



● 配江苏教育版 ●

普通高中课程标准实验教科书

苏州大学《中学数学月刊》编辑部

Jiaoxue Yu Ceshi

高中

2006~2007

数学

教学与测试

- 新教材
- 教师用书
- 选修系列 2

◆ 苏州大学出版社



配江苏教育版普通高中课程标准实验教科书

苏教版普通高中课程标准实验教科书

高中数学 教学与测试

教师用书

(选修系列2)

苏州大学《中学数学月刊》编辑部 编

苏大数教

苏州大学《中学数学月刊》编辑部

地址：苏州大学《中学数学月刊》编辑部
苏州大学 215006

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学教学与测试. 2: 选修系列/苏州大学《中学数学月刊》编辑部编. —苏州: 苏州大学出版社, 2006. 10

教师用书. 配江苏教育版普通高中课程标准实验教科书

ISBN 7-81090-751-4

I. 高… II. 苏… III. 数学课—高中—教学参考资料 IV. G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 116561 号

Warning

敬告读者

'06 版“中学新课标系列‘中学教学与测试’丛书”, 封面贴有“非常数码产品身份码标贴”, 正版图书刮开标贴, 即可通过免费电话(8008283580)、手机短信(13912993315)以及网络([www. bcm. cn](http://www.bcm.cn))三种方式查证。

如有读者发现有盗印或销售盗版图书的线索, 请及时向当地新闻出版和工商行政管理部门举报, 或向本社反映。

本社举报电话: 0512-67258810

本社邮购联系电话: 0512-67258835

网址: [www. sudapress. com](http://www.sudapress.com)

电子邮件: [sdcbs@suda. edu. cn](mailto:sdcbs@suda.edu.cn)

高中数学教学与测试

教师用书

(选修系列 2)

苏州大学《中学数学月刊》编辑部 编

责任编辑 管兆宁

苏州大学出版社出版发行

(地址: 苏州市干将东路 200 号 邮编: 215021)

江苏省新华书店经销

宜兴文化印刷厂印装

(地址: 宜兴市南漕镇 邮编: 214217)

开本 787×1092 1/16 印张 22.25 字数 556 千

2006 年 10 月第 1 版 2006 年 10 月第 1 次印刷

ISBN 7-81090-751-4/G · 375 定价: 30.00 元

苏州大学版图书若有印装错误, 本社负责调换
苏州大学出版社营销部 电话: 0512-67258835



《高中数学教学与测试》

编委会

(江苏教育版·选修系列2)

主 任：唐忠明

顾 问：夏 炎

编 委：(按姓氏笔画为序)

丁祖元	丰世富	王广余	王金才
王海平	王振羽	王晓春	石志群
卢钦和	刘 华	祁建新	杨建明
李平龙	李 生	吴 锸	邱尔依
何学兰	沙敏林	沈琦珉	张必华
张松年	陆云泉	罗 强	周 超
袁长江	钱军先	倪振东	徐稼红
寇恒清	蒋建华	蒋鼎宏	傅珏生
鲍建生	樊亚东	滕冬梅	潘洪亮

责任编辑委：倪振东

执行编委：傅钰生



前 言

PREFACE

普

普通高中课程标准实验教科书(数学)已在广东、山东、宁夏、海南、江苏开始实验并在全国部分省市进一步扩大使用,为了及时向广大高中学生和数学教师提供一套与新教材配套的高质量的教辅用书,我部聘请了部分参加教材编写的中学特级教师和高级教师,经过精心策划,编写了与江苏教育版教材配套的“高中数学教学与测试”系列用书。它既可作为学生的练习用书,也可作为教师的教学参考用书。根据广大师生的使用意见及建议,本次修订将“高中数学教学与测试”系列用书按必修5个模块重新划分,新编写了选修系列1(包括1-1、1-2)、选修系列2(包括2-1、2-2、2-3)教辅用书,本书是选修系列2。

