五年制高等职业教育教材

初等数学

主编 林 益

高等教育出版社

五年制高等职业教育教材

初 等 数 学

主　编　林　益

副主编　杨文英

高等教育出版社

内容提要

本书是为高等职业教育(五年制)编写的基础课教材,内容包括数与式,集合与函数,幂函数、指数函数与对数函数,三角函数与反三角函数,平面向量,平面解析几何,立体几何,复数以及排列、组合和二项式定理.

作为高等职业教育数学课程系列教材,本书注意用较现代的数学思想和方法及通用的计算器重新架构高中数学知识,既减轻了学习的难度,又更好地为后续课程提供必要的知识基础.全书内容以"必需、够用"为度,注重"数学为人人"的理念.

本书可作为以初中毕业为起点的中等职业技术学校、高等职业技术学院(五年制)各专业的教材,也可作为全日制普通高中学生的学习参考书.

图书在版编目(CIP)数据

初等数学/林益主编.—北京:高等教育出版社,
2003.6
(高等职业教育系列教材)
ISBN 7-04-012011-9

Ⅰ.初… Ⅱ.林… Ⅲ.初等数学-高等学校:技术学校-教材 Ⅳ.012

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 041596 号

责任编辑 孙鸣雷 **特约编辑** 周滔
封面设计 吴昊 **责任印制** 潘文瑞

书名 初等数学
主编 林益

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-64054588
社址	北京市西城区德外大街4号		021-56964871
邮政编码	100011	**免费咨询**	800-810-0598
总机	010-82028899	**网址**	http://www.hep.edu.cn
传真	021-56965341		http://www.hep.com.cn
			http://www.hepsh.com

排版 南京理工排版校对公司
印刷 江苏南洋印务集团

开本	787×1092 1/16	**版次**	2003年6月第1版
印张	11.75	**印次**	2003年7月第2次
字数	286 000	**定价**	15.00元

凡购买高等教育出版社图书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请在所购图书销售部门联系调换。

前　言

本书是为高等职业教育(五年制)编写的基础课教材,其内容既注意与全日制普通初中数学知识的衔接,又涵盖了全日制高中数学的基本知识.

初等数学是高等职业教育(五年制)、中等职业教育的重要基础课,所传授的高中数学知识是技术人才素质的最基本组成部分,同时也是高等数学、工程数学及专业课程的基础.结合当前中、高职教育的特点和要求,在吸取各家之长与精选内容的基础上,本书在编写时注意应用较现代的数学思想和方法,应用广为流通的计算器这个工具,重新架构了高中数学内容.如引进向量,并以向量为工具研究平面解析几何、立体几何以及复数等内容.对于复杂的计算则由计算器代劳,让同学将更多的精力放在感受数学的思想及"数学为人人"的理念.本书内容以"必需、够用"为度,重数学与社会的关系,重数学的思想与方法,重后续课程的需要,轻计算技巧,不追求理论上的完整性和系统性.本书中许多概念与记号注意与高等数学接轨,为后续课程的学习打下较好的基础.

本书作者具有丰富的教学经验,全书语言流畅,内容深入浅出,通俗易懂,可读性强.书中列举的应用问题实用性强,能激发学生的学习兴趣,亲近数学理论,提高学生应用数学的兴趣和能力.

本书由林益主编,杨文英副主编,刘艾瑛、井石峰、钟卫红参编.

由于作者水平、经验有限,时间也紧迫,因此不可避免地会有谬误和不尽人意之处,恳请有关专家、同行和读者批评指正.

