教育科学“十五”国家规划课题研究成果

高等学校经济管理学科数学基础系列教材

总主编 陈文灯 杜之韩

线性代数

黄惠青　梁治安

高等教育出版社

0151.2
257

教育科学"十五"国家规划课题研究成果

高等学校经济管理学科数学基础系列教材

总主编　陈文灯　杜之韩

线性代数

黄惠青　梁治安

高等教育出版社

内容提要

本书是教育科学"十五"国家规划课题"21世纪中国高等学校经济管理类数学课程教学内容和课程体系的创新与实践"项目成果之一。

本书主要特色是结构清晰，概念准确，贴近考研，深入浅出，言简意赅，可读性强，便于学生自学，且能够启发和培养学生的自学能力。本书主要内容有：矩阵、线性方程组、向量空间、特征值和特征向量、二次型、若干经济数学模型。书中每章配有A，B两组习题和参考答案。

本书可作为高等学校经济管理类教材，也适合考研学生参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/陈文灯，杜之韩总主编. —北京：高等教育出版社，2006.6

ISBN 7-04-019378-7

Ⅰ.线… Ⅱ.①陈…②杜… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第054209号

策划编辑 马 丽 **责任编辑** 崔梅萍 **封面设计** 张申申 **责任绘图**
版式设计 陆瑞红 **责任校对** 朱惠芳 **责任印制** 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	**网上订购**	http://www.landraco.com
印　　刷	北京京科印刷有限公司		http://www.landraco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960 1/16	**版　　次**	2006年6月第1版
印　　张	12	**印　　次**	2006年6月第1次印刷
字　　数	220 000	**定　　价**	13.10元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 19378-00

总　　序

在社会科学中，数学的首要应用领域无疑是经济学。马克思认为，一门学科成熟与否的标志就是看其对数学的应用程度。经济学在上世纪飞速发展，其数学工具、模型的应用越来越广泛和深入，这是不可置疑的进步。随着中国加入WTO，经济全球化进程加快和知识经济时代的到来，培养经济学、管理学与数学相结合的复合型人才成为一种大趋势。为了探索和建立我国高等学校经济管理类数学课程教学内容和课程体系，全国高等学校教学研究中心（以下简称“教研中心”）在承担全国教育科学“十五”国家规划课题——“21世纪中国高等教育人才培养体系的创新与实践”研究工作的基础上，决定组织高等学校经济管理专业开展其子项目课题——“21世纪中国高等学校经济管理类数学课程教学内容和课程体系的创新与实践”的研究与探索，以进一步推动和促进高等学校经济管理类数学课程建设。本课题的建设目标是：紧密配合教育部已经启动的“高等学校教学质量与教学改革工程精品课程建设工作”，在经济管理类数学课程教学内容、课程体系和教材建设已经取得的成果基础上，在建设经济管理类专业的校、省、国家三级精品课程的过程中，集中力量，深入探索，在现代教育技术平台上建成适应经济管理类专业创新人才培养需要的数学课程体系和立体化教材体系。本项目得到了高等教育出版社的大力支持与配合，即将推出一批适应经济管理类数学课程需要的立体化教材，并冠以“教育科学‘十五’国家规划课题研究成果”。

在项目的研究过程中，我们始终紧紧围绕着以上建设目标，从经济管理数学教学现状的调查研究与分析入手，不断拓宽专业视野，加强应用和实践的环节，力图在整个项目研究过程中，体现以下几点鲜明特色：

（1）树立科学的发展观，在继承的基础上不断超越

经济数学，即在经济中应用的数学，是经济学与数学相互交叉的一个跨学科的领域。整体项目的研究工作以经管类数学基础课程如何适应现在及未来的经济学、管理学的发展为切入点，全面而深入地进行课程体系和教学内容探索与研究。即在消化与吸收多年来已有的成果基础上，努力实践，大胆创新，要随着经管学科的发展而不断与其融合，真正体现其应用性，这是项目研究工作的