选修系列2分为学生用书和教师用书两册。学生用书选修2-1包括常用逻辑用语、圆锥曲线与方程、向量空间与立体几何三章,选修2-2包括导数及其应用、推理和证明、数系的扩充与复数的引入三章;选修2-3包括计数原理、概率、统计案例三章。全书的编写依据课标,紧扣课本,配合课堂教学进行同步训练,原则上每节1课时,共90节。体例结构每节按【知识梳理】、【双基演练】、【例题精讲】、【同步训练】、【拓展迁移】编排。为方便使用,学生用书采用1+1模式:【知识梳理】、【双基演练】、【例题精讲】自成一册,【同步训练】、【拓展迁移】单独成册,供课后练习使用。教师用书包括相应学生用书的全部题目及详细的例题、习题解答。

本书由责任编委、执行编委及顾问策划,全体编委会集体讨论编写大纲,最后由七位教师执笔:王海平(上海南汇中学),选修2-1第一章;王广余(江苏省新海高级中学)选修2-1第二章;袁长江(徐州市第一中学),选修2-1第三章;丰世富(苏州大学数学科学学院),选修2-2第一章;倪振东(江苏省苏州中学),选修2-2第二章;王海平(上海南汇中学),选修2-2第三章;丁祖元(张家港市教研室),选修2-3第一章;王振羽(苏州大学数学科学学院),选修2-3第二、三章。

各章由责任编委、执行编委及顾问把关,苏州大学数学科学学院四位教师负责审校:丰世富(选修2-1第一章,选修2-2第二、三章);周超(选修2-1第二章,选修2-2第一章);邱尔依(选修2-1第三章,选修2-3第一章);傅珏生(选修2-3第二、三章)。

多年来,全国各地的中学教师、学生以及社会各界对我们编写的中学数学方面的书籍给予了热情的关怀和支持,对于这次根据普通高中课程标准实验教材编写的“高中数学教学与测试”提出了许多有益的建议,在此一并表示感谢。

我们真诚地希望使用本书的老师、学生和家長能及时地将使用的情况和意见反馈给我们,以便我们作进一步的修改和完善。

苏州大学《中学数学月刊》编辑部

2006年9月

目 录

CONTENTS

选修 2-1

第一章 常用逻辑用语

- | | |
|-----------------------|--------|
| 1. 四种命题 | (1) |
| 2. 充分条件和必要条件 | (5) |
| 3. 简单的逻辑联结词 | (9) |
| 4. 量词和含有一个量词的否定 | (13) |
| 5. 复习课 | (17) |

第二章 圆锥曲线与方程

- | | |
|------------------------|--------|
| 6. 圆锥曲线 | (22) |
| 7. 椭圆的标准方程 | (25) |
| 8. 椭圆的几何性质 | (29) |
| 9. 习题课 | (32) |
| 10. 双曲线的标准方程 | (36) |
| 11. 双曲线的几何性质 | (40) |
| 12. 习题课 | (44) |
| 13. 抛物线的标准方程 | (48) |
| 14. 抛物线的几何性质 | (52) |
| 15. 习题课 | (55) |
| 16. 直线与圆锥曲线的综合问题 | (60) |
| 17. 圆锥曲线的统一定义 | (65) |
| 18. 曲线与方程 | (69) |
| 19. 求曲线的方程(1) | (73) |



20. 求曲线的方程(2)	(76)
21. 曲线的交点	(81)
22. 复习课	(85)

第三章 空间向量与立体几何

23. 空间向量及其线性运算	(91)
24. 共面向量定理	(95)
25. 空间向量基本定理	(99)
26. 空间向量的坐标表示	(103)
27. 空间向量的数量积(1)	(107)
28. 空间向量的数量积(2)	(111)
29. 习题课	(115)
30. 直线的方向向量与平面的法向量	(119)
31. 空间线面关系的判定	(122)
32. 空间的角的计算(1)	(127)
33. 空间的角的计算(2)	(132)
34. 空间距离的计算	(137)
35. 习题课	(141)
36. 复习课	(145)

