

建筑企业专业管理人员岗位资格培训教材

数学

徐家华 李健 编

中国环境科学出版社

(京)新登字089号

内 容 简 介

本书是经建设部人事教育劳动司审定的建筑企业专业管理人员岗位资格培训教材之一。全书共分七章,主要内容有集合与函数;幂函数、指数函数、对数函数;任意角三角函数;三角函数的简化公式、三角函数图象;加法定理及其推论;空间的直线、平面、各种几何体的计算;二次曲线等。

为了便于教学与自学者掌握重点和难点,各章均有复习思考题。

本书除作为岗位培训教材外,还可作建筑类中等职业技术学校、职工中专、职业高中和各类培训班的教学用书以及施工技术人员、工人学习参考书。

建筑企业专业管理人员岗位资格培训教材

数 学

徐家华 李 健 编

*

中国环境科学出版社出版

(100062 北京崇文区北岗子街8号)

化学工业出版社印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行 各地新华书店经售

*

1995年2月第一版 开本 787×1092 1/16

1995年2月第一次印刷 印张 13 $\frac{1}{2}$

印数1—10500 字数 300千字

ISBN 7-80010-338-2/G·117

定价: 13.00元

出版说明

1987年由建设部干部局、建设部远距离教育中心组织编审,1988年由中国环境科学出版社出版的建筑企业专业管理人员岗位培训教材自出版以来,在建筑施工企业岗位培训工作中,发挥了重要的作用,但也存在一定的不足,特别是这套教材出版以来的6年中,我国的社会主义建设事业发生了巨大变化,科学技术日新月异。原来的教材已不适应社会主义市场经济和建筑施工企业岗位资格培训的需要,也不符合1987年以来颁布的新法规、新标准、新规范,为此我们决定对通用性强、培训工作急需的23种教材,进行修订或重新编写。经修订或重新编写的教材,基本上能满足建筑施工企业关键岗位培训工作的需要。

经修订或重新编写的这套教材,定名为建筑企业专业管理人员岗位资格培训教材。它是根据经审定的大纲和在总结前一套教材经验的基础上以及广大读者、教师、工程技术人员在使用中的意见和建议,结合改革开放形势发展的需要,按照科学性、先进性、针对性、实用性、适当超前性和注重技能培训的原则,进行修订和编写的。部分教材进行了大幅度的删减。为适应在职职工自学的要求,这套教材每章均附有小结、复习思考题和必要的作业题。

这套教材修订、新编的具体工作,由中国建设教育协会继续教育委员会负责组织。在编写、出版过程中,各有关院校、设计、施工、科研单位,为保证教材质量和按期出版,作出了不懈的努力,谨向这些单位致以谢意。

希望各地在使用过程中提出宝贵意见,以便不断提高建筑企业专业管理人员岗位资格培训教材的质量。

建设部人事教育劳动司

1994年8月

前 言

本教材为建筑企业专业管理人员岗位资格培训编写。本教材曾于1988年12月出版，当时的意图偏重于理论知识要接近于普通中专的水平，故内容过分庞杂，有些例题、作业题偏深。趁这次修订之际，将原教材作了大幅度的压缩，偏多的内容全部删去，有些章节作了较大的调整，教材内容力求贴近培训人员的实际水平，针对性、实用性会更强一些。

