掌握奥赛解题方法　从容应对升学考试

NEW Sunshine 新阳光™

新阳光 金牌奥赛

《新阳光·金牌奥赛》编委会 编

高中数学奥赛
解题方法与练习

强化素质教育·激发创新灵感
指导解题技巧·提升实践能力

北京出版社出版集团
北京教育出版社

掌握奥赛解题方法 从容应对升学考试

NEW 新阳光 Sunshine™

新阳光 金牌奥赛

本册主编：李海军

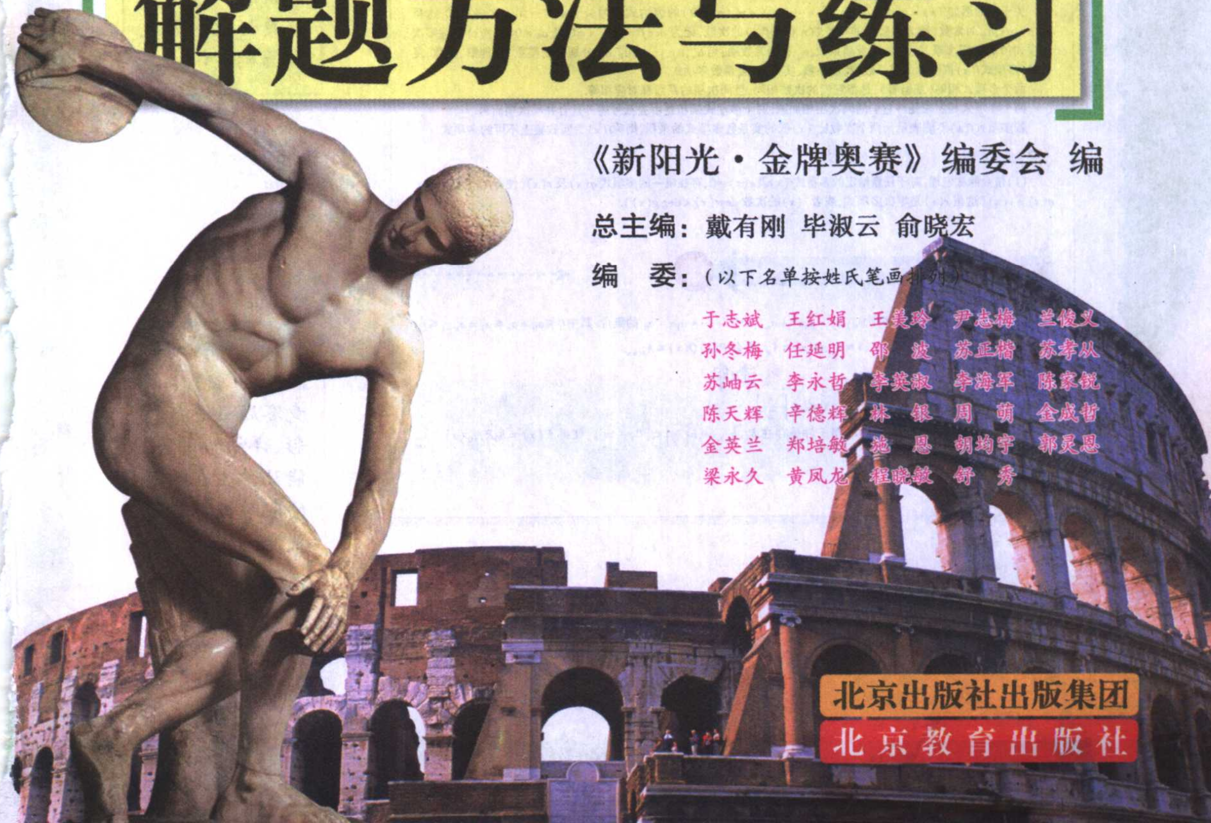
高中数学奥赛解题方法与练习

《新阳光·金牌奥赛》编委会 编

总主编：戴有刚 毕淑云 俞晓宏

编 委：（以下名单按姓氏笔画排列）

于志斌 王红娟 王美玲 尹志梅 兰俊义
孙冬梅 任延明 邵 波 苏正楷 苏孝从
苏岫云 李永哲 李英淑 李海军 陈家锐
陈天辉 辛德辉 林 银 周 萌 金成哲
金英兰 郑培敏 施 恩 胡均宇 郭灵恩
梁永久 黄凤龙 程晓敏 舒 秀



北京出版社出版集团
北京教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

新阳光金牌奥赛解题方法与练习. 高中数学/彩色版/新阳光金牌奥赛编委会 编.—北京:北京教育出版社,2006

ISBN 7-5303-4894-9

Ⅰ.新… Ⅱ.新… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 160420 号

选题策划:张伟明　　责任编辑:杨晓红　马静　阳华　刘振华

封面设计:翟树成　　版式设计:贾连庆

新阳光

金牌奥赛

高中数学奥赛解题方法与练习

本册主编: 李海军

北京出版社出版集团
北京教育出版社　出版
(北京市北三环中路 6 号)
邮政编码:100011

北京出版社出版集团总发行
新华书店经销
北京科文天和印刷有限公司印刷

760×1 000 毫米　16 开本　21 印张　250 000 字
2006 年 5 月第 1 版　　2006 年 5 月第 1 次印刷
印数 1-12 000

ISBN 7-5303-4894-9/G·4811

定价:26.00 元

本书编辑特色

版块设计新颖，知识讲解思路清晰，具有系统性。灵活的新颖题型帮你找到解题的金钥匙。

第八章

多项式

多项式理论是代数学中一个重要内容. 初中阶段学习的一元二次多项式是最简单、最基本的多项式. 本讲对多项式理论从两个方面作进一步地探讨. 一方面从多项式的系数,引入次数大于等于3的高次多项式;另一方面从多项式的系数,引入整系数多项式、有理系数多项式、实系数多项式以及复系数多项式,相应地,将关于一元二次多项式的因式定理、根与系数关系的韦达定理作了推广. 因此在本讲学习中可参照一元一次方程的解题方法. 此外,本讲内容又与整数理论中相应内容有所类似,因此处理整数问题的许多手段,也是解决多项式问题的常用方法.