选修 2-2

第一章 导数及其应用

1. 平均变化率	(151)
2. 瞬时变化率——导数(1)	(154)
3. 瞬时变化率——导数(2)	(157)
4. 常见函数的导数	(160)
5. 函数的和、差、积、商的导数	(163)
6. 简单复合函数的导数	(166)
7. 习题课	(169)
8. 导数在研究函数中的应用——单调性	(172)



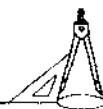
9. 导数在研究函数中的应用——极值点	(175)
10. 导数在研究函数中的应用——最大值与最小值	(178)
11. 习题课	(182)
12. 导数在实际生活中的应用(1)	(186)
13. 导数在实际生活中的应用(2)	(189)
14. 曲边梯形的面积	(192)
15. 定积分	(195)
16. 微积分基本定理	(198)
17. 习题课	(202)
18. 复习课	(205)

第二章 推理和证明

19. 归纳推理	(209)
20. 类比推理和演绎推理	(213)
21. 直接证明与间接证明	(216)
22. 数学归纳法(1)	(218)
23. 数学归纳法(2)	(222)
24. 复习课	(227)

第三章 数系的扩充与复数的引入

25. 数系的扩充	(231)
26. 复数的四则运算(1)	(234)
27. 复数的四则运算(2)	(237)
28. 复数的几何意义(1)	(241)
29. 复数的几何意义(2)	(244)
30. 复数域上的方程	(248)
31. 习题课	(252)
32. 复习课	(256)



第一章 计数原理

1. 两个基本计数原理	(261)
2. 排列(1)	(264)
3. 排列(2)	(267)
4. 组合	(270)
5. 计数应用题	(273)
6. 二项式定理	(276)
7. 二项式系数的性质及应用	(279)
8. 复习课	(282)

第二章 概 率

9. 随机变量及其概率分布	(286)
10. 超几何分布	(290)
11. 条件概率	(294)
12. 事件的独立性	(298)
13. 二项分布	(301)
14. 习题课	(305)
15. 离散型随机变量的均值	(309)
16. 离散型随机变量的方差与标准差	(313)
17. 正态分布	(316)
18. 习题课	(320)
19. 复习课	(323)

第三章 统计案例

20. 独立性检验	(329)
21. 回归分析	(335)
22. 复习课	(341)



第一章 常用逻辑用语

1. 四种命题

知识梳理

简易逻辑知识是掌握和使用数学语言的基础,逻辑错误会导致前功尽弃.本节要求理解四种命题的概念,掌握命题形式的表示;了解命题的逆命题、否命题和逆否命题,会分析四种命题的相互关系,能写出一个简单的命题(原命题)的逆命题、否命题、逆否命题;理解互为逆否命题的两个命题同真假(等价),因此,四种命题中为真命题的个数只能是偶数个.培养简单推理的思维能力,培养观察分析、抽象概括能力和逻辑思维能力.要把握好教学要求;对“命题的逆命题、否命题与逆否命题”只要求作一般性了解,重点关注四种命题的相互关系和命题的必要条件、充分条件、充要条件(下一课时).

双基演练

1. 下列语句中是命题的题号为 (D)

- (1) 空集是任何集合的子集; (2) 若整数 a 是素数,则 a 是奇数;
 (3) 指数函数是增函数吗? (4) 若平面上两条直线不相交,则它们平行;
 (5) $\sqrt{(-2)^2} = -2$; (6) $x > 15$.

A. (1)(2)(6) B. (1)(2)(4) C. (1)(4)(5) D. (1)(2)(4)(5)

提示 对命题概念的理解:一般地,我们把用语言、符号或式子表达的,可以判断真假的陈述句叫做命题.判断命题的两个基本条件:必须是一个陈述句;可以判断真假.(3)是疑问句,故(3)不是命题;对于(6),由于 x 是未知数,也不能判断“ $x > 15$ ”是否成立,因此,不能判断语句(6)的真假,故选 D.