编　者

2003 年 5 月

目　　录

第一章　数与式 …… 1
§1.1　数与式的概念及其运算 …… 1
§1.2　不等式的证明 …… 4
§1.3　不等式的解法 …… 6
第二章　集合与函数 …… 11
§2.1　集合 …… 11
§2.2　集合的运算 …… 13
§2.3　函数的概念 …… 16
§2.4　反函数 …… 22
第三章　幂函数、指数函数与对数函数 …… 25
§3.1　幂函数简介 …… 25
§3.2　指数函数 …… 27
§3.3　对数 …… 32
§3.4　对数函数 …… 37
第四章　三角函数与反三角函数 …… 41
§4.1　角的概念的推广 …… 41
§4.2　任意角的三角函数 …… 45
§4.3　三角函数的简化公式 …… 51
§4.4　三角函数的其他常用公式 …… 54
§4.5　三角函数的图像和性质 …… 57
§4.6　反三角函数简介 …… 64
第五章　平面向量 …… 68
§5.1　向量 …… 68
§5.2　向量的线性运算 …… 70
§5.3　向量平行的条件及向量的分解 …… 73
§5.4　向量的坐标 …… 76
§5.5　向量的内积 …… 80
第六章　平面解析几何 …… 84
§6.1　曲线与方程 …… 84
§6.2　直线 …… 87
§6.3　圆 …… 96
§6.4　椭圆 …… 99
§6.5　双曲线 …… 104
§6.6　抛物线 …… 108
§6.7　极坐标与参数方程 …… 111
第七章　立体几何 …… 117
§7.1　平面 …… 117

§7.2 直线、平面的空间平行关系 …… 119
§7.3 空间向量 …… 122
§7.4 空间向量的坐标运算 …… 128
§7.5 直线、平面的垂直、夹角和距离 …… 132
§7.6 多面体与旋转体 …… 142
第八章 复数 …… 148
§8.1 复数的概念 …… 148
§8.2 复数的运算 …… 152
§8.3 复数的三角形式与指数形式 …… 155
§8.4 复数的应用 …… 160
第九章 排列、组合和二项式定理 …… 163
§9.1 分类计数与分步计数原理 …… 163
§9.2 排列 …… 164
§9.3 组合 …… 169
§9.4 二项式定理 …… 172
§9.5 排列、组合、二项式定理的应用 …… 174

第一章　数　与　式

§1.1　数与式的概念及其运算

数是人类在争取生存、进行生产和交换的实践中创造出的一种特殊语言，是对量的具体描述及运算的手段.

1.1.1　实数

实数是有理数与无理数的总称. 实数系表如下：

- 实数
  - 有理数（有限小数或循环小数）
    - 整数
      - 正整数
      - 零
      - 负整数
    - 分数
      - 正分数
      - 负分数
  - 无理数（无限不循环小数）
    - 正无理数
    - 负无理数

实数具有以下性质：

(1) 封闭性　即实数对四则运算(加、减、乘、除)是封闭的，任意两个实数进行加、减、乘、除(除法要求除数不为零)运算后，其结果仍是实数；

(2) 有序性　即任意两个实数 a 与 b 可以比较大小，满足且只满足如下关系之一：

$$a < b,\ a = b,\ a > b.$$

其大小关系还具有传递性，即：如果 $a > b$, $b > c$，那么 $a > c$；

(3) 稠密性　即任意不等的两实数之间仍有实数；

(4) 连续性　即实数可以与数轴上的点一一对应.

数轴上表示实数 a 的点与原点的距离称为实数 a 的**绝对值**. 一个正数的绝对值是它本身；一个负数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零. 即

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{当 } a > 0 \text{ 时；} \\ 0, & \text{当 } a = 0 \text{ 时；} \\ -a & \text{当 } a < 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

例 1　化简：$|a-1|-(a+2)$.

解　当 $a \geqslant 1$ 时，原式 $= a-1-a-2=-3$；

当 $a < 1$ 时，原式 $=-a+1-a-2=-2a-1$.

例 2　如果 x, y 为实数，且 $|x+1|+(y-1)^2=0$，求 x 和 y 的值.