知识讲解

1 基本概念

关于 x 的形如 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\ (a_n\neq0)$ 的表达式称为关于 x 的一元 n 次多项式,这里 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 为常数(称为系数);非负整数 n 称为 $f(x)$ 的次数,记为 $\deg f(x)$;当 $n=0$ 且 $a_0\neq0$ 时,$f(x)$ 称为零次多项式;0 称为零多项式. a_n 称为首项系数,a_0 称为常数项;当 $a_n,a_{n-1},\cdots,a_1,a_0$ 分别全是整数、有理数、实数、复数时,多项式 $f(x)$ 依次称为整系数、有理系数、实系数、复系数多项式.

两个多项式相等(或恒等),是指它们的次数相同,且同次项的系数都对应相等.

两个多项式相加减是将它们的同次项相加减;两个多项式乘积是由去括号展开且合并同次项而得.

若多项式 $f(x)$ 不能表示为两个次数比 $f(x)$ 低的实系数多项式的乘积,则称 $f(x)$ 为实数集上不可约多项式.

2 常用定理

(1)带余除法定理:对于任意给定的多项式 $f(x)$ 及 $g(x)\neq0$,存在唯一的多项式 $q(x)$ 及 $r(x)$,使得 $f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x)$(这里 $r(x)$ 是零次多项式,或者 $r(x)$ 的次数 $\deg r(x)<\deg g(x)$).

赛题精讲

例1 设 A_n 是所有多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的集合. 其中 $0\leqslant a_0=a_n\leqslant a_1=a_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant a_{[\frac{n}{2}]}=a_{[\frac{n+1}{2}]}$. 求证:如果 $P(x)\in A_n,Q(x)\in A_m$,那么 $P(x)Q(x)\in A_{m+n}$.

证明

记 $R_{n,i}(x)=x^i+x^{i+1}+\cdots+x^{n-i},0\leqslant i\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]$.

容易发现 $P(x)\in A_n$ 的充分必要条件是存在 $b_0,b_1,\cdots,b_{[\frac{n}{2}]}\in[0,+\infty)$,使得 $P(x)=b_0R_{n,0}(x)+b_1R_{n,1}(x)+\cdots+b_{[\frac{n}{2}]}R_{n,[\frac{n}{2}]}(x)$,

1 知识讲解

根据学习实际，对章节的内容知识进行详细的讲解，帮助大家更好地掌握数学基础知识。

2 赛题精讲

对近年来的竞赛题目进行精彩、详细的讲解，能让学生在学习的同时提高解题技能。

3 分析

抓住知识的关键点，注意规律的提示、方法的总结和技巧的培养，提升分析、解决问题的能力。

证法一

连接 BP、PF、EQ、QC，连 PQ 交 BF 于点 K，连 FQ 交 BE 于 L，连 BQ 交 FC 于 M.

$\because \triangle BPK$ 和 $\triangle KPF$ 共边，

$$\therefore \frac{BK}{KF}=\frac{S_{\triangle BPK}}{S_{\triangle KPF}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot PB\cdot PK\cdot\sin\angle BPK}{\frac{1}{2}\cdot PF\cdot PK\cdot\sin\angle FPK}=\frac{PB\cdot\sin\angle BPK}{PF\cdot\sin\angle FPK}$$

同理 $\frac{FL}{LQ}=\frac{EF\cdot\sin\angle FEB}{EQ\cdot\sin\angle BEQ}$，$\frac{QM}{MB}=\frac{QC\cdot\sin\angle QCF}{CB\cdot\sin\angle FCB}$.

$\because \angle PAF=\angle PAB$，$\angle APF=\angle ABP$，

$\therefore \triangle APF\backsim\triangle ABP$，

$\therefore \frac{BP}{PF}=\frac{AP}{AF}$，同理，$\frac{EF}{BC}=\frac{AF}{AC}$，$\frac{QC}{EQ}=\frac{AC}{AQ}$.

又 $\because \angle BPK=\angle BEQ$，$\angle FEB=\angle FCB$，$\angle QCF=\angle FPK$，且 $AP=AQ$，

$\therefore \frac{BK}{KF}\cdot\frac{FL}{LQ}\cdot\frac{QM}{MB}=1$，

由塞瓦定理的逆定理知，PQ、BE、CF 相交于一点 H，即 P、Q、H 三点共线.

分析

塞瓦定理的逆定理是证明三线共点的根据，但有时我们可以把三点共线的问题化为三线共点的问题来处理，证法一就是一个典型的例子.