2. 若命题 p 的逆命题是 q ,命题 p 的否命题是 r ,则命题 q 是命题 r 的 (C)

A. 逆命题 B. 否命题 C. 逆否命题 D. 本身

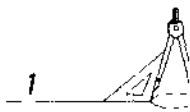
提示 命题 p 为“若 m ,则 n ”,命题 q 为“若 n ,则 m ”,命题 r 为“若非 m ,则非 n ”,则命题 q 是命题 r 的逆否命题,选 C.

3. 指出下列命题的条件 p 和结论 q :

(1) 若整数 a 能被 2 整除,则 a 是偶数. 条件 p 为 _____; 结论 q 为 _____.

(2) 若四边形是菱形,则它的对角线互相垂直且平分.

条件 p 为 _____; 结论 q 为 _____.



解 (1) 条件 p 为整数 a 能被 2 整除; 结论 q 为 a 是偶数.

(2) 条件 p 为四边形是菱形; 结论 q 为它的对角线互相垂直且平分.

4. 填空: 将下列命题改写成“若 p , 则 q ”的形式, 并判断真假:

(1) 面积相等的两个三角形全等; _____.

(2) 负数的立方是负数; _____.

(3) 平行线没有交点; _____.

解 (1) 若两个三角形的面积相等, 则这两个三角形全等. 是假命题.

(2) 若一个数是负数的立方, 则这个数是负数. 是真命题.

(3) 若两条直线是平行线, 则它们没有交点.

说明 要学会区分条件 p 和结论 q , 数学中有一些命题虽然表面上不是“若 p , 则 q ”的形式, 例如“垂直于同一条直线的两个平面平行”, 但是把它们的形式作适当改变, 就可以写成“若 p , 则 q ”的形式: “若两个平面垂直于同一条直线, 则这两个平面平行.” 这样, 它的条件和结论就很清楚了.

4. 例题精讲

例 1 下列四个命题中, 命题(1)与命题(2), (3), (4)的条件和结论之间分别是什么关系? 命题(2), (3), (4)分别是命题(1)的什么命题? 它们是真命题还是假命题?

(1) 若 $f(x)$ 是正弦函数, 则 $f(x)$ 是周期函数;

(2) 若 $f(x)$ 是周期函数, 则 $f(x)$ 是正弦函数;

(3) 若 $f(x)$ 不是正弦函数, 则 $f(x)$ 不是周期函数;

(4) 若 $f(x)$ 不是周期函数, 则 $f(x)$ 不是正弦函数.

解 命题(1)条件 p : $f(x)$ 是正弦函数, 结论 q : $f(x)$ 是周期函数, 命题(1)是真命题; 命题(2)的条件是命题(1)的结论 q , 而命题(2)的结论是命题(1)的条件 p , 因此命题(2)是命题(1)的逆命题, 命题(2)是假命题;

命题(3)为“若非 p , 则非 q ”, 故命题(3)为命题(1)的否命题, 命题(3)为假命题;

命题(4)为“若非 q , 则非 p ”, 故命题(4)为命题(1)的逆否命题, 命题(4)是真命题.

例 2 写出命题“同位角相等, 两直线平行”的逆否命题.

分析 原命题的条件为: 同位角相等; 结论为: 两直线平行.

于是逆否命题的条件为: 两直线不平行; 结论为: 同位角不相等.

解 命题“同位角相等, 两直线平行”的逆否命题是“两直线不平行, 同位角不相等”.

说明 若将原命题表示为: “若 p , 则 q ”, 则它的逆否命题为: “若非 q , 则非 p ”, 即交换原命题的条件和结论, 并且同时否定, 可得其逆否命题. 四种命题的概念与表示形式, 如果原命题为: 若 p , 则 q , 则它的:

逆命题为: 若 q , 则 p , 即交换原命题的条件和结论即得其逆命题.