解 由 $|x+1|+(y-1)^2=0$, 得

$$\begin{cases} x+1=0, \\ y-1=0, \end{cases}$$

解方程组,得

$$x=-1,\ y=1.$$

设 a、b 都是实数,且 $a<b$, 则

(1) 满足不等式 $a \leqslant x \leqslant b$ 的一切实数 x 的全体叫做**闭区间**,记为$[a, b]$;

(2) 满足不等式 $a<x<b$ 的一切实数 x 的仝体叫做**开区间**,记为(a, b);

(3) 满足不等式 $a \leqslant x<b$ 或 $a<x \leqslant b$ 的一切实数 x 的全体叫做**半开半闭区间**,记为$[a, b)$ 或$(a, b]$,如图 1-1 所示.

图 1-1

上述区间中 a, b 称为**区间端点**, $b-a$ 称为它们的**区间长度**,因上述区间长度都是有限的,因此叫**有限区间**. 在数轴上,有限闭区间$[a, b]$可以用含 a, b 的线段来表示;开区间则可用不含端点的线段表示(图 1-1). 另外还有**无限区间**. 为了方便无限区间的表示,现引进符号∞, $+\infty$读作**正无穷大**;$-\infty$读作**负无穷大**. 无限区间有下列几种:

(4) 满足不等式 $x \geqslant a$(也记作 $a \leqslant x<+\infty$) 或 $x \leqslant b$(也记作 $-\infty<x \leqslant b$) 的一切实数 x 的全体叫做**无限半开区间**,记为$[a, +\infty)$或$(-\infty, b]$.

在数轴上,无限半开区间可以用一条射线来表示(图 1-2).

图 1-2

(5) 满足不等式 $x>a$(也记作 $a<x<+\infty$) 或 $x<b$(也记作 $-\infty<x<b$) 的一切实数 x 的全体叫做**无限开区间**,记为$(a, +\infty)$或$(-\infty, b)$;

(6) 全体实数记作$(-\infty, +\infty)$.

如果一个实数 x 在区间(a, b)内,用符号 $x \in (a, b)$ 表示,如 $2 \in (1, 5)$. 如果区间为闭区间,则称实数在闭区间上.

例 3 用区间表示下列实数 x 的全体:

(1) $-1 \leqslant x \leqslant 3$; (2) $0<x \leqslant 7$; (3) $x \leqslant 0$; (4) $x>-2$.

解 满足以上不等式的 x 的全体可分别用下列区间表示:

(1) $[-1, 3]$; (2) $(0, 7]$; (3) $(-\infty, 0]$; (4) $(-2, +\infty)$.

1.1.2 实数的运算

实数间可进行加、减、乘、除、乘方等运算,对非负实数还可进行开方运算,负实数可以开奇次方.

实数运算满足如下运算律：

表 1-1

运算律	加法	乘法
交换律	$a+b=b+a$	$ab=ba$
结合律	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(ab)c=a(bc)$
分配律	$a(b+c)=ab+ac$	

实数的运算顺序　在同一个式子里，先乘方、开方，然后乘、除，最后加、减. 有括号时，由最里层的括号算起，逐层去掉括号. 括号可以改变运算顺序.

1.1.3　式

初中我们已经学过单项式和多项式、整式和分式、有理式和无理式的概念. 有理式和无理式统称为**代数式**. 具体分类如下：

$$\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{单项式}\\\text{多项式}\end{cases}\\\text{分式}\end{cases}\\\text{无理式}\end{cases}$$

以上的每一种式都可进行加、减、乘、除四则运算. 在除法运算中，要注意用分解因式达到化简的目的. **零不可以作除数.**

例 4　计算：

(1) $(6x^3+2x^2+6x-5)+(2x+4x^2)-(4x^2-7x+6x^3)$；

(2) $(a-b)^2(a^2+2ab+b^2)$；

(3) $\left(1-\dfrac{x}{x+1}\right)-\dfrac{x+3}{x^2-1}\div\left(\dfrac{6x+2}{x^2-2x+1}+1\right)$.