4 证法

具体指导试题的求证方法，使学生在实践时做到举一反三、触类旁通。

知识训练

1. 如图 1－21，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=\frac{5\pi}{8}$，$\angle ABC=\frac{\pi}{8}$，求证它的内角平分线 CF、中线 BE 和高 AD 三线共点.（1984・希腊数学奥林匹克题）

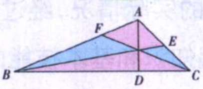


图 1－21

2. 三角形 ABC 为锐角三角形，AD 为该三角形的一条高. 设 P 为线段 AD 上一点，直线 BP、CP 分别交 AC、AB 于点 E、F，证明：DA 平分 $\angle EDF$.（第 14 届爱尔兰数学奥林匹克竞赛题）
3. 在正 $\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 上有内分点 D、E、F 将边分成 $3:(n-3)\ (n>6)$. 线段 AD、BE、CF 相交所成的三角形面积是正三角形面积的 $\frac{4}{49}$ 时，求 n 的值.（1992・日本数学奥林匹克预选题 6）
4. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=12$，$AC=16$，M 是 BC 中点，E、F 分别在 AB、AC 上，EF 交 AM 于 G，$AE=2AF$，求比值 $\frac{EG}{GF}$.（1990・第 29 届 IMO 预选题）
5. 在 $\triangle ABC$ 中，AN 是 A 到 $\angle ABC$ 的平分线所作的垂线，N 为垂足；AM、CL 分别是 A、C 到 $\angle C$、$\angle B$ 的平分线所作的垂线，M、L 为垂足，MN 的延长线交 AC 与 F，BF 的延长线交 CL 于 E，BL 交 AC 于 D. 求证：$DE/\!/MN$.（1996・江苏省竞赛题 3）
6. 设 M、N 是 $\triangle ABC$ 内部的两个点，且满足 $\angle MAB=\angle NAC$，$\angle MBA=\angle NBC$. 证明：$\frac{AM\cdot AN}{AB\cdot AC}+\frac{BM\cdot BN}{BA\cdot BC}+\frac{CM\cdot CN}{CA\cdot CB}=1$.（1998・IMO 预选题）
7. $\triangle ABC$ 的内切圆分别切三边 BC、CA、AB 于点 D、E、F，点 X 是 $\triangle ABC$ 的一个内点，$\triangle XBC$ 的内切圆也在 D 点与 BC 边相切，并与 CX、XB 分别相切于点 Y、Z，证明：四边形 $EFZY$ 是圆内接四边形.（第 36 届 IMO 预选题）

5 精美插图

针对具体的内容配以精美的插图，让大家在学习的同时更有良好的视觉享受。

6 知识训练

通过练习大量的竞赛试题、模拟试题，对各个知识点进行系统的专业化训练，这样不但能巩固原有的基础知识，也能达到提升解题能力的目的。

前言

用最简单的方法解最难的题——这就是奥赛解题方法吸引学生眼球的最根本的原因。

多年来，许多教师、家长和学生都在苦苦追寻着：哪种方法更能开阔视野、启迪思维、开发智力、提升能力？怎样才能在不断创新的竞赛中运筹帷幄？怎样才能把知识转化为能力？

这些想法其实存在着一定的误区，中医讲究把脉，奥赛也一样，只要你把住了它的脉，问题就会变得极其简单。

《新阳光金牌奥赛——高中数学奥赛解题方法与练习》一书就是在奥校教练员、部分省市教研员依据最新教学教材、教学大纲、考试说明和奥赛说明，结合奥赛智力训练的实际情况，经过大量细致的调研、认真分析，针对高中生应具备的学科基础知识和基本技能的前提下，顺应着由浅入深的脉动编写而成的。

本书具有以下特色：

一、在快乐中学习，适用于所有想学奥赛数学的同学

本书涵盖了高中数学的全部基础知识、基本方法、基本技能和学科思想，并对课本内容做了必要概述、合理变通和适当拓展。本书由浅入深的解析、重点突出的评述、竞赛训练题的罗列，会使同学们在瞬间感受到游刃于课本与课外之间的快乐。

二、本书所选训练题具有典型性、通透性

最简单的方法往往适用于最难的题。因此本书通过典型习题，富有

启发性的解答，对于较难的习题进行详尽透彻的分析，使学生能顺着分析的脉搏，开动脑筋，悟出自己的解题方法来。

三、缩短知识与实践的距离

怎样把知识转化为能力？本书对此进行了详尽的诠释。它既考虑到内容编排的科学性，又注意到它的可读性，层次清晰，拓展了同学们对各种题型的解题思路，提高了把握关键问题的能力。最重要的是同学们会在本书中发现解题的规律技巧和解题的关键，对消化、掌握知识有巨大的帮助。

四、高才生轻巧攻关的摇篮

本书整合了目前社会上众多奥赛训练方法的精髓，深入浅出地演示了精彩的解题方法，加上本书画龙点睛的归纳总结，为高才生提供了超前的、全面的解题方法，也为同学们参加奥赛或各种升学考试起到相当大的指导作用，是同学们学习奥赛数学的最新、最快捷的方式。

由于时间仓促，书中难免谬误之处，敬请批评指正。

目录

代数

几何

代数

DAI SHU

第一章 集合、映射

知识讲解

1 集合、映射

(1)集合:集合与集合间的子集、真子集、等集的关系;集合间的交、并、补运算.

(2)映射与函数:函数是非空数集 A 到非空数集 B 的映射,函数的定义域与值域是其图象覆盖的 x 轴与 y 轴的范围.

2 有限集元素的数目

(1)有限集的阶:有限集 A 的元素数目叫做这个集合的阶,记作 $|A|$[或 $n(A)$].

(2)集族的阶:若 M 为由一些给定的集合构成的集合,则称集合 M 为集族.

设 A 为有限集,由 A 的若干个子集构成的集合称为集合 A 的一个子集族,求满足一定条件的集族的阶是一类常见的问题.

显然,若 $|A|=n$,则由 A 的所有子集构成的子集族的阶为 2^n.

3 映射,映射法

定义1　设 X 和 Y 是两个集合(二者可以相同).如果按照某种对应关系 f,对于每个 $x\in X$,都有唯一确定 $y\in Y$ 与之对应,则称这个对应关系为 X 到 Y 的映射,记为 $f:X\to Y$ 或 $y=f(x):x\in X\to y\in Y$.这时,$y=f(x)\in Y$ 称为 $x\in X$ 的象,而 x 称为 y 的原象.特别当 X 和 Y 都是数集时,映射 f 称为函数.

