸害。在 A·度勒(1471—1528)的著名版画《忧郁症》中的幻方是经常被复制的一个。其实美术家们早就知道利用幻方的神奇,来增添他们绘画作品的魅力,度勒的版画就是一例,他是在 1514 年作这幅画的,版画上的一个四阶幻方中,最后一行中

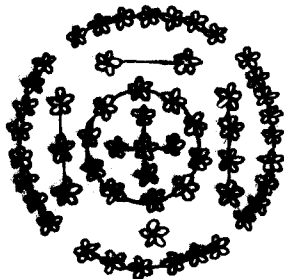


图 10 古河图



图 11 古洛书

间的两个数正是 15、14, 奇巧地指明了版画制作的年代(图 12)。

看上去三阶幻方是最简单的了,但它却有一些极不寻常的性质,我们祖先对它各种神奇的应用,每一种应用好像是从天外来传的一个个美妙的故事。古代,我国易学家们,所提到的河图洛书,就是根据三阶幻方的特征,演绎出种种妙趣横生的结论的。三阶幻方同八卦太极图结合起来,占卜

| | | | |
|----|----|----|----|
| 16 | 3 | 2 | 13 |
| 5 | 10 | 11 | 8 |
| 9 | 6 | 7 | 12 |
| 4 | 15 | 14 | 1 |

图 12 版画上的幻方

者用来预测事物发展变化的趋向,这虽有争论,但已引起许多人的深思。当代,全世界已掀起一股探索《易经》的热潮,而洛书是《易经》中的重要内容之一,从古至今,我国易学家们对洛书的研究上升到哲学的高度,认为天地万物都可与之对应起来,蕴含着深刻的

宇宙全息规律。

易学对洛书的各种神秘的应用,引起人们对高阶幻方的哲学思考,并促使人们对幻方的研究报以更多的热情。肯定幻方这种奇妙的数字结构,其应用范围将会更加广阔的。

三、从幻方中引出的悖论

著名的“团体赛奇论”,就是从幻方中产生的。大家知道。围棋是一种古老而精深的棋艺。棋手通常定为九段,在一般情况下,段位低的棋手是胜不过段位高的棋手的。假如有3个围棋队,每队都有3位棋手,甲乙丙3队棋手的实力如图13所示,把这3队棋手组合成一个三阶方阵,可以看到它的布局同三阶幻方是完全一致的。如果比赛时采用循环赛,一个队的每名棋手与另一个队的每名棋手都要进行一番较量。按照比赛规则,比赛结果如下:

甲对乙:甲胜4场,乙胜5场;

乙对丙:乙胜4场,丙胜5场;

丙对甲:丙胜4场,甲胜5场。

| | | | |
|-----|----|----|----|
| 甲队: | 四段 | 三段 | 八段 |
| 乙队: | 九段 | 五段 | 初段 |
| 丙队: | 二段 | 七段 | 六段 |

图13 各队实力

根据前两次比赛结果,我们可看出丙队强于乙队、乙队强于甲队。根据数学中的不等量公

理,由 $乙 > 甲$, $丙 > 乙$,可得 $丙 > 甲$ 。可是事实上却恰好相反,甲与丙两队比赛结果却是甲队强于丙队,形成这样一个推磨式的结论,真让人百思而不得其解,这正是幻方独特性质而决定的,幻方的均衡性,决定了这个结论的必然性,如果将每队棋手的段次打乱,这样的数学悖论自然就不会产生了。

如果有4个围棋队,每队各有4位棋手,4个队的棋手的段次,就像图5中4行中的数字排列一样,也采用循环赛,结果不管那两个队比赛,其比赛结果都是平局,这也是四阶幻方的均衡性所引起的结论。当我们继续在高阶幻方中去考察,竟然发现这种悖论

在所有的幻方中都存在。所谓悖论就是谬论，幻方中的这种荒诞的美谈，却在荒诞中蕴含着哲理，引人深思，给人一种回味无穷的启迪。

四、幻方的编造方法

富兰克林的幻方为人所知，并显其异彩，他曾对人说过，他找到了许多窍门，能够随心所欲地构造任何幻方，其速度就像在空格里按序填写自然数一样。但后来，谁也没有掌握富兰克林所找到的窍门，而从传世的两个“富兰克林幻方”来看，其主对角线上诸数之和互不相等且均不等于幻方常数，这并不符合幻方的定义，因此富兰克林所掌握的“窍门”令人生疑。