本教材第一、二、三、六章由建设部干部学院徐家华编写，第四、五、七章由中建一局李健编写。

在编写过程中，得到中国建设教育协会继续教育委员会、中国环境科学出版社等部门指导，在此一并感谢。

由于编者的水平所限，加以编写时间仓促，教材中难免有缺点和错误，恳切希望读者批评指正，以便今后进一步修改和提高。

编 者

1994年7月

目 录

第一章 集合与函数	(1)
第一节 集合	(1)
第二节 集合与集合的关系	(2)
第三节 函数	(7)
第二章 幂函数、指数函数、对数函数	(17)
第一节 幂函数及其图象和性质	(17)
第二节 指数函数及其图象和性质	(23)
第三节 对数的一些基本知识	(29)
第四节 对数函数及其图象和性质	(41)
第五节 简单的指数方程和对数方程	(45)
第三章 任意角的三角函数	(59)
第一节 锐角的三角函数	(59)
第二节 角的概念的推广 弧度制	(65)
第三节 任意角三角函数的定义	(71)
第四节 三角函数在单位圆上的表示法	(76)
第五节 0 、 $\frac{\pi}{2}$ 、 π 、 $\frac{3}{2}\pi$ 角的三角函数值	(81)
第六节 同角三角函数间的关系	(83)
第七节 解斜三角形	(90)
第四章 三角函数的简化公式三角函数图象	(110)
第一节 负角的三角函数简化公式	(110)
第二节 各象限角的三角函数简化公式	(111)
第三节 三角函数的图象和性质	(116)
第四节 正弦型曲线	(122)
第五章 加法定理及其推论	(138)
第一节 两角和差的正弦、余弦公式	(138)
第二节 两角和差的正切公式	(142)
第三节 倍角的正弦、余弦和正切	(146)
第四节 半角的正弦、余弦和正切	(150)
第五节 三角函数的和差化积与积化和差	(155)
第六章 空间的直线、平面、各种几何体的计算	(174)
第一节 直线、平面、相互之间的关系	(174)
第二节 多面体的计算	(176)
第三节 旋转体的计算	(179)

第七章 二次曲线	(183)
第一节 预备知识	(183)
第二节 二次函数与抛物线.....	(191)
第三节 圆的方程	(199)
第四节 椭圆及其方程	(202)
第五节 双曲线	(205)

第一章 集合与函数

函数是数学中一个极其重要的基本概念，集合论是现代数学中的一个分支，掌握集合与函数的基础知识，这就为继续学习数学打下了坚实的基础。本章将简明地介绍集合的基本概念和集合的一些符号，并用它来阐述函数的基本概念。

第一节 集 合

一、什么叫集合

在数学或日常生活里，我们往往将具有共同性质的事物联成一个整体加以研究，这就产生了集合的概念。例如：

- (1) 一个工程处所有职工的全体；
- (2) 一个机械化公司各种机动车的全体；
- (3) 所有自然数的全体；
- (4) 所有三角形的全体；
- (5) 不等式 $x^2 - 3x + 2 > 0$ 所有解的全体。

上面例子的“全体”都由具某种共同性质的一些事物组成的，我们把具有某种共同性质的一些事物组成的全体叫做集合，简称集。把组成某一集合的各个事物叫做集合的元素。例如：上面例子的(1)是由这个工程处所有的职工组成的集合，这个工程处里每一个职工便是这个集合的元素。(2)是由这个机械化公司的各种机动车组成的集合，各种类型的吊车、铲车、卡车等等都是这个集合的元素。

我们常用大写字母 A 、 B 、 C 等表示集合，小写字母 a 、 b 、 c 等表示集合的元素。如果 a 是集合 A 的元素，就认为 $a \in A$ ，读做“ a 属于 A ”；如果 a 不是集合 A 的元素，就记为 $a \notin A$ ，读做“ a 不属于 A ”。集合与它的元素关系是集合包含它的每一个元素，它的每一个元素都属于集合。例如：

(1) 设 Z 为所有整数的集合，显然，任一整数都是它的元素，如 $2 \in Z$ ， $-5 \in Z$ 等；而分数 $\frac{1}{3}$ 、小数 0.76 、无理数 $\sqrt{5}$ 等都不是 Z 的元素，可写成 $\frac{1}{3} \notin Z$ 、 $0.76 \notin Z$ 、 $\sqrt{5} \notin Z$ 等。

今后我们常用 N 表示自然数的集合， Z 表示整数的集合， Q 表示有理数的集合， R 表示实数的集合， R^+ 表示正实数的集合， R^- 表示负实数的集合。

对于一个给定的集合，集合中的元素是确定的，这就是说，哪些事物是它的元素，哪些事物不是它的元素，可以根据某种原则来判断。例如：对于整数集合 Z ，我们就可以根据整数的定义判别出 $2 \in Z$ 、 $-5 \in Z$ 而 $\frac{1}{3} \notin Z$ 、 $0.76 \notin Z$ 、 $\sqrt{5} \notin Z$ 。

二、集合的表示法

1. 列举法 把集合的元素一一列举出来, 写在大括号“{ }”内, 每个元素仅写一次, 不分次序。象这样表示集合的方法叫列举法。例如: 1、2、3、4组成的集合, 可以写成 $\{1, 2, 3, 4\}$ 或 $\{2, 1, 3, 4\}$ 或 $\{4, 3, 2, 1\}$ 等; 但不可以写成 $\{1, 1, 2, 3, 4\}$ 或 $\{1, 2, 2, 3, 4, 4\}$ 等。

2. 描述法 把集合中元素所具有的共同性质描述出来, 写在{ }号内, 象这样表示集合的方法, 叫描述法。

例如 (1) 由某工程处所有的职工组成的集合可以表示为{某工程处的职工};