定义2　设 f 为从 X 到 Y 的一个映射.

(1)如果对于任何 $x_1,x_2\in X,x_1\neq x_2$,都有 $f(x_1)\neq f(x_2)$,则称 f 为单射;

(2)如果对于任何 $y\in Y$,都有 $x\in X$,使得 $f(x)=y$,则称 f 为满射;

(3)如果映射 f 既为单射又为满射,则称 f 为双射;

(4)如果 f 为满射且对任何 $y\in Y$,恰有 X 中的 m 个元素 $x_1,x_2,\cdots,x_m$,使得 $f(x_i)=y,i=1,2,\cdots,m$,则称 f 为(倍数为 m 的)倍数映射.

定理1　设 X 和 Y 都是有限集,f 为从 X 到 Y 的一个映射,

(1)如果 f 为单射,则 $|X|\leqslant|Y|$;

(2)如果 f 为满射,则 $|X|\geqslant|Y|$;

(3)如果 f 为双射,则 $|X|=|Y|$;

(4)如果 f 为倍数为 m 的倍数映射,则 $|X|=m|Y|$.

定理2　设有限集 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,f 是 A 到 A 上的映射,记 $f_1(x)=f(x),f_{r+1}(x)=f[f_r(x)](x\in A,r\in\mathbf{N}^*)$,则 f 是一一映射(即双射)的充要条件是:对任意 $a_i\in A$,存在 $m_i\in\mathbf{N}^*,1\leqslant m_i\leqslant n$,使得 $f_{m_i}(a_i)=a_i$,而 $f_s(a_i)\neq a_i(s\in\mathbf{N}^*,1\leqslant s\leqslant m_i-1)$.

赛题精讲

例1　已知集合 $A=\{(x,y)\mid |x|+|y|=a,a>0\}$,$B=\{(x,y)\mid |xy|+1=|x|+|y|\}$.若 $A\cap B$ 是平面上正

八边形的顶点所构成的集合,则 a 的值为______.

解

点集 A 由顶点为 $(a,0)$, $(0,a)$, $(-a,0)$, $(0,-a)$ 的正方形的四条边构成(如图1-1).

将 $|xy|+1=|x|+|y|$,变形为 $(|x|-1)(|y|-1)=0$,所以,集合 B 由四条直线 $x=\pm1, y=\pm1$ 构成.

欲使 $A\cap B$ 为正八边形的顶点所构成,只有 $a>2$ 或 $1<a<2$ 这两种情况.

(1)当 $a>2$ 时,由于正八边形的边长只能为2,显然有 $\sqrt{2}a-2\sqrt{2}=2$,

故 $a=2+\sqrt{2}$.

(2)当 $1<a<2$ 时,设正八边形边长为 l,则

$l\cos45^\circ=\dfrac{2-l}{2}, l=2\sqrt{2}-2$,

这时,$a=1+\dfrac{l}{2}=\sqrt{2}$.

综上所述,a 的值为 $2+\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2}$ 时.

分析 可作图,以数形结合法来解之.

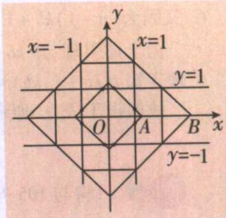


图1-1

例2 设有集合 $A=\{x|x^2-[x]=2\}$ 和 $B=\{x||x|<2\}$,求 $A\cap B$ 和 $A\cup B$(其中 $[x]$ 表示不超过实数 x 之值的最大整数).

分析

应首先确定集合 A 与 B.

从而 $B=\{x|-2<x<2\}$. 显然,$2\in A$.

$\therefore A\cup B=\{x|-2<x\leqslant2\}$.

若 $x\in A\cap B$,则 $x^2=[x]+2, [x]\in\{1,0,-1,-2\}$,

从而得出 $x=\sqrt{3}([x]=1)$ 或 $x=-1([x]=-1)$.

于是 $A\cap B=\{-1,\sqrt{3}\}$.

评述 若将 B 集合改为 $B=\{x||x|<4\}$,则 A 成立是 B 成立的______条件.

例3 证明:正整数集 $\mathbf{N}^*$ 不能分成三个没有公共元素的非空子集,使得从两个不同子集中各任取一个正整数 x、y,而 x^2-xy+y^2 属于第三个子集.(1999 · IMO 预选题)

分析

以否定形式给出的命题适合用反证法证明.

点拨 反证法是证明否定形式给出的命题的一般方法.题中引理体现对集合的理解.

证明

设 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$,假设 $\mathbf{N}^*$ 能分成满足条件的三个子集,则 $\mathbf{N}^*=A\cup B\cup C$,不妨设 $1\in A, b\in B, c\in C$,其中 $b<c$,且 $1,b,c$ 分别是这三个子集中最小的数,从而有 $1,2,\cdots,b-1\in A$.

引理1 x,y 和 $x+y$ 不可能属于三个不同的子集,若 $x\in A, y\in B, x+y\in C$,则由假设知,$Z=f(x+y,x)\in B$,又因为 $f(x+y,x)=f(x+y,y)\in A$,即 Z 既属于 A 又属于 B,此与 A,B,C 三个集合互不相交矛盾,故 x,y 和 $x+y$ 不可能属于三个不同的子集.

引理2 子集 C 包含一个 b 的倍数,如果子集 C 所包含的 b 的倍数中最小的一个为 kb,则 $(k-1)b\in B$. 设 r 是 c 除以 b 的余数,如是 $r=0$,则 $c=nb\in C$. 如是 $r>0$,因为 c 是 C 中最小的数. 所以 $c-r\notin C$. 又因为 $r\leqslant b-1$. 所以 $b\in A$. 由于 $r+(c-r)=c$,由引理1知 $c-r\notin B$,于是 $c-r\in A$. 由 $b\in B$,得 $f(c-r,b)=(c-r)^2-(c-r)b+b^2=n^2b^2-nb^2+b^2=mb\in C$. 故子集 C 包含一个 b 的倍数. 若 $kb\in C$. 其中 k 是满足 $nb\in C$ 的 n 的最小值,

且 $b+(k-1)b=kb$. 由引理1,知$(k-1)b\notin A$. 又因为$(k-1)b\notin C$,所以$(k-1)b\notin B$. 故引理2得证.

引理3 对于任意正整数 n,$(nk-1)b+1\in A$　$nkb+1\in A$,(数学归纳法)当 $n=1$ 时,因为 $1\in A(k-1)b\in B$. 由引理1知$(k-1)b+1\notin C$. 又因为 $b-1\in A. kb\in C$. 再由引理1,得$(k-1)b+1\notin B$,故$(k-1)b+1\in A$. 同理,因为$(k-1)b+1\in A,b\in B,kb+1\notin C$. 又因为 $1\in A,kb\in C,kb+1\notin B$. 所以 $kb+1\in A$. 假设$[(n-1)k-1]b+1\in A. (n-1)kb+1\in A$. 由于$(n-1)kb+1\in A,(k-1)b\in B,(nk-1)b+1\notin C$,又因为$[(n-1)k-1]b+1\in A,kb\in C$. 所以$(nk-1)b+1\notin B$,从而$(nk-1)b+1\in A$. 同理,由于$(nk-1)b+1\in A,b\in B,nkb+1\notin C$. 又因为$(n-1)kb+1\in A,kb\in C,nkb+1\notin B$,故 $nkb+1\in A$. 综上,引理3成立.

由上述引理,知 $kb+1\in A,kb\in C$. 所以 $f(kb+1,kb)=(kb+1)^2-(kb+1)kb+(kb)^2=(kb+1)kb+1$ 由引理3知 $f(kb+1,kb)\in A$,而由假设,知 $f(kb+1,kb)$ 应属于 B,矛盾.

故假设不成立,原命题为真.

例4 将与105互质的所有正整数从小到大排成数列,求这个数列的第1 000项.

解

设 $U=\{1,2,\cdots,105\}$,$A_3=\{a\mid a\in U,且3\mid a\}$,$A_5=\{a\mid a\in U,且5\mid a\}$,$A_7=\{a\mid a\in U,且7\mid a\}$,则

$$\text{card}(A_3)=\frac{105}{3}=35,\text{card}(A_5)=\frac{105}{5}=21,\text{card}(A_7)=\frac{105}{7}=15,$$

$$\text{card}(A_3\cap A_5)=\frac{105}{3\times5}=7,\text{card}(A_5\cap A_7)=\frac{105}{5\times7}=3,\text{card}(A_7\cap A_3)=\frac{105}{3\times7}=5,$$

$$\text{card}(A_3\cap A_5\cap A_7)=\frac{105}{3\times5\times7}=1,$$

$\therefore\ \text{card}(U)=105.$

在1到105中,与105互质的数有

$\text{card}\complement_UA_3\cap\complement_UA_5\cap\complement_UA_7)=\text{card}(U)-\text{card}(A_3\cup A_5\cup A_7)=\text{card}(U)-[\text{card}(A_3)+\text{card}(A_5)+\text{card}(A_7)]+[\text{card}(A_3\cap A_5)]+\text{card}(A_5\cap A_7)+\text{card}(A_7\cap A_3)]-\text{card}(A_3\cap A_5\cap A_7)=105-(35+21+15)+(7+3+5)-1=48.$

设与105互质的正整数按从小到大的顺序排列为 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$,则 $a_1=1,a_2=2,a_3=4,\cdots,a_{48}=104,a_{49}=105+1,a_{50}=105+2,a_{51}=105+4,\cdots,a_{96}=105+104,\cdots$

因为$1\ 000=48\times20+40$,所以 $a_{1\,000}=105\times20+a_{40}$.

由于 $a_{48}=104,a_{47}=103,a_{46}=101,a_{45}=97,a_{44}=94,a_{43}=92,a_{42}=89,a_{41}=88,a_{40}=86$,

所以 $a_{1\,000}=105\times20+86=2\ 186$.

点拨

此题要用到容斥原理.利用容斥原理解决问题时要注意如何设计题中基本的集合,如本题中的 A_3-A_7.

例5 设 $I=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$,$(\complement_IA)\cap B=\{3,7\}$,$A\cap(\complement_IB)=\{2,8\}$,$(\complement_IA)\cup(\complement_IB)=\{2,3,4,5,6,7,8\}$,求 A、B、$(\complement_IA)\cap(\complement_IB)$.

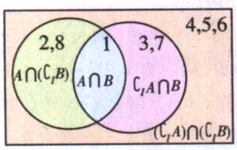


图 1-2

分析

对集合数目比较少时常利用维恩图解决问题.

解

用维恩图表示集合 I、A、B 的关系,表示集合 A、B 的两个相交圈将表示全集 I 的矩形分成互不相交的四个部分,它们分别表示 $A\cap(\complement_IB)$,$A\cap B$,$(\complement_IA)\cap B$,$(\complement_IA)\cap(\complement_IB)$,如图1-2.

依题意,知 $A\cap B=\{1\}$. 又 $A\cap(\complement_I B)=\{2,8\}$,$(\complement_I A)\cap B=\{3,7\}$,由维恩图知,$A=\{1,2,8\}$,$B=\{1,3,7\}$,$(\complement_I A)\cap(\complement_I B)=\complement_I(A\cup B)=\{4,5,6\}$.

点拨

借助于集合的维恩图表示是解决集合问题的常用方法. 在集合运算中,直接运用集合运算律 $\complement_I(A\cup B)=(\complement_I A)\cup(\complement_I B)$,$\complement_I(A\cup B)=(\complement_I A)\cap(\complement_I B)$ 可以使解题简便.

例6 集合 $M=\{u\mid u=12m+8n+4l,m,n,l\in\mathbf{Z}\}$,与 $P=\{v\mid v=20p+16q+12r,p,q,r\in\mathbf{Z}\}$ 的关系为______.

解

对任意 $v_0\in P$,有 $v_0=20p+16q+12r=12r+8(2q)+4(5p)\in M$,故 $P\subseteq M$.
同理,对任意 $v_0\in M$,有 $v_0=12m+8n+4l=20n+16l+12(m-n-l)\in P$,所以 $M\subseteq P$.
因此,$M=P$.

例7 设 $S=\{1,2,\cdots,n\}$,A 为至少含有两项的公差为正的等差数列,其项都在 S 中且当将 S 的其他元素置于 A 中之后,均不能构成与 A 有相同公差的等差数列. 求这种 A 的个数(只有两项的数列也视为等差数列).

解

当 $n=2k$ 为偶数时,满足题中要求的每个数列 A 中必有连续两项,在 $\{1,2,\cdots,k\}$ 和 $\{k+1,k+2,\cdots,2k\}$ 中各任取一数,并以二数之差作为公差可以作出一个满足要求的数列 A. 容易看出,这个对应是双射. 故知 A 的个数为 $k^2=\frac{n^2}{4}$.

当 $n=2k+1$ 为奇数时,情况完全类似. 唯一的不同在于这时第二个集合 $\{k+1,k+2,\cdots,n\}$ 有 $k+1$ 个元素. 故 A 的个数为 $k(k+1)=\frac{(n^2-1)}{4}$.

点拨

映射法解决计数问题,关键是如何构造一一映射.

例8 设 a_n 为下述自然数 N 的个数:N 的各位数字之和为 n 且每位数字都只能取1、3或4. 求证:对每个自然数 N,a_{2n} 都是完全平方数. (1991 · 全国高中联赛试题)

证明

记各位数字之和为 n 且每位数字都是1或2的所有自然数的集合为 S_n,并记 $|S_n|=f_n$,则 $f_1=1$,$f_2=2$,且当 $n\geqslant 3$ 时有 $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$,这意味着 $\{f_n\}$ 恰为菲波那契数列.

作对应 $S_n\ni N\to N'$ 如下:先将 N 的数字中自左至右的第一个2与它后邻的数字相加,其和作为一位数字;然后再把余下数字中第一个2与它后邻的数字相加,所得的和作为下一位数字;依此类推,直到无数再相加为止. 所得的新自然数 N' 除最后一位数可能为2之外,其余各位数字均为1、3或4. 若记所有 N' 的集合为 T_n,则容易看出,上述对应是由 S_n 到 T_n 的双射. 从而有 $|T_n|=|S_n|=f_n$,且显然有

$$f_n=a_n+a_{n-2},n=3,4,\cdots \quad ①$$

对于任一数字和为 $2n$,各位数字均为1或2的自然数 N,必存在正整数 k,使得下列两条之一成立:

(1) N 的前 k 位数字之和为 n;

(2) N 的前 k 位数字之和为 $n-1$,第 $k+1$ 位数字为2.

则立即可得

$$f_{2n}=f_n^2+f_{n-1}^2,n=2,3,\cdots \quad ②$$

由①和②得到

$$a_{2n}+a_{2n-2}=f_{2n}=f_n^2+f_{n-1}^2,$$

$$a_{2n}-f_n^2=-(a_{2n-2}-f_{n-1}^2), \quad ③$$

因为 $a_2=1,a_3=1,a_4=4,f_2=2$，所以 $a_4-f_2^2=0$. 于是由③递推即得

$a_{2n}=f_n^2,n=1,2,3,\cdots$

即 a_{2n} 为完全平方数.

例 9 对 $\{1,2,3,\cdots,n\}$ 的所有非空子集，定义一个唯一正确的“交替和”如下：按照递减的次序重新排列该子集，然后从最大的数开始交替地减或加后继的数(例如 $\{1,2,4,6,9\}$ 的交替和是 $9-6+4-2+1=6$，$\{5\}$ 的交替和就是 5). 对 $n=7$，求所有这种“交替和”的总和.

解

记 $N=\{1,2,3,\cdots,n\}$，$M=\{1,2,\cdots,n-1\}$，

$N'=\{\{n,a_1,a_2,\cdots,a_k\}\mid a_1,a_2,\cdots,a_k\in M\}$，

$M'=\{\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}\mid a_1,a_2,\cdots,a_k\in M\}$，

再证 N' 中元素 $\{n,a_1,a_2,\cdots,a_k\}$ 与 M' 中元素 $\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$ 对应，显见这是 N' 到 M' 的一一对应.

因为 $|N'|$ 与 $|M'|$ 均为 2^{n-1}，且两数组 $\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$ 与 $\{n,a_1,a_2,\cdots,a_k\}$ 的“交替和”恰为 n，因此所有“交替和”的总和为 $n\cdot 2^{n-1}$.

特别地，当 $n=7$ 时，得“交替和”为 448.

应用映射还可以证明某些与计数相关的不等式和等式. 这时可以通过分别计数来证明等或不等，也可以不计数而直接通过适当的映射来解决问题.

例 10 将正整数 n 写成若干个 1 和若干个 2 之和，和项顺序不同认为是不同的写法，所有写法种数记为 $\alpha(n)$. 将 n 写成若干个大于 1 的正整数之和，和项顺序不同认为是不同的写法，所有写法的种数记为 $\beta(n)$. 求证对每个 n，都有 $\alpha(n)=\beta(n+2)$.

证法一

将每项都是 1 或 2，各项之和为 n 的所有数列的集合记为 A_n，每项都是大于 1 的正整数，各项之和为 n 的所有数列的集合记为 B_n，则问题就是证明 $|A_n|=|B_{n+2}|$，显然，只需在两集合之间建立一个双射就行了.

设 $(a_1,a_2,\cdots,a_m)=a\in A_n$，其中 $a_{i_1}=a_{i_2}=\cdots=a_{i_k}=2,1\leqslant i_1\leqslant i_2<\cdots<i_k\leqslant m$，其余的 a_i 均为 1 且 $a_1+a_2+\cdots+a_m=n$.

令

$b_1=a_1+a_2+\cdots+a_{i1}$，

$b_2=a_{i_1+1}+a_{i_1+2}+\cdots+a_{i_2}$，

……

$b_k=a_{i_{k-1}+1}+a_{i_{k-1}+2}+\cdots+a_{i_k}$，

$b_{k+1}=a_{i_k+1}+a_{i_k+2}+\cdots+a_{m+2}$，

$b=(b_1,b_2,\cdots,b_k,b_{k+1})$，　①

则　$b\in B_{n+2}$.

定义

$A_n\ni a\xrightarrow{f}b\in B_{n+2}$，　②

则 f 为双射. 事实上，若 $a,a'\in A_n$，且 $a\neq a'$，则或者数列 a 和 a' 中 2 的个数不同，或者 2 的个数相同但位置不全相同. 无论哪种情形，由①和②知 $b=f(a)$ 与 $b'=f(a')$ 不同，即 f 为单射. 另一方面，对任何 $b\in B_{n+2}$，利用①式又可确定 $a\in A_n$，使得 $f(a)=b$，即 f 为满射，从而 f 为由 A_n 到 B_{n+2} 的双射. 即原命题得证.

证法二

使用证法一中的记号 A_n 和 B_n. 对于任意的 $(a_1,a_2,\cdots,a_{m-1},a_m)=a\in A_{n+2}$，令 $a'=(a_1,a_2,\cdots,a_{m-1})$. 显然，当 $a_m=1$ 时，$a'\in A_{n+1}$；当 $a_m=2$ 时，$a'\in A_n$，容易看出，映射

$$A_{n+2}\ni a\xrightarrow{f}a'\in A_{n+1}\cup A_n$$

是双射，故有 $a(n+2)=a(n+1)+a(n)$. 注意到 $\alpha(1)=1,\alpha(2)=2$，便知 $\alpha(n)=f_n$，这里 $\{f_n\}$ 为菲波那契数列.

对于任意的 $(b_1,b_2,\cdots,b_{k-1},b_k)=b\in B_{n+2}$，令

$$b'=\begin{cases}(b_1,b_2,\cdots,b_{k-1}), & \text{当 } b_k=2,\\(b_1,b_2,\cdots,b_{k-1},b_k), & \text{当 } b_k>2,\end{cases}$$

则当 $b_k=2$ 时，$b'=2$ 时，$b'\in B_n$；当 $b_k>2$ 时，$b'\in B_{n+1}$. 容易验证，映射

$B_{n+2}\ni b\xrightarrow{f}b'\in B_{n+1}\cup B_n$ 为双射，

故有 $\beta(n+2)=\beta(n+1)+\beta(n)$. 又因 $\beta(3)=1,\beta(4)=2$，所以 $\beta(n+2)=f_n=\alpha(n)$.

例 11 某城市有 10 条公共汽车线路，现知沿其中 9 条线路可走遍所有车站，但沿其中任何 8 条线路不能走遍所有车站，问至少有多少个不同的车站？(1950 · 莫斯科数学竞赛题)

分析

此例是如下问题的特殊情形.

设 $A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k$，$S=\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$. 若①$S$ 中每 r 个元素交集不空；②每 $(r+1)$ 个元素的交集为空集，问(1) $|A|$ 至少是多少？(2) 当 $|A|$ 最小时，$|A_i|$ 为多少？

对于(1)，这可考虑是标集 $\{1,2,\cdots,k\}$ 的任一 r 元子集 $\{i_1,i_2,\cdots,i_r\}$，在 $A_{i1}\cap A_{i2}\cap\cdots\cap A_{ir}$ 中任取一个元素 a. 作映射 $f:(i_1,i_2,\cdots,i_r)\to a$，则 f 是足标集的 r 元子集的集合到 A 的一个单射. 事实上，若 $\{j_1,j_2,\cdots,j_r\}$ 也对应于 a，则会形成 $(r+1)$ 个集的交集不空，矛盾. 故 $|A|$ 不少于足标集的 r 元子集的个数，即 $|A|\geqslant C_k^r$.

对于(2)，考虑任一 A_i，在 S 中任取其余 r 个集，它们的交集至少有一个元(不空)，而此交集与 A_i 取交为空集. 由于有 C_{k-1}^r 种不同取法，故 $|A_i|\leqslant|A|-C_{k-1}^r$. 当 $|A|=C_k^r$ 时，$|A_i|\leqslant C_{k-1}^{r-1}$.

另一方面，A_i 与 S 中任选 $(r-1)$ 个其余的集取交集，至少有一个元，从而 $|A_i|\geqslant C_{k-1}^{r-1}$.