解　(1) 原式 $=6x^3+2x^2+6x-5+2x+4x^2-4x^2+7x-6x^3=2x^2+15x-5$；

(2) 原式 $=[(a-b)(a+b)]^2=(a^2-b^2)^2=a^4-2a^2b^2+b^4$；

(3) 原式
$$\begin{aligned}&=\frac{x+1-x}{x+1}-\frac{x+3}{x^2-1}\div\frac{6x+2+x^2-2x+1}{x^2-2x+1}\\&=\frac{1}{x+1}-\frac{x+3}{(x+1)(x-1)}\div\frac{x^2+4x+3}{x^2-2x+1}\\&=\frac{1}{x+1}-\frac{x+3}{(x+1)(x-1)}\div\frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^2}\\&=\frac{1}{x+1}-\frac{x+3}{(x+1)(x-1)}\cdot\frac{(x-1)^2}{(x+1)(x+3)}\\&=\frac{1}{x+1}-\frac{x-1}{(x+1)^2}\\&=\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}.\end{aligned}$$

注意　多项式相乘时，一般的方法是先用一个多项式的每一项乘以另一个多项式的每一项，再把所得积相加，最后化成最简结果. 在计算过程中如能应用公式，要尽量使用.

习题 1.1

1. 填空：

(1) 0.5 与 $-\frac{1}{2}$ 是________数；

(2) 当 $a<2$ 时，$|a-2|+a+3=$ ________；

(3) 要使分式 $\frac{2}{x-3}$ 有意义，x 的值的取值范围是________；

(4) 满足不等式 $-5\leqslant x<2$ 的一切实数 x 的全体用区间可表示为________.

2. 若 a, b 为实数，且 $(5a+6)^2+(b-3)^2=0$，求 $\frac{a}{b}$ 的值.

3. 若 $x=\frac{1}{y}$，x, y 为非零有理数，化简：$\left(x-\frac{1}{x}\right)\cdot\left(y+\frac{1}{y}\right)$.

4. 计算：

(1) $1\frac{1}{2}\times\left[3\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2-1\right]-8\times[(-2)^2-(-4.5)-(-3)]$；

(2) $3[8x^2-(7x-5)]-8[3x^2-(4x-1)]$；

(3) $(x-2y)(1+x+y+4y^2)$；

(4) $\frac{x+2}{x^2+x}+\frac{2x+1}{x^2+3x+2}-\frac{x-3}{x^2+2x}$；

(5) $\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+4}\cdot\frac{2x^2+3x+1}{x^2-4x+3}\div\frac{2x^2-3x-2}{x^2-16}$.

5. 当 $1\leqslant a<5$ 时，化简：$\sqrt{(a-1)^2}+|5-a|$.

6. 已知 $a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0-(2x-1)^5=0$，求 $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$ 的值.

§1.2 不等式的证明

在初中，我们已经学过不等式的概念和如下的基本性质：

(1) 如果 $a>b$，那么 $a+c>b+c$（本节中的字母都表示实数）；

(2) 如果 $a>b$, $c>0$，那么 $ac>bc$；

(3) 如果 $a>b$, $c<0$，那么 $ac<bc$.

即当不等式两边同乘以一个小于零的数时，不等号要改变方向.

本节将在此基础上继续学习简单不等式的证明.

不等式的证明同等式的证明类似，就是根据不等式的性质，证明所给不等式对于式中字母的所有允许值都能成立. 证明不等式常常要用到下面几个**重要不等式**.

(1) $a^2\geqslant 0$ ($a\in\mathbf{R}$).

(2) 若 a, $b\in\mathbf{R}$，则 $a^2+b^2\geqslant 2ab$.

这是因为对于实数 a, b, 都有 $(a-b)^2\geqslant 0$，即 $a^2-2ab+b^2\geqslant 0$，于是 $a^2+b^2\geqslant 2ab$.