否命题为: 若非 p , 则非 q , 即同时否定原命题的条件和结论, 即得其否命题.

逆否命题为: 若非 q , 则非 p , 即交换原命题的条件和结论, 并且同时否定, 则得其逆否命题.



5. 把下列命题改写成“若 p 则 q ”的形式:

- ① 对顶角相等; ② 平行四边形的对角线相交于一点且互相平分;
③ 偶数能被 2 整除;
④ 二次方程 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$, 若判别式 $\Delta > 0$, 则方程有两个不相等的实数根.

解 ① 若两个角是对顶角, 则这两个角相等;
② 若四边形是平行四边形, 则其对角线交于一点且互相平分;
③ 若一个数是偶数, 则这个数能被 2 整除;
④ 若二次方程 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 的判别式 $\Delta > 0$, 则该方程有两个不相等的实数根.

6. 写出下列命题的逆命题、否命题、逆否命题, 并判断这些命题的真假:

- ① 实数的平方为正实数; ② 若 $a > b$, 则 $b < a$.

解 ① 原命题: 若一个数是实数, 则它的平方是一个正实数. 为假, 因为 0 的平方就不是正实数.

逆命题: 若一个数的平方是正实数, 则这个数是实数. 为真.

否命题: 若一个数不是实数, 则它的平方也不是一个正实数. 为真.

逆否命题: 若一个数的平方不是正实数, 则它不是实数. 为假.

② 原命题: 若 $a > b$, 则 $b < a$. 为真.

逆命题: 若 $b < a$, 则 $a > b$. 为真.

否命题: 若 $a \leq b$, 则 $b \geq a$. 为真.

逆否命题: 若 $b \geq a$, 则 $a \leq b$. 为真.

7. 判断下列命题的真假, 并写出它的逆命题、否命题、逆否命题, 同时判断它们的真假:

- ① 若一个式子是等式, 则它的两边都乘以同一个数, 所得结果仍是等式;
② 若圆心到直线的距离等于半径, 则该直线是圆的切线;
③ 若在二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中, $b^2-4ac < 0$, 则该二次函数的图象与 x 轴有公共点.

解 ① 该命题为真, 这是等式的性质.

逆命题: 若两个式子都乘以同一个数, 所得结果相等, 则这两个式子相等. 为假, 如把 x 和 x^2+1 都乘以 0 后相等, 但 $x \neq x^2+1$.

否命题: 若两个式子不相等, 则把他们都乘以同一个数, 所得结果也不相等. 为假.

逆否命题: 若两个式子都乘以同一个数, 所得的结果不相等, 则这两个式子也不相等. 为真.

② 该命题为真.

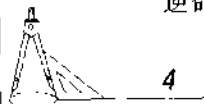
逆命题: 若直线是圆的切线, 则圆心到直线的距离等于半径. 为真.

否命题: 若圆心到直线的距离不等于半径, 则该直线不是圆的切线. 为真.

逆否命题: 若直线不是圆的切线, 则圆心到直线的距离不等于半径. 为真.

③ 该命题为假, 因为当 $b^2-4ac < 0$ 时, 二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 没有实根, 因此二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴无公共点.

逆命题: 若二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴有公共点, 则 $b^2-4ac < 0$. 为假.



否命题:若二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中, $b^2-4ac \geq 0$, 则该二次函数图象与 x 轴没有公共点, 为假.

逆否命题:若二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴没有公共点, 则 $b^2-4ac \geq 0$, 为假.

★ 拓展迁移

在空间中

(1) 若四点不共面, 则这四点中任何三点都不共线;

(2) 若两条直线没有公共点, 则这两条直线是异面直线.

以上两个命题中, 逆命题为真命题的是 _____.

答案 (2).

解 (1) 中的逆命题是:若四点中任何三点都不共线, 则这四点不共面.