基石。

(2) 以项目研究为先导,为高校教学改革服务

随着我国高等教育的发展和高校教学改革的不断深入,特别是随着教育部"高等学校教学质量和教学改革工程"的启动和实施,建设一批具有示范性和适应性的经管数学精品课程教材已经成为一种迫切的要求,而这些工作需要通过深入的研究和探索作为支撑。2003 年 8 月,在西安召开的高等学校非数学类专业数学课程教学基本要求研讨会上,经管项目小组成员集中讨论了在当前经管专业不断扩招的新形势下,应该如何制定与经管类专业数学教学相适应的基本要求。并对《经济管理类数学课程教学基本要求(初稿)》提出了很多具有建设性的意见和构想。目前修改稿在全国范围内征求意见。2003 年 12 月,国内九所财经类院校(中央财经大学、上海财经大学、对外经济贸易大学、西南财经大学、南京财经大学、东北财经大学、江西财经大学、山西财经大学、中南财经政法大学)的专家学者齐聚北京,在深入分析现阶段我国对经济管理类人才需求,并在广泛征求一线教师的意见基础上,根据《经济管理类数学课程教学基本要求》修改稿着手编写一套具有先进性、适用性、示范性和系统性的精品教材,为各高校进行相关专业课程体系和教学内容的设计与改革提供参考。

(3) 注重学科的交叉融合,建设立体化资源体系

经管类数学基础课程应重视数学、计算机技术与经济管理学的交叉结合,充分利用各个学校经济学和管理学的资源优势,强调基本概念的阐述,简化理论推导,反映科学技术的发展水平,突出学生的个性发展。经管类数学基础课程教材及教学资源的建设在项目研究的基础上,不断研制和开发系列教材相关配套教学资源,即注重配套的教学参考书、学习指导书、电子教案、多媒体课件、网络课程等的研发,鼓励先进的教学方法和手段特别是信息技术的应用。

(4) 进行分类指导,建设交流共享平台

如今,知识结构完整、适应性强、动手能力强的经济管理复合型人才越来越受到欢迎,同时,对经济管理人才需求的层次化和多样性也带来了高等院校经管专业定位的层次化和多样性,因此需要通过研究对各高校的经管专业进行分类指导。此外,还要为广大的教师搭建一个交流共享的平台,强调师资培训的重要性,将通过各种层面和形式的示范交流与师资培训,帮助广大一线教师提高教学水平,促进先进教学经验和优秀教学资源的交流与推广,帮助各高校加快课程体系和教学内容更新的步伐。

在新的世纪,经济管理类数学基础课程改革将不断培养出满足市场需求的人才,寻找自身的新定位,项目研究也将在对国内外经济管理类专业数学教学内容和课程体系进行深入研究的基础上,吸取各项教改成果,从而快速有效地建立

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

起一个高水平的学习环境，为建立具有中国特色的适应21世纪人才培养需要的经管数学教材和全面提高经管数学教学质量而不懈努力。

全国高等学校教学研究中心

2003年4月

前　　言

为了配合教育部高等学校教学质量与教学改革工程精品课程建设工作，全国高等学校教学研究中心于2003年8月通过招标的形式，确定和组织了中央财经大学、西南财经大学、上海财经大学、中南财经政法大学、对外经济贸易大学、东北财经大学、江西财经大学、山西财经大学、南京财经大学等九所高校的专家、教授组成课题组，开展了"21世纪中国高等学校经济管理类数学课程教学内容和课程体系的创新与实践"立项课题的研究。在共同分析和研究了国内外经济管理类数学教学与教材的特点及当前高校中数学教学的现状以及教材资源现状后，大家一致认为：编写一套既传承国内外教材的优良传统，又反映时代对数学教育的新要求，且有较强生命力的教材非常必要。新教材应该在充分发掘、归纳、提炼高等学校经济管理类数学课程教学经验、教材改革经验与教材编写经验的基础上做到有所创新；新教材应该做到基本概念、基本理论表述准确，内容叙述深入浅出，言简意赅，可读性强，便于学生自学，且能够启发和培养学生的自学能力。课题组为此成立了高等学校经济管理学科数学基础系列教材编审委员会，负责拟订教材编写大纲并组织实施创新教材的编写、审稿和定稿工作。