(3) 若 a, $b\in\mathbf{R}$，则 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$；$|a|-|b|\leqslant|a-b|$.

这两个不等式称为**三角不等式**.

以后在证明不等式过程中可以直接引用上述重要不等式.

例 1 如果 $a<b$，求证：(1) $a-b<0$； (2) $-5a>-5b$.

证 (1) 因为 $a<b$，根据不等式的性质(1)，$a-b<b-b$，即 $a-b<0$.

(2) 根据不等式性质(2)，$-5<0$，于是 $-5a>-5b$.

可见，不等式的性质(1)，就相当于解方程中的移项.

例 2 解不等式：$-2x+1>-6$.

解 由不等式性质(1)，得 $-2x>-6-1$，即 $-2x>-7$. 由不等式的性质(2)，将不等式两边同除以 -2，得

$$x<\frac{7}{2}.$$

例 3 已知 a，b 都是正实数，证明 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$.

证 因为 $a>0$，$b>0$，所以

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0.$$

于是

$$a-2\sqrt{ab}+b\geqslant 0,$$

即

$$a+b\geqslant 2\sqrt{ab},$$

因此

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}.$$

例 4 已知 $x>0$，求证：$x+\frac{9}{x}\geqslant 6$.

证 因为 $x>0$，

$$\left(\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^2\geqslant 0,$$

即

$$x-2\sqrt{x}\cdot\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{9}{x}\geqslant 0,$$

于是

$$x+\frac{9}{x}\geqslant 6.$$

习题 1.2

1. 如果 $a>b$，求证：$a-b>0$.
2. 如果 $m<n$，求证：$2m<2n$.
3. 已知 $x>0$，求证：$5x+\frac{9}{5x}\geqslant 6$.
4. 求证：$\sqrt{3}+\sqrt{5}<4$.
5. 已知 a，b 都是正实数，求证：$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$.
6. 已知 $a\neq 1$，那么 $\frac{2a}{1+a^2}<1$.

§1.3 不等式的解法

本节将利用不等式的性质讨论几种常见不等式的解法.

1.3.1 绝对值不等式的解法

1. $|x|<a$ 的解法($a>0$)

先看一个实例:解不等式: $|x|<2$.

由绝对值的意义, $|x|<2$ 表示在数轴上离开原点的距离小于 2 的所有 x 值,即不等式的解为

$$-2<x<2,$$

用区间表示为$(-2, 2)$.

一般地,当 $a>0$ 时, $|x|<a$ 的解是

$$-a<x<a,$$

用区间表示为$(-a, a)$.

当 $a<0$ 时, $|x|<a$ 无解.

同理,当 $a>0$ 时, $|x|\leqslant a$ 的解是

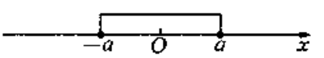


图 1-3

$$-a\leqslant x\leqslant a,$$

用区间表示为$[-a, a]$(图 1-3).

如 $|x|\leqslant\sqrt{3}$ 的解是 $-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$, 用区间表示为$[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

2. $|x|>a$ 的解法($a>0$)

类似上面的讨论,可得到:

当 $a>0$ 时, $|x|>a$ 的解是

$$x<-a \text{ 或 } x>a,$$

用区间表示为$(-\infty, -a)$或$(a, +\infty)$

当 $a>0$ 时, $|x|\geqslant a$ 的解是

$$x\leqslant -a \text{ 或 } x\geqslant a,$$

用区间表示为$(-\infty, -a]$或$[a, +\infty)$.

如 $|x|>1$ 的解是 $x<-1$ 或 $x>1$, 用区间表示为$(-\infty, -1)$或$(1, +\infty)$.

利用上述结论,可以用来解一些简单的含有绝对值的不等式.

例 1 解不等式: $|2x+3|<1$.

解 根据 $|x|<a$ 的解,原不等式等价于

$$-1<2x+3<1.$$

在不等式的各边同时加上-3,得

$$-1-3<2x+3-3<1-3,$$

即
$$-4<2x<-2.$$

各边再同时除以 2,得

$$-2 < x < -1.$$

用区间表示为$(-2, -1)$.

例 2 解不等式:$|3-x| \geqslant 5$.

解 原不等式可化为

$$3-x \leqslant -5 \text{ 或 } 3-x \geqslant 5,$$

解这两个不等式,得

$$x \geqslant 8 \text{ 或 } x \leqslant -2.$$

用区间表示为$(-\infty, -2]$或$[8, +\infty)$.

1.3.2 一元二次不等式

含有一个未知数,并且未知数的最高次数是 2 的**不等式**,叫做**一元二次不等式**.它的一般形式是

$$ax^2+bx+c>0 \quad 或 \quad ax^2+bx+c<0\ (a>0).$$

注意 首项系数 a 为负数时,只要将不等式两边同乘以-1,并把不等号改变方向,就可化为上面的类型.

下面介绍一元二次不等式的解法.

1. 代数法

例 3 解不等式:$x^2+3x-10>0$.

解 将不等式的左边分解因式,得

$$(x+5)(x-2)>0.$$

上述不等式可化为以下不等式组:

$$(1)\begin{cases}x+5>0,\\x-2>0;\end{cases} \quad 或 \quad (2)\begin{cases}x+5<0,\\x-2<0.\end{cases}$$

解不等式组(1),得 $x>2$;解不等式组(2),得 $x<-5$.

所以,原不等式的解为 $x>2$ 或 $x<-5$,用区间表示为$(-\infty, -5)$或$(2, +\infty)$.

例 4 解不等式:$x^2-7x+12 \leqslant 0$.

解 将不等式的左边分解因式,得

$$(x-3)(x-4) \leqslant 0.$$

上述不等式可化为以下不等式组:

$$(1)\begin{cases}x-3 \geqslant 0,\\x-4 \leqslant 0;\end{cases} \quad 或 \quad (2)\begin{cases}x-3 \leqslant 0,\\x-4 \geqslant 0.\end{cases}$$

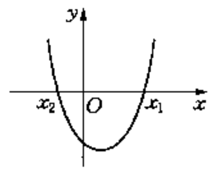
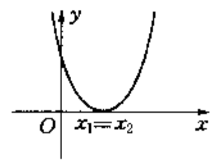
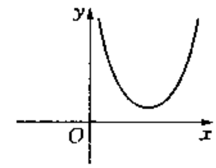
解不等式组(1),得 $3 \leqslant x \leqslant 4$;不等式组(2)无解.

所以,原不等式的解为 $3 \leqslant x \leqslant 4$,用区间表示为$[3, 4]$.

2. 图像法

一元二次不等式也可利用一元二次方程的根与二次函数的图像来求解,具体见下表:

表 1-2

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a>0)$ 的图像			
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ 的根	有两个不相等的实数根 $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	有两个相等的实数根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	没有实数根
一元二次不等式的解集 $ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$	$(x_1<x_2)$ $x<x_1$ 或 $x>x_2$	不等于 $-\dfrac{b}{2a}$ 的所有实数	全体实数
一元二次不等式的解集 $ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$	$x_1<x<x_2$	空集	空集

例 5　解不等式：$x^2+3x-10>0$.

解　因为 $\Delta=3^2-4\times(-10)>0$，容易求得方程 $x^2+3x-10=0$ 的两个相异实根 $x_1=-5$，$x_2=2$. 又因为 $a>0$，故抛物线开口向上. 作出函数 $y=x^2+3x-10$ 的大致图像(图 1-4)，得知在 $(-\infty,-5)$ 或 $(2,+\infty)$ 内 $y>0$. 所以，不等式 $x^2+3x-10>0$ 的解为 $x>2$ 或 $x<-5$.

例 6　解不等式：$x^2-7x+12\leqslant 0$.

解　因为 $\Delta=(-7)^2-4\times(12)>0$，容易求得方程 $x^2-7x+12=0$ 的两个相异实根 $x_1=3$，$x_2=4$. 又因为 $a>0$，故抛物线开口向上. 作出函数 $y=x^2-7x+12$ 的大致图像(图 1-5)，得知在 $(3,4)$ 内 $y<0$. 所以，不等式 $x^2-7x+12\leqslant 0$ 的解为 $3\leqslant x\leqslant 4$.

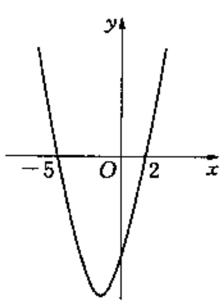


图 1-4

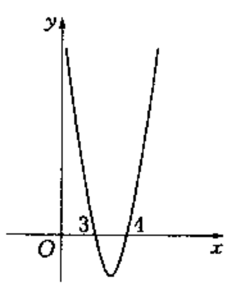


图 1-5

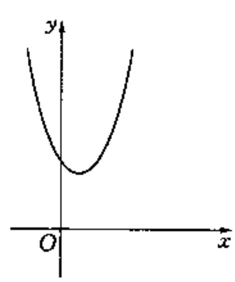


图 1-6

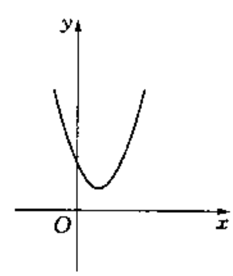


图 1-7

例 7　解不等式：$x^2-2x+3<0$.

解　因为 $\Delta=(-2)^2-4\times 3<0$，所以方程 $x^2-2x+3=0$ 无实根. 又因为 $a=1>0$，故函数 $y=x^2-2x+3$ 的图像开口向上，且在 x 轴上方. 于是不等式 $x^2-2x+3<0$ 无解(图 1-6).

例 8　解不等式：$-x^2+2x-5<0$.

解　由于 $a=-1<0$，在不等式两边乘以 -1，得

$$x^2-2x+5>0.$$

又因为 $\Delta=2^2-4\times(-1)\times(-5)<0$，所以方程 $x^2-2x+5=0$ 无实根. 因为 $a=1>0$，故函数 $y=x^2-2x+5$ 的图像开口向上，且在 x 轴上方. 无论 x 取何值，总有 $y>0$ (图 1-7)，于是

原不等式的解为全体实数.

1.3.3 分式不等式的解法

分式不等式中一种常见的情形是 $\frac{ax+b}{cx+d}>0$ 或 $\frac{ax+b}{cx+d}<0$ $(c\neq 0)$. 下面举例说明它的解法.

例 9 解不等式：$\frac{2x+1}{x-3}<0$.

解 原不等式等价于不等式组：

(1) $\begin{cases}2x+1>0,\\ x-3<0;\end{cases}$ 或 (2) $\begin{cases}2x+1<0,\\ x-3>0.\end{cases}$

解不等式组(1),得

$$-\frac{1}{2}<x<3;$$

不等式组(2)无解.

所以原不等式的解为 $-\frac{1}{2}<x<3$, 用区间表示为 $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$.

例 10 解不等式：$\frac{2-x}{x+5}<0$.

解 将不等式两边同乘以 -1,得

$$\frac{x-2}{x+5}>0.$$

上述不等式等价于以下不等式组：

(1) $\begin{cases}x-2>0,\\ x+5>0;\end{cases}$ 或 (2) $\begin{cases}x-2<0,\\ x+5<0.\end{cases}$

解不等式组(1),得

$$x>2;$$

解不等式组(2),得

$$x<-5.$$

所以,原不等式的解为 $x>2$ 或 $x<-5$, 用区间表示为 $(-\infty, -5)$ 或 $(2, +\infty)$.