这说明，当 $|A|$ 取最小值 C_k^r 时，每个 A_i 的阶 $|A_i|$ 都是 C_{k-1}^{r-1}，故得原题答案至少有 45 个车站.

例 12 设 O—xyz 是空间直角坐标系，S 是空间中的一个有限点集，S_x,S_y,S_z 分别是 S 中所有点在坐标平面 yOz,xOz,xOy 上的正投影所成的集合. 求证：$|S|^2\leqslant|S_x|\cdot|S_y|\cdot|S_z|$. (1992 · IMO 试题 5)

证明

对每点 $(i,j)\in S_x$，令

$T_{ij}=\{(x,i,j)\mid(x,i,j)\in S\}$，

显然有 $S=\sum\limits_{(i,j)\in S_x}T_{ij}$.

由柯西不等式有

$$|S|^2\leqslant\sum_{(i,j)\in S_x}1\cdot\sum_{(i,j)\in S_x}|T_{ij}|^2=|S_x|\cdot\sum_{(i,j)\in S_x}|T_{ij}|^2, \quad ①$$

考虑集合 $V=\sum\limits_{(i,j)\in S_x}(T_{ij}\times T_{ij})$，其中 $T_{ij}\times T_{ij}=\{(t_1,t_2)\mid t_1,t_2\in T_{ij}\}$，

显然，$|V|=\sum\limits_{(i,j)\in S_x}|T_{ij}|^2$.

定义映射 f 如下

$V\ni((x,i,j),(x',i,j))\to((x,j),(x',i))\in S_y\times S_z$，不难看出 f 为单射，因此有 $|V|\leqslant|S_y|\cdot|S_z|$. ②

由①、②即得 $|S|^2\leqslant|S_x|\cdot|S_y|\cdot|S_z|$.

例13 设集合 $A=\{1,2,\cdots,10\}$，A 到 A 的映射 f 满足下列两个条件：

①对任意 $x\in A, f_{30}(x)=x$；

②对每个 $k\in \mathbf{Z}^+$，$1\leqslant k\leqslant 29$，至少存在一个 $a\in A$，使得 $f_k(a)\neq a$.

求这样的映射的总数.（1992・日本奥林匹克预选赛题）

解

注意到 $10=5+3+2$，$30=5\times 3\times 2$. 这提示我们将 A 划分成三个不相交的子集：

$A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}\cup\{b_1,b_2,b_3\}\cup\{c_1,c_2\}$.

因为 f 满足条件①和②，所以 f 是 A 到 A 上的双射，并且由定理2的证明过程得知 A 中存在映射圈，因此，定义映射

$f:f(a_1)=a_2, f(a_2)=a_3, f(a_3)=a_4, f(a_4)=a_5, f(a_5)=a_1; f(b_1)=b_2, f(b_2)=b_3, f(b_3)=b_1; f(c_1)=c_2, f(c_2)=c_1$.

因为30是5、3、2的最小公倍数，故由定理2和定理3知 f 是满足题目条件①和②唯一的一类映射.

因此，f 的总数目相当于从10个元素中选取5个，再从剩下的5个中选取3个，最后剩下的2个也选上，它们分别作圆排列的数目，它等于

$(C_{10}^5\cdot 4!)(C_5^3\cdot 2!)(C_2^2\cdot 1!)=120\ 960$.

例14 设集合 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$，映射 $f:A\to A$，其三次复合映射 $f\cdot f\cdot f$ 是恒等映射，这样的 f 有多少个？（1996・日本数学奥林匹克预选赛题）

解

因为集合 A 上的三次复合映射是恒等映射，所以由定理2和定理3推知符合条件的映射 f 有三类：

(1) f 是恒等映射；

(2) A 中存在一个三元映射圈 $a\to b\to c\to a$（a,b,c 互异），而其他三个元素是不动点；

(3) A 中存在两个三元映射圈 $a\to b\to c\to a$ 和 $a'\to b'\to c'\to a'$（a,b,c,a',b',c' 互异）.

类型(1)的 f 只有1个.

对于类型(2)，先从6个元素中选出3个元素 a,b,c 的方法有 $C_6^3=20$ 种，又 a、b、c 作圆排列有 $(3-1)!=2$ 种，故这样的 f 有 $20\times 2=40$ 个.

对于类型(3)，首先6个元素平分成两组有 $C_6^3\div 2=10$ 种分法，每组分别作圆排列又有 $(3-1)!(3-1)!=4$ 种方式，所以这样的 f 有 $10\times 4=40$ 个.

综上所述，所求的 f 有 $1+40+40=81$ 个.

例15 把正△ABC 的各边 n 等分，过各分点在△ABC 内作各边的平行线，得到的图形叫做正△ABC 的 n 格点阵.

(1)求其中所有边长为 $\frac{1}{n}|BC|$ 的菱形个数；

(2)求其中所有平行四边形的个数.（1988・国家集训队选拔考试题）

解

延长 AB 至 B'，AC 至 C'，使得 $|BB'|=|CC'|=\frac{1}{n}|BC|$. 作出正△$AB'C'$ 的 $n+1$ 格点阵（图1-3）. 边 $B'C'$ 上有 $(n+2)$ 个点，依次编号为 $0,1,2,\cdots,n+1$. 在△ABC 中边长为 $\frac{1}{n}|BC|$ 的菱形可以按边不平行于 BC、AC 与 AB 分为三类. 容易看出，这三类菱形个数相同. 边不平行 BC 且边长为 $\frac{1}{n}|BC|$ 的所有菱形集合记作

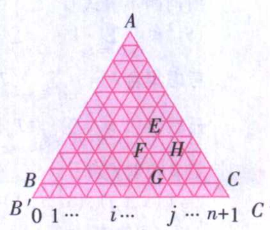


图1-3