我们用正方体 AC_1 做模型来观察:上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 中任何三点都不共线, 但 A_1, B_1, C_1, D_1 四点共面, 所以(1)中逆命题不真.

(2) 中的逆命题是:若两条直线是异面直线, 则两条直线没有公共点.

由异面直线的定义可知, 成异面直线的两条直线不会有公共点.

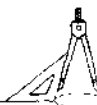
所以(2)中逆命题是真命题.

说明 本题考查点共线、点共面和异面直线的基本知识, 考查命题的有关概念. 一般地:写出一个命题的逆命题、否命题及逆否命题的关键是分清原命题的条件和结论, 然后按定义来写; 在判断原命题及其逆命题, 否命题以及逆否命题的真假时, 要借助原命题与其逆否命题同真或同假, 逆命题与否命题同真或同假.

2. 充分条件和必要条件

★ 知识梳理

理解充分条件、必要条件及充要条件的意义, 会判断两个命题的充要关系. 对命题“若 p 则 q ”而言, 当它是真命题时, p 是 q 的充分条件, q 是 p 的必要条件, 当它的逆命题为真时, q 是 p 的充分条件, p 是 q 的必要条件, 两种命题均为真时, 称 p 是 q 的充要条件; 当 p 和 q 互为充要时, 体现了命题等价转换的思想. 在判断充分、必要条件时, 首先要分清哪个命题是条件, 哪个命题是结论, 其次, 论断要分四种情况说明: 充分不必要条件, 必要不充分条件, 充要条件, 既不充分又不必要条件. 从集合角度看, 若记满足条件 p 的所有对象组成集合 A , 满足条件 q 的所有对象组成集合 B , 则当 $A \subseteq B$ 时, p 是 q 的充分条件; $B \subseteq A$ 时, p 是 q 的必要条件; $A = B$ 时, p 是 q 的充要条件. 充要条件的判断, 常用方法为: ①直接用充要条件定义判断; ②借助四种命题之间的关系间接判断. 如所给命题的真假不易判断, 我们可以转化为判断它的逆否命题的真假, 因为原命题与其逆否命题是等价的, 即同真或同假.



双基演练

1. “ $x^2=3x+4$ ”是“ $x=\sqrt{3x+4}$ ”的 (B)

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

解 由 $x^2=3x+4$ 可得到 $x=\pm\sqrt{3x+4}$, 而由 $x=\sqrt{3x+4}$ 可得 $x^2=3x+4$, 故选 B.

2. “ $\alpha\neq\beta$ ”是“ $\cos\alpha\neq\cos\beta$ ”的 (B)

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

提示 所给命题的真假不易判断, 我们可以转化为判断它的逆否命题的真假.

3. $p:x>5$ 是 $q:x\geq 5$ 的 _____ 条件.

解 设 $P=\{x|x>5\}$, $Q=\{x|x\geq 5\}$, $\therefore P\subseteq Q$, $\therefore p$ 是 q 的充分不必要条件.

4. $p:\sqrt{1+\sin\theta}=a$ 是 $q:\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}=a$ 的 _____ 条件.

解 $\sqrt{1+\sin\theta}=a\Rightarrow\left|\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right|=a\nRightarrow\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}=a$;

而 $\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}=a\Rightarrow 1+\sin\theta=a^2\Rightarrow\sqrt{1+\sin\theta}=|a|\nRightarrow\sqrt{1+\sin\theta}=a$;

$\therefore p$ 是 q 的既不充分也不必要条件.

说明 充要条件是数学学习中十分重要的内容, 应用很广泛, 解决充要条件问题的方法:

(1) 直接推理: 由条件 p 出发进行推理, 然后由结论 q 出发进行推理.