事实上,不等式 $\frac{ax+b}{cx+d}>0$ (或 <0) $(c\neq 0)$ 的解也可等价于不等式 $(ax+b)(cx+d)>0$ (或 <0) $(c\neq 0)$ 的解.

习题 1.3

1. 解下列不等式：

(1) $|x|>4$;

(2) $|x|\leqslant\sqrt{5}$;

(3) $|3x|<7$;

(4) $|x-1|<3$;

(5) $|2x-3|\geqslant 5$;

(6) $3\leqslant|5-2x|$.

2. 解下列不等式：

(1) $(x+2)(x-1)>0$

(2) $x^2-6x-7<0$;

(3) $3+2x^2>x$;

(4) $x(x+2)<x(3-x)+1$;

(5) $2(x^2-6)>5x$;

(6) $x^2-3x+7<2x^2-x-1$.

3. 解下列不等式：

(1) $\frac{x+3}{1-x}<0$;

(2) $\frac{x-1}{2x+3}>0$;

(3) $\frac{3x+1}{x-3}-3\leqslant 0$;

(4) $\frac{2x+3}{x-4}<1$.

4. 已知函数 $y=-x^2-6x+8$,分别求使 $y<0$, $y>0$ 的 x 取值范围.

5. 已知以 x 为未知数的方程 $mx^2-(1-m)x+m=0$ 有两个不相等的实根,求 m 的取值范围.

6. m 取什么实数时,方程 $x^2-(m+2)x+4=0$ 有实根?

第二章　集合与函数

集合论是整个数学大厦的基础,函数是数学中一个重要的基本概念.本章将介绍关于集合的一些基本概念,以及常见的符号和简单运算,然后介绍函数、反函数等有关知识.

§2.1　集　　合

2.1.1　集合的基本概念

集合是数学中最基本的概念之一,它在现代数学中起着非常重要的作用.我们先看下面引例:

(1) 某班里的全体学生;

(2) 20 以内的质数;

(3) 所有的等腰直角三角形;

(4) 方程 $x^2-4x+3=0$ 的全部实根;

(5) 学校图书馆里的所有藏书;

(6) 平面内,到一定点距离相等的所有点.

上面各例子中指的都是一些对象的全体,而这些对象都具有某种共同性质.

把具有某种共同性质的对象组成的全体叫**集合**,简称**集**.组成集合的每个对象叫做这个集合的**元素**.

在上面的例子中,(1)是由这个班里的全体学生组成的集合,班里的每个学生都是这个集合的元素,(4)是由数字 1 和 3 组成的集合,(6)是由到定点等距离的点组成的集合.

一般地,集合用大写字母 A, B, C, …来表示,元素用小写字母 a, b, c, …来表示.元素与集合的关系是**属于**或**不属于**的关系,分别用符号"$\in$","$\notin$"(或$\overline{\in}$)表示.如元素 a 属于集合 A,记为 $a\in A$, 读做 a 属于 A;如元素 b 不属于集合 A,记为 $b\notin A$, 读做 b 不属于 A.

含有有限个元素的集合,叫做**有限集合**;含有无限个元素的集合叫做**无限集合**.上例中的(1)、(2)、(4)、(5)都是有限集合,而(3)、(6)是无限集合.

特殊地,只含有一个元素的集合称为**单元素集**,例如方程 $x-32=0$ 的解集,就是单元素集.不含任何元素的集合叫做**空集**,记为$\varnothing$,例如方程 $x^2+1=0$ 的实数解的集合就是$\varnothing$.

2.1.2　集合的表示法

1. 列举法

将集合中的元素一一列举出来,写在花括号内.这种表示集合的方法叫做**列举法**.

例如,20 以内的质数组成的集合,可以表示为 $A=\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$.

注意　每个元素只能写一次,可以不考虑元素的顺序.