(2) 由某机械化公司所有的机动车组成的集合可表示为{某机械化公司的机动车};

(3) 不等式 $x^2 - 3x + 2 > 0$ 所有解的集合, 可以表示为 $\{x | x^2 - 3x + 2 > 0\}$ 。括号内竖线的左边表示集合所包含的元素的一般形式, 竖线的右边表示集合中元素所具有的共同性质。

三、集合的种类

集合可按它所包含的元素个数分为下列几种:

1. 集合中所包含的元素的个数为有限个, 这样的集合叫有限集合。例如: {某机械化公司的机动车}; {某工程处的职工}; $\{x | 1 \leq x \leq 20, x \in N\}$ 。特别地, 只含有一个元素的集合, 叫单元素集合。例如, $\{a\}$; $\{x\}$; $\{5\}$ 。要注意 a 与 $\{a\}$ 的不同, a 表示一个元素, $\{a\}$ 表示只含有一个元素的集合。

2. 集合中所包含元素的个数为无限多个, 这样的集合叫无限集合。例如: 所有自然数的集合; 直线上所有点的集合; 不等式 $x^2 - 3x + 2 > 0$ 所有解的集合等。

3. 不含任何元素的集合, 叫做空集合, 简称空集。用符号 $\emptyset$ 或{ }表示。

例如: $A = \{x | x > 2 \text{ 且 } x < 1\}$ 为空集, 因为要同时满足不等式 $x > 2$ 和 $x < 1$ 的解是不存在的。即集合 A 不包含任何元素, 所以 A 为空集。

空集 $\emptyset$ 与集合 $\{0\}$ 是两个不同的概念, 前者指的是不包含任何元素的集合{ }, 而后者指的是由一个元素零组成的单元素集, 显然它不是空集。

第二节 集合与集合的关系

集合与集合的关系, 常见的有以下几种:

一、子集

设集合 $A = \{\text{数学, 制图, 预算, 力学}\}$, 集合 $B = \{\text{数学, 力学}\}$, 可以清楚地看出: 集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素。对于两个集合 A 与 B , 如果集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素, 那么, 集合 B 就叫做集合 A 的一个子集。记作 $B \subseteq A$ 或 $A \supseteq B$ 读作“ B 包含于 A ”或“ A 包含 B ”。

为了直观起见, 我们通常还用圆 (或任何封闭曲线围成的图形) 表示一个集合, 而

圆中的点表示该集合的元素。图1-1表示了集合 A 与 B 之间的关系, $B \subseteq A$ 或 $A \supseteq B$ 。

关于子集的定义, 还应注意下列两种特殊情况:

(1) 对于任何一个集合 A , 因为它的每一个元素都是集合 A 的元素, 即 $A \subseteq A$, 也就是说任何一个集合是它本身的子集。

(2) 一般规定, 空集是任何集合的子集。

在某一集合 A 的所有子集中, 它本身和空集是它的两个特殊子集, 除这两个子集外, 集合 A 的其他子集都叫做 A 的真子集。如果 B 是 A 的真子集, 则记为 $B \subset A$ 或 $A \supset B$ 。

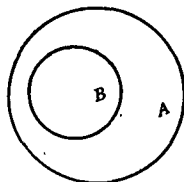


图 1-1

〈例 1〉 设集合 $S = \{1, 2, 3\}$ 写出 S 的所有的子集, 并确认其真子集。

解: 集合 S 的所有的子集是

$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$ 。

除 $\emptyset, \{1, 2, 3\}$ 为两个特殊子集外, 其他六个子集, 都是 S 的真子集。

从上述例题中可以看出集合 S 中至少有一个元素不属于真子集, 即真子集包含的元素要少于这个集合所包含的元素。

对于两个集合 A, B , 如果 $A \subseteq B$, 同时 $B \subseteq A$, 那么, 集合 A 和集合 B , 就叫做相等。并记为 $A = B$ 。

〈例 2〉 设 $A = \{-5, 1\}$ $B = \{x \mid x^2 + 4x - 5 = 0\}$ 那么 $A = B$

解: 适合条件 $x^2 + 4x - 5 = 0$ 的 x 有两解, $x_1 = -5, x_2 = 1$ 即 $B = \{-5, 1\}$, 所以 A 与 B 的元素完全相同, 即 $A = B$ 。