人们一直试图寻找任何阶幻方的编造方法，富兰克林是否找到？现已无法弄清。在17世纪，卢培发现了编造任何奇数阶幻方的统一方法，这种方法非常简单，简单得就如同按行依序填写自然数一样，从此人们不再为编写某一个奇阶幻方而付出繁重的脑力劳动了。意大利人 Vacca 编造成一个九阶幻方，其实也给出奇阶幻方的另一种编造方法，虽然其过程比较复杂，但其编造手法巧妙得令人惊讶，他将奇数偶数分填在两个菱形中，然后就可剪开相拼而成。那么偶阶幻方如何编造？到目前为止，人们一直没有找到像奇阶幻方那样简洁漂亮的方法，现主要使用的构造方法是以低阶幻方为基础的加层法，这种方法不仅不是偶阶幻方独有的统编法（奇阶幻方也可用），而且阶数越高，加层元素越多，造法越复杂，工作量相当大。近年来，我国学者对偶阶幻方的统编法作了不懈的努力，舒文中的“葫芦形法”就是一种很有效的方法，1993年，任初农发现了一种“阵列变换法”，其规律性较强，是一种比较简单的方法。

其实，随着阶数的增大，同阶幻方的种数也相当大，现已知道，不同的四阶幻方有 880 种，不同的五阶幻方有 275305224 种，不同

的六阶幻方也至少有数亿种,试想同阶幻方的种类这么多,其对应的编造方法自然是多种多样的。看来幻方的编造方法,我们的探索是难以穷尽的。

幻方至今仍是组合数学的研究课题,由于幻方的应用愈来愈广泛,对幻方的知识作一系统全面的介绍,并在编写方法上作出一般性的研究,现在已显得相当必要了。在后面各章中,我们在三阶、四阶、五阶及六阶幻方的研究基础上,介绍了许多具有各种奇妙性质的幻方,并逐步总结出编造幻方的一般规律。对卢培所发现的奇阶幻方的统编法我们作了大量的拓广,在理论上作了深刻的探索,当阶数 $n=4m$ 时,我们介绍了至少6种以上的统编方法,好多方法都是我们独创的;令人感到高兴的是,我们找到了一种阶数 $n=4m+2$ 时幻方的统编法的原理,这类幻方的编造是当今人们感到最头疼的,而我们用三种方法解决了这一难题。读完本书各章以后,我们就会像富兰克林所说的那样,能够真正随心所欲地编出任何阶幻方来。

五、幻方的魅力

幻方看来是一个“小玩意”,它最初的发展似乎只是作为一种数学游戏供人们去作思维的体操,可幻方多样的变幻,巧妙和谐的结构体系,迸发出耀人的数学美的光辉,深深地吸引和打动人们的好奇心。步入“幻方”就像进入一个“神奇的迷宫”,诱发和激励着人们探索的强烈欲望。

数学美被人们尊称为科学美的皇后,它以高度抽象、极其简洁的形式和思想反映了客观世界的內容美。而幻方本身是数字按着一种规律布局成的一种体系,每个幻方都以整齐划一、均衡对称的美,显示出一种妙不可言的特性。幻方中蕴含着大量的内在规律,线线诸数合幻和,纵横巧合联四方,数与形的和谐统一,局部与整体的全息对应,给人一种梦幻般的感受。幻方是多种多样变幻无穷

的,有的幻方还表现出更多的引人入胜的特征,如幻方串、砌块幻方、完美幻方、平方幻方。尤其是完美幻方,它简直是数之美的化身,它所蕴含的特性丰富多彩,给人以无穷的美的遐想:形态万千的“星座”,在那浩大的幻方宇空中闪耀,四方中数字间的量变规律,像春夏秋冬四季的交替变化;对称齐一的内规律,竟然蕴藏着平方优化的妙趣,遵循着统一法则的数字布局规律,形成种种对称完美的曲线轨迹。不同的幻方总是表现出不同的规律美来,随着阶数的增大,各阶幻方的种类成千上万,越来越多,它们是一个个让我们永远探索不尽的丰富多彩的世界。在这个世界里充分挖掘数之美的规律,不仅能够得到意志的锻炼,体验到跋涉的艰辛,更能够激发起惊人的智慧,享受到一次次柳暗花明的喜悦。

数学的各个分支都同数字有密切的联系,数学中的许多定理和公式都有相应的数字关系作为实例。因此幻方这种数字的布局体系,可同许多数学知识发生联系,例如方程幻方、复数幻方、素数幻方、调和幻方、平方幻方、水仙花数幻方等,它们融幻方形式和数学内容为一体,显示出双重的妙趣来,我们可以在幻方的欣赏中了解数学知识中的许多奥秘。可见幻方确实是很奇妙和多色彩的,可以探讨的内容极其丰富,因而几千年来人们对它研究的热情从未低落过。幻方,这种数形统一的和谐体系,其魅力是无穷的。

六、幻方是哲学思想的宝库

被我们祖先崇为至上的洛书就是一个三阶幻方,它蕴含着一种概括天地万物的生存结构,是古代中国的一种数学模式。洛书也是周易中重要内容之一,它同八卦相联可探测各种事物的变化规律,具有深奥的哲理思想。难道只有三阶幻方才同哲理思想有关吗?当我们对各阶幻方深入研究以后,竟然发现幻方其构造原理,其分布规律,蕴含着深刻的哲学思想,在各阶幻方中都能挖掘出许多与古典哲学、气功学、中医学、宇宙学等相关的内容。

中医中的阴阳五行、九宫八卦、天干地支、太极体系，都能在幻方中找到相应的数学依据，我们可以利用幻方加深理解中医文化中的许多奥秘。最让人兴奋的是，古代的一些深不可测、百思而难解其意的哲理，竟在幻方中能解释的清清楚楚。那“道生一，一生二，二生三，三生万物”的道家思想，那《易经》中的“其大无外，其小无内”的宇宙之全息规律，那“得一养性”，“得一得命”的气功中的养生哲学，竟在幻方中化为明明白白、普普通通的简单道理了。

从古至今，有多少人感叹，破译《易经》之谜必须依赖数学。当我们面对幻方的种种规律，联系周易思想进行深入的思考以后，竟然接连不断地发现幻方中蕴藏着周易中的种种奥秘，这既让人兴奋惊讶，又觉得也很顺理成章。因为河图、洛书本身就是易学中的重大内容之一，我们只是顺着这一线索看到了周易的更多方面的内容罢了。

一种观点认为，数学是宇宙的语言，宇宙的一切是按着数及其数学法则运动而发展的。无论是毕达哥拉斯学派，还是易学思想的哲人们，都在阐述这种“万物皆数”的思想。幻方，这一独特的数学语言，这种数之运转的体系，都与我们生活中的许多事物密切相联。当我们从幻方中挖掘出“太阳双行星运动轨迹”的时候，当我们从幻方中发现太极图的时候，当我们找到“气旋轨迹”载于幻方的秘密的时候，我们毫不怀疑先哲们的那些精言妙语。我们在幻方中还能看到，行星绕着太阳运转的宏观星系，电子绕着原子核旋转的微观体系，甚至原子结构中的质子与中子不断互换 π 介子，电子磁场中不断交换虚光子，也能在幻方中找到奇妙的数理印证。这些现代科学中的内容，一个个都包容在数学的大法则之中。幻方，俨然是一个哲理思想的宝库。

我们面对幻方中的有趣内容，幻方中蕴含的美的规律，幻方同《易经》的密切关系，以及幻方同客观世界事物变化规律的吻合，深深地感到幻方远不是像人们想象的那样，只是数学中的一种纯数

字游戏,它蕴藏的规律,神乎其神,玄妙无比,随着电子计算机的发展,它的应用将越来越广阔,只是我们对幻方的研究还不够深入,它内含的数学上的、哲学上的、易理上的以及宇宙学上的宝藏还远远没有被我们挖掘出来。相信随着科学的发展,幻方这种纯数字的结构会愈来愈受到人们的青睐,这个纯数学问题,一旦赋予它许多宇宙学、哲学、物理学、气功学的意义,必将产生新的活力,为我们认识世界开辟一条崭新的道路。