现在呈现在大家面前的这套高等学校经济管理学科数学基础系列教材就是历经两年的"21世纪中国高等学校经济管理类数学课程教学内容和课程体系的创新与实践"立项课题研究与工作的成果。本套教材有如下特点：

1. 教材由主、辅两部分组成。主教材由《微积分（上册）》、《微积分（下册）》、《线性代数》、《概率论与数理统计》4册组成。辅教材为上述4册的同步辅导书，是为学生释疑解惑并帮助其理解概念、理论，掌握题型解法和技巧的。它们将在主教材出版后出版，便于不同的读者选用。

2. 教材在现行经济管理类数学教学基本要求的基础上略有拓宽与加深，以满足近年来高等学校中部分新增专业对数学基础的更高要求。此外，考虑到经济管理类专业数学教学的目标与特点，在保证数学的严谨性、逻辑性的前提下，教材删除了一些不必要的推理论证过程，突出了理论的应用，强化理论与实际的结合。

3. 将微积分、线性代数、概率论与数理统计3门课程的应用部分单独成章，

置于书末，以方便教师根据不同专业的需要选用。

4. 教材编入了比较丰富的习题，适当融入了一些研究生入学考试内容，选用了近年全国研究生数学入学统一考试中的部分优秀试题，为准备报考硕士研究生的学生提供基础支持。在主教材的同步辅导书中，这方面的作用得到更进一步的强化。

现在面世的这本《线性代数》由黄惠青、梁治安主编，参加编写的还有李敏、刘康泽、张远征、陈美霞等。

本套高等学校经济管理学科数学基础系列教材在编写过程中得到了东北财经大学、中央财经大学、高等教育出版社各方领导的大力支持，高等教育出版社马丽编辑及其他工作人员在整个组稿过程中做了大量的工作，编委会在此对他们表示由衷的感谢！

恳请使用本教材的师生多提宝贵意见，以便我们再版时改进。

高等学校经济管理学科数学基础系列教材

编委会

2005 年 11 月

目　录

第1章 矩阵

矩阵是从许多实际问题中抽象出来的一个数学概念，是线性代数的一个重要组成部分．它在自然科学的各个领域以及经济管理、经济分析中有着广泛的应用．

§1.1 矩阵的概念

一、引例

例1 由 m 个方程、n 个未知量构成的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1.1}$$

称为 $m\times n$ 线性方程组，当 $m=n$ 时，(1.1)称为 n 元线性方程组．

将线性方程组(1.1)中每个方程的未知量系数及常数项取出，按其在(1.1)式中原有的相对位置排成一个矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

显然，线性方程组(1.1)与该矩形数表是一一对应的，因此对线性方程组(1.1)的研究(线性方程组是否有解以及在有解的情况下如何求解)就可转换成对这个矩形数表的研究．我们称此矩形数表为线性方程组(1.1)的增广矩阵，记为 $\overline{A}$．

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

例 2 某种物资有 3 个产地、4 个销地，调配方案如表 1.1：

表 1.1

吨数 销地 / 产地	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1	2	3	4
x_2	3	1	2	0
x_3	4	5	1	2

则表中的数据可构成一个矩形数表

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

数表中的每一个数据都表示从某个产地运往某个销地的吨数. 我们称此矩形数表为供销矩阵.

不同的问题有不同的矩形数表，去掉数表中数据的具体含义，我们用矩阵这个概念来描述它.

二、矩阵的概念

定义 1.1 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的一个 m 行 n 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个 $m\times n$ 矩阵，其中 a_{ij} 称为矩阵的第 i 行第 j 列元$(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$.

一般用大写黑斜体字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots$ 表示矩阵. 有时为了指明矩阵的行数和列数，也把 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 记为 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$. 若 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列元为 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，则也可把 $\boldsymbol{A}$ 记为 $(a_{ij})_{m\times n}$.

特别地，当 $m=n$，即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数等于列数时，称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵（或 n 阶矩阵），即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

其中 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线元.

当 $m=n=1$ 时,我们把一阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a)$ 视同普通的数 a.

当 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中所有的元均为零时,称 $\boldsymbol{A}$ 为零矩阵,记为 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$. 在不引起混淆的情况下,可简记为 $\boldsymbol{O}$.

三、几种特殊的方阵

1. 对角矩阵:如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 中的元满足 $a_{ij}=0,i\neq j(i,j=1,2,\cdots,n)$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为对角矩阵,即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

通常也把对角矩阵记为 $\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$.

2. 数量矩阵:如果 n 阶对角矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中元 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=a$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为数量矩阵,即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}$$

特别地,当 $a=1$ 时,该数量矩阵称为单位矩阵,记为 $\boldsymbol{E}_n$ 或 $\boldsymbol{E}$(有的教材记为 $\boldsymbol{I}_n$ 或 $\boldsymbol{I}$),即

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

3. 上(下)三角形矩阵:如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 中的元满足 $a_{ij}=0,i>j(i,j=1,2,\cdots,n)$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为上三角形矩阵,即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 中的元满足 $a_{ij}=0,i<j(i,j=1,2,\cdots,n)$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为下三角形矩阵,即

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

4. 对称矩阵：如果 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 中的元满足

$$a_{ij}=a_{ji} \quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

则称 A 为对称矩阵，即

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

例如 $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ 为 2 阶对称矩阵，$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 为 3 阶对称矩阵.

5. 反称矩阵：如果 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 中的元满足

$$a_{ij}=-a_{ji} \quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

则称 A 为反称矩阵.

由以上定义可看出，若 A 为反称矩阵，则 $a_{ii}=-a_{ii}$，即 $a_{ii}=0$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 因此反称矩阵的主对角线元全为 0，即

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

例如 $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ 为 2 阶反称矩阵，$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ 为 3 阶反称矩阵.

§1.2 矩阵的运算

矩阵的意义不仅在于将一些数据排成一个矩形数表，而且在于对它定义了一些有理论意义和实际意义的运算，从而使它成为进行理论研究和解决实际问题的有力工具.

定义 1.2 如果 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$ 是两个 $m\times n$ 矩阵，且满足

$$a_{ij}=b_{ij} \quad (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

则称矩阵 A 与矩阵 B 相等，记为 $A=B$.

例 1 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a\\ 2-b & 3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}c+1 & -4\\ 0 & 3d\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，试求 a,b,c,d.

解 因为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，有

$$1=c+1,\quad a=-4,\quad 2-b=0,\quad 3=3d$$

解得 $a=-4,b=2,c=0,d=1$.

一、矩阵的加法

定义 1.3 两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 的和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 指的是 $m\times n$ 矩阵 $(a_{ij}+b_{ij})$，即

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij})_{m\times n}+(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}.$$

矩阵的加法就是两个矩阵对应的元相加. 显然，两个矩阵只有当行数相同，列数也相同时才能相加.

例 2 某种物资(单位：t)从两个产地运往三个销地，两次调运方案分别为供销矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 0 & 3 & 3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3 & 3 & 1\\ 4 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

则从各产地运往各销地两次的物资调运总量为：

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 0 & 3 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 3 & 1\\ 4 & 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+3 & 1+3 & 4+1\\ 0+4 & 3+0 & 3+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 4 & 5\\ 4 & 3 & 6\end{pmatrix}$$

由于矩阵的加法为它们对应元的相加，也就是数的加法，所以不难证明，矩阵的加法具有以下性质：

(设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{O}$ 均为 $m\times n$ 矩阵)

1. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$
2. $\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}$
3. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$
4. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，称矩阵 $(-a_{ij})_{m\times n}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵，记为 $-\boldsymbol{A}$，则有

$$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$$

由矩阵加法及负矩阵的定义，我们可以定义矩阵的减法：

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$$

即
$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=(a_{ij})_{m\times n}+(-b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}$$

二、数与矩阵的乘积

定义 1.4 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵，k 为常数，数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积指的是矩阵 (ka_{ij})，记为 $k\boldsymbol{A}$. 即

$$kA=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积就是把 $\boldsymbol{A}$ 中每个元都乘以 k.

例 3　设从甲、乙、丙三地到一、二、三、四号仓库每吨产品的运费(单位:元)矩阵为 $\boldsymbol{A}$,

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{c} \\ 甲 \\ 乙 \\ 丙 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 一 & 二 & 三 & 四 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 10 & 15 & 8 & 20 \\ 5 & 10 & 15 & 8 \\ 6 & 4 & 10 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

如果运费平均上涨 20%,试求上涨后的运费矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解　$$\boldsymbol{B}=(1+0.2)\boldsymbol{A}=1.2\times\begin{pmatrix} 10 & 15 & 8 & 20 \\ 5 & 10 & 15 & 8 \\ 6 & 4 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1.2\times10 & 1.2\times15 & 1.2\times8 & 1.2\times20 \\ 1.2\times5 & 1.2\times10 & 1.2\times15 & 1.2\times8 \\ 1.2\times6 & 1.2\times4 & 1.2\times10 & 1.2\times5 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 12 & 18 & 9.6 & 24 \\ 6 & 12 & 18 & 9.6 \\ 7.2 & 4.8 & 12 & 6 \end{pmatrix}$$

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 矩阵,k,t 为常数,容易证明,数与矩阵的乘积具有以下性质:

1. $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$;
2. $(k+t)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{A}$;
3. $(kt)\boldsymbol{A}=k(t\boldsymbol{A})=t(k\boldsymbol{A})$;
4. $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A},0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$;
5. 若 $k\neq0,\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$,则 $k\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$.

例 4　求矩阵 $\boldsymbol{X}$,使 $3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X}=3\boldsymbol{B}$,其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

解　由 $3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X}=3\boldsymbol{B}$,得

$$2\boldsymbol{X}=3\boldsymbol{B}-3\boldsymbol{A}=3(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})$$

即
$$\boldsymbol{X}=\frac{3}{2}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})$$

所以
$$X=\frac{3}{2}\left[\begin{pmatrix}1&2&4\\3&0&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&2&0\\1&2&-3\end{pmatrix}\right]$$
$$=\frac{3}{2}\begin{pmatrix}2&0&4\\2&-2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&6\\3&-3&3\end{pmatrix}$$

三、矩阵的乘积

例 5 某单位计划在 2008 年与 2009 年两年内建造三种类型的房屋，建造每种类型房屋的数量（单位：100 m^2）如表 1.2 所示，每 100 m^2 房屋各种材料的耗用量如表 1.3 所示. 试求 2008 与 2009 年所需各种材料的数量.

表 1.2

类型 / 年份	甲	乙	丙
2008	a_{11}	a_{12}	a_{13}
2009	a_{21}	a_{22}	a_{23}

表 1.3

材料 / 类型	水泥/t	钢筋/t	木材/m^3
甲	b_{11}	b_{12}	b_{13}
乙	b_{21}	b_{22}	b_{23}
丙	b_{31}	b_{32}	b_{33}

解 依题意，2008 与 2009 年所需各种材料的数量为表 1.4.

表 1.4

材料 / 年份	水泥/t	钢筋/t	木材/m^3
2008	$a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}$	$a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}$	$a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33}$
2009	$a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}$	$a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}$	$a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33}$

如果用矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 分别表示表 1.2、表 1.3、表 1.4 中的数据，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com