① 若 $p\Rightarrow q$, 而 $q\nRightarrow p$, 则 p 是 q 的充分但不必要条件, 而 q 是 p 的必要但不充分条件;

② 若 $p\Rightarrow q$, 且 $q\Rightarrow p$, 则 p 是 q 的充要条件 (q 也是 p 的充要条件);

③ 若 $p\nRightarrow q$, 且 $q\nRightarrow p$, 则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

(2) 从集合思想考虑: 如果条件 p 与结论 q 很容易用集合来描述, 则从集合思想考虑比较简单. 设 $P=\{p\}$, $Q=\{q\}$,

① 若 $P\subseteq Q$, 则 p 是 q 的充分不必要条件, 而 q 是 p 的必要不充分条件;

② 若 $P=Q$, 则 p 是 q 的充要条件 (q 也是 p 的充要条件);

③ 若 $P\subseteq Q$ 且 $Q\subseteq P$, 则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

例题精讲

例 1 判断下述 p 是 q 的什么条件:

(1) $p:D^2=4F$, q : 圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 与 x 轴相切;

(2) p : 多面体是正四棱柱, q : 多面体是长方体;

(3) p : $\triangle ABC$ 中, $a\cos B=b\cos A$, q : $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

解 (1) 圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 与 x 轴相切 $\Leftrightarrow \left|-\frac{E}{2}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$



且 $E \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} D^2 - 4F = 0, \\ E \neq 0, \end{cases}$ 将 $\begin{cases} D^2 - 4F = 0, \\ E \neq 0 \end{cases}$ 形成的值看作集合 Q , 而条件 P 形成的集合看作

集合 P , 显然 $Q \subseteq P$, $\therefore p$ 是 q 的必要但不充分条件;

(2) \because 正四棱柱是特殊的长方体, $\therefore \{\text{正四棱柱}\} \subseteq \{\text{长方体}\}$, $\therefore p$ 是 q 的充分但不必要条件;

(3) $\because a \cos B = b \cos A \Rightarrow 2R \sin A \cos B = 2R \cos A \sin B \Rightarrow \sin(A - B) = 0 \Rightarrow A = B$, $\therefore p \Rightarrow q$; 而 q 中没有指明哪两个角相等, 显然 $q \not\Rightarrow p$, $\therefore q$ 是 p 的充分但不必要条件.

说明 从上面的例子可以看出, 充分与必要条件问题的正确解答主要还是取决于问题本身所涉及到的具体数学内容的掌握与理解程度.

例 2 若 A 是 B 的必要而不充分条件, C 是 B 的充要条件, D 是 C 的充分而不必要条件, 判断 D 是 A 的什么条件.

解 $D \Rightarrow C \Leftrightarrow B \Rightarrow A$, $\therefore D \Rightarrow A$, D 是 A 的充分不必要条件.

说明 1. 符号“ \Rightarrow ”、“ \Leftrightarrow ”具有传递性, 不过前者是单向的, 后者是双向的.

2. 充分、必要条件与四种命题的关系:

- ① 如果 p 是 q 的充分条件, 则原命题“若 p 则 q ”以及逆否命题“若非 p 则非 q ”都是真命题.
- ② 如果 p 是 q 的必要条件, 则逆命题“若 q 则 p ”以及否命题“若非 p 则非 q ”为真命题.
- ③ 如果 p 是 q 的充要条件, 则四种命题均为真命题.

例 3 求“直线 $l: ax - y + b = 0$ 经过两直线 $l_1: 2x - 2y - 3 = 0$ 和 $l_2: 3x - 5y + 1 = 0$ 的交点”的充要条件.

解 由 $\begin{cases} 2x - 2y - 3 = 0, \\ 3x - 5y + 1 = 0 \end{cases}$ 得 l_1, l_2 交点为 $P\left(\frac{17}{4}, \frac{11}{4}\right)$,

$\therefore l$ 过点 P , $\therefore a \times \frac{17}{4} - \frac{11}{4} + b = 0$, $\therefore 17a + 4b = 11$.