二、交 集

设集合 $A = \{\text{数学, 力学, 制图, 预算}\}$, $B = \{\text{钢结构, 数学, 力学}\}$, 集合 $C = \{\text{数学, 力学}\}$ 是由既属于 A 又属于 B 的一切元素所组成的集合, 这时, 我们叫集合 C 是集合 A 与 B 的交集。也就是说, 把由 A 与 B 的所有公共元素所组成的集合叫做 A 与 B 的交集。记作 $A \cap B$ (读作 “ A 交 B ”)

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

上面例子中的集合 C , 就叫集合 A 和 B 的交集, 可记为 $C = A \cap B$ 。集合 A 与 B 的交集可用图1-2的阴影部分表示。

对于任意集合 A 都有

$$A \cap A = A \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$

〈例 3〉 设 $A = \{x \mid 1 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x \mid -1 \leq x \leq 2\}$, 求 $A \cap B$

解: $A \cap B = \{x \mid 1 \leq x \leq 3\} \cap \{x \mid -1 \leq x \leq 2\} = \{x \mid 1 \leq x \leq 2\}$

如图1-3所示。

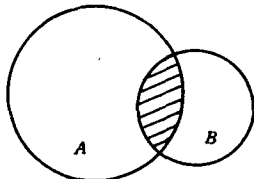


图 1-2

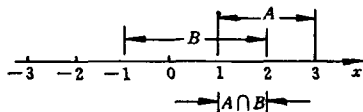


图 1-3

〈例4〉 设满足方程 $x + y = 7$ 的数对 (x, y) 的集合为 A , 满足方程 $x - y = 1$ 的数对 (x, y) 的集合为 B , 求 $A \cap B$ 。

已知: $A = \{(x, y) | x + y = 7\}$, $B = \{(x, y) | x - y = 1\}$

求: $A \cap B$

解: $A \cap B = \{(x, y) | x + y = 7\} \cap \{(x, y) | x - y = 1\}$

$$= \left\{ (x, y) \left| \begin{array}{l} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{array} \right. \right\}$$

$$= \{(4, 3)\}$$

三、并 集

设集合 $A = \{\text{数学, 制图, 力学}\}$, $B = \{\text{数学, 钢结构, 力学}\}$, 把 A 与 B 两个集合的

元素合并起来, 可以组成一个集合 $C = \{\text{数学, 制图, 钢结构, 力学}\}$, 对于这样的集合 C , 叫集合 A 与 B 的并集。也就是说, 把集合 A 与集合 B 的所有元素合并在一起所组成的集合, 叫做集合 A 与 B 的并集, 记作 $A \cup B$ (读作 “ A 并 B ”), 即 $A \cup B = \{x | x \in$

A 或 $x \in B\}$ 。

上面例子中的集合 C , 就叫集合 A 和 B 的并集, 可记为 $C = A \cup B$ 。

$A \cup B$ 可用图1-4 (a) 或 (b) 的阴影部分表示。

〈例5〉 设 $A = \{2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$ 求 $A \cup B$

解: $A \cup B = \{2, 3\} \cup \{1, 3, 5, 7\}$

$$= \{1, 2, 3, 5, 7\}$$

〈例6〉 设 $A = \{x | 2 \leq x < 3\}$ $B = \{x | 1 < x < 2\}$

求: $A \cup B$

解: $A \cup B = \{x | 2 \leq x < 3\} \cup \{x | 1 < x < 2\}$

$$= \{x | 1 < x < 3\}$$

四、差集和补集

设 $A = \{\text{数学, 力学, 钢结构, 制图}\}$, $B = \{\text{预算, 施工管理, 数学, 力学}\}$, 把属于集合 A 而不属于 B 的所有元素组成一个集合 $C = \{\text{钢结构, 制图}\}$, 对于这样的集合 C 叫集合 A 和 B 的差集。也就是说, A 和 B 两个集合中, 把属于 A 而不属于 B 的所有元素组成的集合, 叫做 A 和 B 的差集。记为: $A - B$ 或 $A \setminus B$ (读作 “ A 减 B ”) 即

$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$$

上面例子中的集合 C 可记为 $C = A \setminus B$, 集合 A 和 B 的差集 $A \setminus B$ 可用图1-5 的阴影部分来表示。

〈例7〉 设 Z 表示整数集, Q^+ 表示正有理数集。

求 $Z \setminus Q^+$

解: $Z = \{\text{正整数, 零, 负整数}\}$

$Q^+ = \{\text{正整数, 正分数}\}$

$Z \setminus Q^+ = \{\text{零, 负整数}\}$

也可以写成 $Z \setminus Q^+ = Z \cap \{0\}$

$$= \{x \mid x \leq 0, x \in Z\}$$

〈例8〉 设 $A = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$, $B = \{x \mid 0 < x \leq 2\}$

求: $A \setminus B$

解: 根据题意, 分别在数轴上表示集合 A 和 B , 如图1-6。

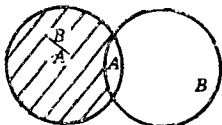


图 1-5

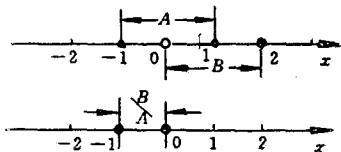


图 1-6

$$\therefore A \setminus B = \{x \mid -1 \leq x \leq 0\}$$

在研究集合与集合之间关系时, 一些集合常常都是某个给定集合的子集, 这个给定的集合叫做全集, 用符号 Ω 表示。也就是说, 全集包含了我们所要研究的各个子集的全部元素。

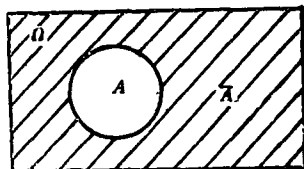


图 1-7

设 Ω 为全集, A 是全集 Ω 的子集即 $A \subseteq \Omega$, 那么全集 Ω 中除去子集 A , 剩下的一切元素组成的集合叫做集合 A 的补集。记为 $\overline{A}$ (读作“ A 补”)即 $\overline{A} = \{x \mid x \in \Omega \text{ 且 } x \notin A\}$ 。 $\overline{A}$ 可以用图1-7的阴影部分表示。

由补集的定义, 可知

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$A \cup \overline{A} = \Omega$$

$$A \cap \overline{A} = \emptyset$$

〈例9〉 设 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $A = \{1, 2, 3\}$

求 $A \cup \overline{A}$ 和 $A \cap \overline{A}$

解:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$\text{那么 } \overline{A} = \{4, 5\}$$

$$A \cup \overline{A} = \{1, 2, 3\} \cup \{4, 5\}$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$= \Omega$$

$$A \cap \overline{A} = \{1, 2, 3\} \cap \{4, 5\}$$

$$= \emptyset$$

〈例10〉 设 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$$A = \{3, 4, 5, 6\}, B = \{5, 6, 7\}$$

(1) 求 $\overline{A \cup B}$

(2) 求证 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

解: (1) $A \cup B = \{3, 4, 5, 6\} \cup \{5, 6, 7\}$
 $= \{3, 4, 5, 6, 7\}$

$$\overline{A \cup B} = \Omega \setminus A \cup B = \{1, 2, 8\}$$

(2) 证明 已知 $A = \{3, 4, 5, 6\}$

$$\text{则 } \overline{A} = \{1, 2, 7, 8\}$$

$$\text{又知 } B = \{5, 6, 7, 8\}$$

$$\text{则 } \overline{B} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$A \cap B = \{3, 4, 5, 6\} \cap \{5, 6, 7, 8\}$$
$$= \{5, 6\}$$

$$\overline{A \cap B} = \Omega \setminus A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 7, 8\}$$

$$\overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 2, 7, 8\} \cup \{1, 2, 3, 4\}$$
$$= \{1, 2, 3, 4, 7, 8\}$$

$$\therefore \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

习 题 1-1

1. 用适当的方法表示下列集合

(1) $A = \{\text{一年中有30天的月份}\}$

(2) $B = \{x \mid 2 < x < 10, x \in \mathbb{Z}\}$

(3) $C = \{\text{平方等于9的数}\}$

2. 用适当的方法表示由下列元素构成的集合

(1) 车床、铣床、刨床、磨床、钻床

(2) 不等式 $x^2 + 6x + 5 > 0$ 的解的集合

(3) 大于等于5的实数

3. 设集合 $A = \{a, b, c\}$, 下列写法哪些正确?

哪些不正确? 为什么?

(1) $a \in A$

(2) $\{b\} \subseteq A$

(3) $\emptyset \in A$

4. 写出 $\{4, 5, 6\}$ 的所有子集

5. 用符号表示下列两个集合之间的关系

(1) $A = \{a, b, c, d, e\}, B = \{a, d, e\}$

(2) $A = \{a, b, c, d, e\}, B = \{a, c, b, e, d\}$

6. 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{1, 2, 6, 7\}$

(1) 求 $A \cup B$

(2) 求 $A \cap B$

(3) 在下面 () 内填上适当的符号 ($\subseteq, \supseteq$)

$A \cup B$ () A

$$A \cup B () B$$

$$A \cap B () A \cup B$$

7. 设 p_1 表示某工程处全体工人的集合, p_2 表示该工程处全体男工人的集合, p_3 表示该工程处全体女工人的集合, p_4 表示该工程处全体干部的集合。

(1) p_1, p_2, p_3, p_4 中哪两个集合相交?

(2) 求 $p_2 \cup p_3$

(3) 求 $p_1 \cup p_4$

(4) $p_1 \cap p_4$

(5) p_1, p_2, p_3, p_4 中哪些集合是 p_1 的真子集

8. 设 $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$$A = \{1, 2, 3\} \quad B = \{3, 4, 5\}$$

$$\text{求: } \overline{A}; \overline{B}; \overline{A \cap B}; \overline{A \cup B}; \overline{A \cap B}; \overline{A \cup B}$$

第三节 函 数

一、函数的定义

在日常生活中, 我们常常会遇到常量与变量的概念。如一本“建筑制图”书的单价是1.20元, 书的册数和书的总价之间就存在着一定的对应关系。在这个问题中, 书的单价是不变的, 我们称之“常量”, 而书的册数(用 x 表示)与总价(用 y 表示)是可以变动的, 我们称之“变量”, 总价 y 与册数 x 的对应关系, 我们可以用 $y = 1.20x$ 元来表示。总价 y 依赖于册数 x , 对于 x 的每一个可能取的值, 按上述的对应关系, y 都有唯一确定的值和它对应。如 x 为5册, 总价则为6元; x 为10册, 总价则为12元。 x, y 虽然都是变量, 但所处的位置不一样, x 就称为自变量, y 就叫 x 的函数。

按上述的例子, 我们给出函数的定义如下:

设在某变化过程中有两个变量 x 和 y , 变量 y 依赖于 x , 如果对于 x 的每一个可能取得的值, 按照某个对应关系, y 都有唯一确定的值和它对应, 那么 y 就叫 x 的函数, x 叫自变量。

“ y 是 x 的函数”可以用记号 $y = f(x)$ 来表示。括号里的 x 表示自变量, y 表示函数, f 既不是常量, 又不是变量, 仅仅是一种符号, 它表示 y 和 x 之间的对应关系。

如果我们要同时研究几个不同的函数关系, 那么就要在括号外采用不同的字母来区别它们。如常用 $F(x), G(x), \varnothing(x)$ 等。

例如圆的面积 A , 周长 S 都是圆半径 r 的函数, 它们的函数关系可以这样表达: $A = F(r), s = f(r)$ 。 F, f 的不同就表示了这两个式子不同的对应关系。

对于自变量 x 的一个值 a , 函数 $f(x)$ 的对应值可以记做 $f(a)$, 例 $f(x) = 3x^2 - 4$ 那么 $f(0) = 3 \times 0^2 - 4 = -4$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \\ &= 3 \times \frac{1}{4} - 4 \end{aligned}$$

$$= -3\frac{1}{4}$$

$$f(1) = 3 \times 1^2 - 4 = -1$$

从上述例子可以看到, 在我们学习的范围内, 自变量 x 每取一个值, 按对应关系, 函数 y 也相应得到一个值。是不是自变量可以任意取值呢? 那不一定。在许多函数关系里, 自变量的变化是有一定范围的, 我们称自变量 x 的所有可能取的值的集合, 叫函数的定义域, 与 x 的值相对应的 y 的值, 叫做函数值, 函数值的集合, 叫函数的值域。

二、区间的概念和函数的定义域

区间的定义如下: 介于两个实数之间的实数的全体叫区间, 这两个实数叫区间的端点。

设 a 、 b 是两个实数, 且 $a < b$

(1) 满足不等式 $a \leq x \leq b$ 的所有实数 x 的集合 $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ 叫做闭区间, 记 $[a, b]$

(2) 满足不等式 $a < x < b$ 的所有实数 x 的集合 $\{x \mid a < x < b\}$ 叫做开区间, 记 (a, b)

(3) 满足不等式 $a < x \leq b$ 的所有实数 x 的集合 $\{x \mid a < x \leq b\}$ 叫左开区间, 记 $(a, b]$

(4) 满足不等式 $a \leq x < b$ 的所有实数 x 的集合 $\{x \mid a \leq x < b\}$ 叫右开区间, 记 $[a, b)$

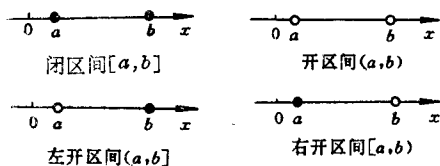


图 1-8

上述四种区间, 在数轴上都可以用一条以 a 和 b 为端点的线段来表示, 如图 1-8 所示。在图上, 包括在区间内的端点用实心点表示, 不包括在区间内的端点用空心点表示。

区间 $(-\infty, +\infty)$ 表示全体实数的集合 R , “ ∞ ” 读作 “无穷大”, “ $-\infty$ ” 读作负无穷大, “ $+\infty$ ” 读作正无穷大。“ ∞ ” 不是数, 仅是记号。

现在我们深入讨论函数的定义域。

在实际问题中, 函数的定义域是根据所研究的对象的实际意义来确定的。如圆面积公式, $A = \pi \cdot r^2$, 半径 r 的值就不能为零或负数, 否则就失去了它的实际意义, 所以函数 $A = \pi \cdot r^2$ 的定义域是 $(0, +\infty)$ 。

对用数学式子来表示的函数, 在没有注明定义域的情况下, 函数的定义域就是指使这个式子有意义的所有实数 x 的集合。

〈例1〉 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \frac{2x}{3x-1}$$

$$(2) y = \sqrt{2+3x}$$

解: (1) 对于函数 $y = \frac{2x}{3x-1}$, 由于分式的分母不能为零, 所以 $x = \frac{1}{3}$ 应除

去, 函数的定义域为 $x \neq -\frac{1}{3}$ 的所有实数集合, 记作 $\{x | x \in R, x \neq -\frac{1}{3}\}$, 或记作

$$\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$$

(2) 对函数 $y = \sqrt{2+3x}$, 只有当 $2+3x \geq 0$ 时根式才有意义, 解此不等式, 得解

$$\text{集} \{x | -\frac{2}{3} \leq x < +\infty\} \text{或记作} \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$$

三、函数的图象

我们知道, 一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的图象是直线, 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$

($a \neq 0$) 的图象是抛物线, 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象是双曲线, 它们都可

以用描点法作出。现在我们来讨论描点法作图的原理。

对于函数 $y = f(x)$, 在其定义域内每取一个 x 值时, 就可以得到一个对应的确定值 y , 以这对 x, y 的值为坐标, 在平面直角坐标系 xOy 内定出一个点 $M(x, f(x))$, 所有这些点组成的集合叫函数 $y = f(x)$ 的图象, (图1-9)。

〈例2〉 作出下列函数的图象

(1) $y = 2x - 1, x \in \{x | x < 0\}$

描点作图, 见图1-10。

x	-2	-1	-0.5
$2x-1$	-5	-3	-2

(2) $y = -\frac{2}{x} \quad x \in \{x | 1 < x < 4\}$

描点作图, 见图1-11。

x	1.5	2	3
$\frac{2}{x}$	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{2}{3}$

(3) $y = x^2 - 4x + 5 \quad x \in R$

先将 $y = x^2 - 4x + 5$ 配方

$$y = (x^2 - 2 \cdot 2x + 2^2) + 5 - 2^2$$

$$= (x-2)^2 + 5 - 4$$

$$= (x-2)^2 + 1$$

描点作图, 见图1-12。

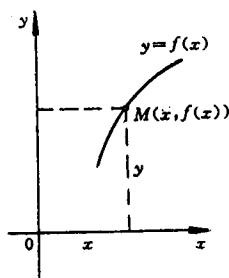


图 1-9

x	0	1	2	3	4
$(x-2)^2+1$	5	2	1	2	5

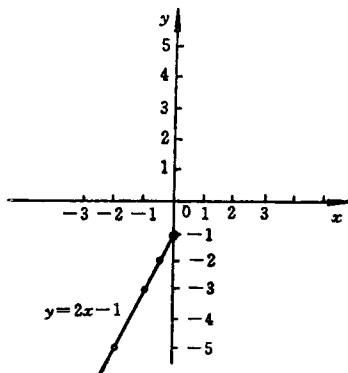


图 1-10

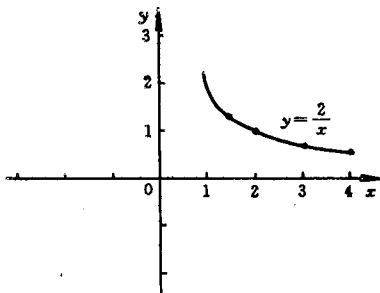


图 1-11

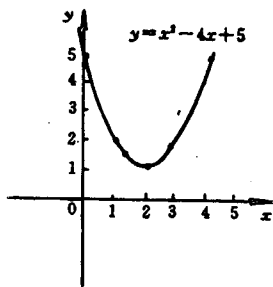


图 1-12

习 题 1-2

1. 某工地打混凝土。已知300*混凝土，每立方米要用水泥412公斤，请列出混凝土体积 V 与水泥用量 w 的函数关系 $w = f(V)$ 。并根据列出的关系式计算250m³300*混凝土需水泥多少公斤？

2. 把一直径 $d = 20\text{cm}$ 的圆木截成截面为长方形的木料，若此长方形截面的一边长为 x ，截面的面积 S ，求以 x 为自变量时，面积 S 的函数，并写出它的定义域。

3. 已知函数 $f(x) = 2x^2 - 5$ ，求 $f(0)$ ， $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ， $f(1)$ ， $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ 和函数的值域。

4. 已知函数 $f(x) = ax + b$ ，且 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 5$ ， $f(1) = 7$ ，求 a 与 b 的值。

5. 求下列函数的定义域[(1)，(2) 用区间表示；(3)，(4) 用集合表示]

(1) $y = x^3 - 3x^2 + 4x + 2$

(2) $y = \frac{x+3}{x-3}$

(3) $y = \sqrt{25 - x^2}$

(4) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{(2x+1)^2}}$

6. 作出下列函数的图象

(1) $y = 3x \quad x \in \{-1, 0, 1\}$

(2) $y = |x| \quad x \in R$

(3) $y = 2x^2 - 3x - 2 \quad x \in R$

小 结

一、本章主要内容是集合，函数的概念。

二、把具有某种共同性质的一些事物组成的全体叫集合，集合里的各个事物叫这个集合的元素。

三、集合与集合之间的关系可以分成子集、交集、并集、补集等。

集合 A 是集合 B 的子集，表示为 $A \subseteq B$ ，如果 $A \subseteq B$ 而且 $B \subseteq A$ ，则 $A = B$

子集与真子集的概念不同,符号也不一样。

A 和 B 的交集,记作 $A \cap B$,它是 A 的子集,也是 B 的子集。同时 $A \cap A = A$,
 $A \cap \emptyset = \emptyset$ 。

A 和 B 的并集表示为 $A \cup B$, A 、 B 与 $A \cap B$ 都是 $A \cup B$ 的子集,同时 $A \cup A = A$,
 $A \cup \emptyset = A$ 。

补集和全集的概念是不可分离的,如果 A 是全集 Ω 的子集,则补集表示为 $\overline{A}$, $\overline{A}$ 也是 Ω 的子集, $A \cup \overline{A} = \Omega$, $A \cap \overline{A} = \emptyset$

四、函数是研究两变量之间的对应关系,一般表示为 $y = f(x)$, x 称为自变量, y 称为函数, f 表示 x 和 y 之间的某种对应关系。我们所学习的函数多数可以用代数式表示,使这个式子有意义的所有自变量 x 值的集合称为函数的定义域,它所对应的 y 值的集合称为函数的值域。应当提出在讨论实际问题时,函数的定义域除符合数学要求外,还要满足实际问题的要求。

五、要掌握描点法,画出函数的图象。

复习题一

1. 用列举法写出与下列集合相等的集合

$$(1) A = \{x \mid x=2 \text{ 且 } x=3\}$$

$$(2) B = \{x \mid x=4 \text{ 或 } x=5\}$$

$$(3) C = \{x \mid x=7\}$$

2. 设 $A = \{\text{二队抹灰班男工人}\}$, $B = \{\text{二队抹灰班女工人}\}$

求: $A \cup B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$

3. 设 $A = \{\text{矩形}\}$, $B = \{\text{菱形}\}$

求: $A \cap B$

4. 设: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$B = \{4, 5, 6, 7\}$$

$$C = \{3, 4, 8\}$$

验证 (1) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

5. 设 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$$

验证: 如果 $P = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$

$$\text{那么 } \overline{P} = (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$$

6. 求下列函数的定义域和值域 (用区间表示)

$$(1) y = \sqrt{5x+8}$$

$$(2) y = \sqrt{x^2}$$

$$(3) y = \sqrt{x^2-9}$$

$$(4) y = \sqrt{3x^2+3}$$

7. 设 $f(x) = x^2 - 3x + 1$, 问 x 为何值时, 方能使下式成立?

$$f(x) + 1 = f(x+1)$$

8. 设正方体的体积为 V , 求出正方体的全面积 S 与体积 V 之间的函数关系? 求函数 $S = f(V)$ 的定义域。