充分性: 设 a, b 满足 $17a + 4b = 11$, $\therefore b = \frac{11 - 17a}{4}$,

代入 l 方程: $ax - y + \frac{11 - 17a}{4} = 0$, 整理得: $\left(y - \frac{11}{4}\right) - a\left(x - \frac{17}{4}\right) = 0$,

此方程表明, 直线 l 恒过两直线 $y - \frac{11}{4} = 0, x - \frac{17}{4} = 0$ 的交点 $\left(\frac{17}{4}, \frac{11}{4}\right)$,

而此点为 l_1 与 l_2 的交点, \therefore 充分性得证.

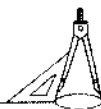
综上所述, 直线 l 过直线 l_1 和 l_2 的交点 P 的充要条件是 $17a + 4b = 11$.

说明 关于充要条件的证明, 一般有两种方式, 一种是利用“ \Leftrightarrow ”, 双向传递, 同时证明充分性及必要性; 另一种是分别证明必要性及充分性, 从必要性着手, 再检验充分性.

同步训练

1. “ $|2x - 1| < 3$ ”是“ $\frac{(x+1)(x+3)}{(x-2)} < 0$ ”的 (B)

- A. 必要不充分条件
B. 充分不必要条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件



提示 由 $|2x-1| < 3$ 得 $-3 < 2x-1 < 3$, 故 $-1 < x < 2$, 此时 $\frac{(x+1)(x+3)}{(x-2)} < 0$ 成立; 反之, 若 $\frac{(x+1)(x+3)}{(x-2)} < 0$, 则 $-1 < x < 2$ 或者 $x < -3$, 从而选 B.

2. 已知 p : 方程 $x^2+ax+b=0$ 有且仅有整数解, q : a, b 是整数, 则 p 是 q 的 (A)
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
- C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件

提示 由“方程 $x^2+ax+b=0$ 有且仅有整数解”易得到“ a, b 是整数”; 反之, 若 a, b 是整数, 方程 $x^2+ax+b=0$ 的解不确定. 因此选 A.

3. 方程 $mx^2+2x+1=0$ 至少有一个负根的充要条件是 (D)
- A. $0 < m \leq 1$ 或 $m < 0$ B. $0 < m \leq 1$ C. $m < 1$ D. $m \leq 1$

提示 可以采用补集法, 用逆否命题来求解.

4. 在 $\triangle ABC$ 中, “ $A > B$ ”是“ $a > b$ ”的 (C)
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

解 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $A > B$, 可得 $2R\sin A > 2R\sin B$, 即有 $a > b$; 反之, 若 $a > b$, 则有 $A > B$ (三角形的边角定理), 于是选 C.

5. “在 $\triangle ABC$ 中, $a^2+b^2=c^2$ ”是“ $\triangle ABC$ 为以 c 为斜边的直角三角形”的 _____ 条件 (填: 充分不必要、必要不充分、充要、既不充分又不必要).

解 由勾股定理可得结论, 应该填“充要”.

6. “两个三角形的面积相等”是“两个三角形全等”的 _____ 条件 (填: 充分不必要、必要不充分、充要、既不充分又不必要).

解 由“两个三角形的面积相等”推不出“两个三角形全等”, 反之, 若两个三角形全等, 则它们的面积相等, 故应该填“必要不充分”.

7. 求关于 x 的方程 $|x| - |x-1| = a$ 有解的充要条件.

答案 $-1 \leq a \leq 1$.

提示 把方程问题转化为函数问题求解即可, 如再数形结合, 可以更简洁地得出结论. 对于证明充分必要性的问题, 既要证明“充分性”, 又要证明“必要性”, 先证明哪一性质, 由问题的难度来定, 先易后难.

4. 拓展迁移

求证: 关于 x 的方程 $x^2+2ax+b=0$ 有实数根, 且两根均小于 2 的充分但不必要条件是 $a \geq 2$ 且 $|b| \leq 4$.

证明 先证充分性, 而必要性只需要通过举反例来否定.
先证明条件的充分性: