查漏补缺
征服中考

方程与方程组

包于正 刘东周 顾瑛 编著

针对最新教改/配合考前复习/名校名师力作/风格清晰明了

世界图书出版公司

前　言

当今世界，竞争越来越激烈。跨入实验性示范性高中几乎等于迈进了大学的校门。在这样的背景下，中考自然而然成为焦点。

有很多同学问我："老师，怎样才能在中考中取得好成绩？"

有很多家长问我："虽然现在市面上教辅书很多，价格贵点不要紧，但是有的内容老套，有的针对性不强，您能帮忙推荐一下吗？"

有很多教师问我："中考题型年年翻新，今年又赶上教育改革，今年会有什么新题型、新措施呢？"

为此，我邀请 18 位长期从事一线教学的特级、高级教师、课改骨干和优秀教学研究人员，历经 3 年，依据《基础教育课程改革纲要（试行）》，并结合各地最新高级中学招生考试说明编写了一套丛书。力求贯彻课改精神，介绍中考的改革和发展，为广大师生提供可资参考和借鉴的中考命题及中考复习指导，尤其针对那些需要弥补自己知识缺漏的同学。

根据最新课改资料显示，教科书在理念和内容上都有很大的变化，因此中考考试的理念和内容也必然与过去有所不同。如何命题、如何指导、如何复习成了大家一直探索的主题。

我们以中考的重点、难点为核心，以长期教学活动中所总结出的经验、规律为基础，选编 12 个省市的中考真题，并配以详细的说明和解题指导，总结了中考命题的一些规律和考生在解题过程中的易错点，打破常规，按知识点编成书，编写了《查漏补缺征服中考》系列丛书，共 14 本。尤其适合初三学生在复习时使用。

本书的主要目标是：

——为学校模拟中考命题提供参考；

——为教师指导学生复习提供方向；

——为学生复习提供内容参照、解题要领和自我检测标准。

《查漏补缺征服中考》系列丛书完全按照知识点成书，读者可以依据自己在学习过程中的不足分别购买，“查漏补缺”才能“征服中考”。丛书各册书名分别是：

数学 《求值：绝对值与算术根》《方程与方程组》《相似形、锐角三角形和圆》《函数》《三角形和四边形》

物理 《运动、力和简单机械》《电和磁》《密度、压强和浮力》《声、光和热》《物理实验》

化学 《物质及相互反应与训练》《化学计算技巧与训练》《化学实验》

作者在安排练习内容时遵循由浅入深的学习规律层层递进，以适应不同年级、不同水平以及使用不同教材的初中学生的需要。全部练习均附有参考答案，方便读者自测自查。

本丛书有如下特色：

1. 总结了中学生在学习过程中遇到的难点、考试的重点；并以该重点、难点为主线把中学阶段相关知识串连起来，整理成全面的知识体系。

2. 以方法为重：作者通过对典型例题的分析，使同学们掌握解题的思路、策略和方法；“思维拓展”和“经典例题”不仅教同学解题，还进一步巩固知识点与解题方法的运用。

3. 以知识点为主：各书自成体系，同学们针对自己的弱项，选择阅读，既节省时间，又提高了效率，抓紧考前宝贵的每分每秒。

4. 版式灵活，新颖：既突出重点，让同学们一目了然，又留足了空白，让同学们在学习时能记下自己的心得体会，方便日后察看。

这套丛书由包于正、吴云、杨皓仁、俞安国主编，王思思、王德霈、王捷、刘东周、朱建波、陈申堂、何成芳、何克力、吴芸骞、刘枫、张国栋、邵前、蔡阳、圆心、顾瑛、盛民华等教师编写。在本书的编写过程中，得到了上海世界图书出版公司的大力支持，在此一并向他们表示致谢。

不足之处，希望广大教师、读者提出意见，让我们的工作更上一层楼！

编者

2006.7.1

目　　录

第一章　方程的基本概念

第一节　方程的定义及分类

方程是中学数学的重要内容之一，往往又是学习其他知识的基础. 它在生产生活的实践中有着广泛的应用，也是继续学习数学学科的重要工具. 在应用方程解决实际问题的过程中，将遇到各种不同类型的方程和方程组，本书仅以初中阶段学生应学习和掌握的各种方程的解法及应用作全面的阐述、归纳和深化.

不等式及等式

两个代数式之间的关系有两种：

(1) 用“不等号”($<$、$>$、$\approx$、$\neq$)连结起来所组成的式子叫做不等式，它表示两个代数式的不等关系，如 $3x+5>2x-3$ 等；

(2) 用“等号”($=$)连结两个代数式所组成的式子叫做等式，它表示两个代数式的相等关系，如 $2a+a=3a$ 或 $3x+2=5$.

但以上两例中，$2a+a=3a$ 其中字母不管用什么实数代进去，等式始终成立；而 $3x+2=5$ 就不同了，其中 x 只有当 $x=1$ 时，等式才能成立，所以这种等式叫做条件等式. 而前种等式 $2a+a=3a$ 则叫做“绝对等式”，一般称为“恒等式”. 条件等式就是习惯上叫做方程. 解方程就是求使等式成立时的条件的过程；我们求得的使等式成立的条件，即此时字母的值叫做该方程的解.

(1) 如 $a=b=c$ 的连等式，可化为等式组 $\begin{cases} a=b, \\ b=c. \end{cases}$

(2) 等式与代数式不同，等式中含等号，而代数式不含等号.

方程

例　某商品的售价为 110 元，它是把该商品的进货价

提高 10%作为售价. 问该商品的进货价为多少?

解 设该商品的进货价为 x 元. 根据题意,得

$x(1+10\%)=110$,解得 $x=100$.

式子中 $1+10\%$, 110 皆为已知量,而字母 x 表示未知的量,叫做未知量.

式子 $x(1+10\%)=110$ 是一个含有未知数的等式,它表明了未知数和已知数的关系,我们把这种含有未知数的等式叫做方程.

判断一个式子是否是方程,只需看两点:①是否为等式;②是否含未知数.

如 $x(1+10\%)=110$ 是一个方程,它含有未知数 x. 又如:① $-\frac{x}{3}=\frac{3}{2}$, ② $x+y=40$, ③ $x^2-6x=5$, ④ $x^2-2xy-3y^2=5$, ⑤ $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{3}$, ⑥ $x-\sqrt{x^2-4x-7}=1$, 这六个等式也都是含有未知数的等式,所以它们也都是方程.

方程的元与次

以上几个方程有的含有一个未知数,有的含有两个未知数;有的是整式,有的是分式形式(分母中含有未知数),还有的是根式形式(未知数在根号里).

未知数又叫做方程的元,一般地说把含有 n 个不同未知数的方程叫做 n 元方程.

方程中未知数的最高次数叫做方程的次,如 $x^2-6x=5$ 中含有一个未知数,且未知数的最高次数为 2,所以叫做一元二次方程. 又如 $x^2-2xy-3y^2=5$ 中,含有 x、y 两个未知数,且未知数的最高次数都为 2,所以叫做二元二次方程.

一般地说含有 m 个未知数且最高次数为 n 次的方程叫做 m 元 n 次方程,且是对整式方程而言的. 而 $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{3}$ 这类分式方程(分母中含有未知数的方程)及 $x-\sqrt{x^2-4x-7}=1$ 这类无理方程(根号中含有未知数的方程)只能由所含未知数的个数定为几元方程,而不能

定为几次方程.

关于未知数 x 的一元方程可表示为 $f(x)=g(x)$，其中 $f(x)$、$g(x)$ 为关于 x 的表达式.

关于未知数 x、y 的二元方程可表示为 $f(x,y)=g(x,y)$.

一般地关于未知数 $x, y, \cdots, z$ 的一次方程可以表示为 $f(x, y, \cdots, z)=g(x, y, \cdots, z)$.

方程分类

按方程左右两边表达式的运算来分类：

若方程表示的表达式(代数式)是关于未知数实施的是代数运算(加减乘除、乘方、开方)，那么这种方程叫做代数方程.

若方程左右两边的表达式(代数式)是有理式，则方程叫做有理方程.

若方程左右两边的表达式(代数式)是多项式，则方程叫做整式方程.

若方程左右两边的表达式(代数式)中包含未知数的除法运算，且除式里含有未知数，那么这种方程叫做分式方程.

若方程左右两边的表达式(代数式)中包含未知数的一元无理式(即包含开方运算且根号内含有未知数)，那么这种方程叫做无理方程.

若方程左右两边的表达式(代数式)关于未知数所实施的不是代数运算，如涉及到对数运算、三角函数运算，这种方程叫做超越方程.

综上所述，方程分类如下表：

<table>
<tr><td rowspan="5">方程</td><td rowspan="5">代数方程</td><td rowspan="4">有理方程</td><td rowspan="3">整式方程</td><td>一元一次方程</td></tr>
<tr><td>一元二次方程</td></tr>
<tr><td>简单的高次方程</td></tr>
<tr><td>分式方程</td><td></td></tr>
<tr><td>无理方程</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

（续　表）

方程	超越方程	指数方程　如　$2^x=4$
		三角方程　如　$\sin\alpha=\frac{1}{2}$（α 为锐角）
		对数方程　如　$\log_5 x=3$

未知数的允许值

使方程两边表达式有意义的所有未知数的值叫做未知数的允许值，即未知数的取值范围.

满足方程的未知数的值（即方程的解）必在未知数的取值范围内.

例 1　方程 $3x^2+3=x-4$. 因为未知数 x 的表达式为整式，所以 x 的取值范围为一切实数.

例 2　方程 $\frac{2}{x}+1=2$. 因为未知数的表达式为分式，所以 x 的取值范围为 $x\neq 0$ 的一切实数.

例 3　方程 $\sqrt{x}=\frac{1}{x-2}$. 因为未知数 x 的表达式为根式与分式组成，所以 x 的取值范围为 $x\geqslant 0$ 且 $x\neq 2$ 的一切实数.

第二节　解方程与方程的解

解方程和方程的解

同是一个“解”字，但是意义不同. 从语法词性来说“方程的解”中这个“解”字是作名词来用的，而“解方程”中这个“解”字是作动词来用的.

能使方程两边相等的未知数的值（或值组）叫做方程的解，一元方程的解又叫做方程的根，而且一般来讲含有一个未知数的方程即一元 n 次方程的解都能叫做方程的根；而含有两个或两个以上未知数的非整式方程，其满足

方程成立的未知数的值(或值组)只能称之为方程的解或方程组的解，而决不能称作方程的根或方程组的根.

方程所有的解的全体，又叫做方程的解的集合，简称方程的解集. 解集里的每一个解都应在未知数取值范围的集合之中.

如 $(x-1)(x-3)=0$，因为当 $x=1$ 及 $x=3$ 都能满足方程，因此该方程的解集应是由 1、3 组成的集合.

又如 $\frac{x^2-4}{x-2}=x+2$，未知数取值范围是 $x\neq 2$ 的一切实数的集合. 当 $x\neq 2$ 时，像这样的方程叫做绝对方程，即对于未知数取值范围内所有的数值中，任意取一个实数都能满足方程，即都为方程的解，所以此方程的解为 $x\neq 2$ 的实数集合.

当 $x\neq 2$ 时，

$$\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=x+2$$

再如 $x^2+1=0$，因为 x^2 属非负数，由非负数定义可知 $x^2\geqslant 0$ 而 $1>0$，由非负数性质可知:"非负数加正数其和永远大于 0"，所以 $x^2+1>0$ 即 $x^2+1\neq 0$，故不存在这样的实数 x 能满足方程 $x^2+1=0$，所以该方程无解. 像这样的方程称为矛盾方程，矛盾方程的解集是空集.

所谓解方程就是求方程解集的过程. 在解方程时应先确定方程有无解，若有解则应求出所有的解，这个过程就叫做解方程.

方程解的实施范围

在自然数范围解方程 $2x-6=0$，其解为 $x=3$，因 3 属于自然数，所以我们就可以称该方程在自然数范围内可以实施.

又如 $(x-2)^2=2$，在实数范围内是否可以实施? 因为解得 $x=2\pm\sqrt{2}$，而 $2\pm\sqrt{2}$ 是属于实数，所以该方程在实数范围内可以实施. 所以，如果解方程是在某数性范围内进行，且得到的结果即方程的解也应该在这个数性范围内，则称该方程在某数性范围内可以实施；反之，如得到的结果即方程的解不在所指定的数性范围内，则称该方程在某数性的范围内不能实施. 应该注意在不同数性的集合范围内，方程的解的个数也是不相同的，如 $(x-1)(x^2+$

1) = 0，在实数范围内它的解为 $x = 1$，但在复数范围内它的解为 $x_1 = 1$，$x_2 = \mathrm{i}$，$x_3 = -\mathrm{i}$. 因为我们在一般的情况下，都是在实数范围内这个前提下来解方程和确定方程的解，所以对一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$，当 $\Delta < 0$，我们不能确定为"该方程无解"，应确定为"在实数范围内无解"或"没有实数根"，绝不可以简单地下结论为"此方程无解".

例 1　在自然数范围内解方程：$2x - 7 = 0$.

解　因为解得 $x = \dfrac{7}{2}$ 是分数，所以该方程在自然数范围内无解.

例 2　在分数范围内解方程：$3x + 7 = 0$.

解　因为解得 $x = -\dfrac{7}{3}$ 是分数，所以该方程在分数范围内有解，且解为 $x = -\dfrac{7}{3}$.

例 3　当 k 为何数时方程 $kx + 3 = 0$ ① 在整数范围有解；② 在分数范围内无解.

解　当 $k \neq 0$ 时，$x = -\dfrac{3}{k}$. ① 如果要在整数范围有解，即 x 的值应该是整数，那 k 应取 -3 的所有约数. 当 $k = 1$ 时，$x = -3$，当 $k = -3$ 时，$x = 1$，所以当 k 分别取 1，3，-1，-3 时，这个方程的解为 $x = -3$，-1，3，1，方程在整数范围内有解；② 而当 $k = 0$ 时，该方程无解.

判断一个方程有解或无解，首先要弄清是在什么范围里解方程，再确定在这个数集里是否有解或是无解. 如果题中没有注明是在什么数集里解方程，则一般是指该方程应在实数范围内进行.

第三节　方程的性质与同解方程

同解方程的定义

如果两个方程的解完全相同，则这两个方程叫同解方

程. 我们必须理解它的定义：在这里，所谓的“两个方程的解完全相同”，是指第一个方程所有的解是第二个方程全部的解；反过来，第二个方程所有的解也应该是第一个方程全部的解.

同解原理

1. 方程两边都加上(或减去)同一个数或整式，所得到的新方程和原方程同解；

2. 方程两边都乘以(或除以)同一个不等于零的数或整式，所得到的新方程和原方程同解.

同解原理 1 是解方程变形过程时移项的依据. 同解原理 2 是解方程时在方程变形过程中去分母和去未知数前的系数的依据.

在解方程过程中，若违反了同解定义或同解原理，则两个方程不同解，因此产生的解就不是原方程的解. 对原方程的解来讲，可能会增加一些根或有时会失去某些根.

在方程求解的过程中，对原方程必须进行化简变形，而化简后每步所得的新方程必须与原方程同解，所以在解方程时的化简变形过程必须步步符合同解原理，不得违反方程的同解性，否则就会产生增根或失根.

例 判断下列每对方程是否是同解方程.

1. $\frac{3x-1}{2}=1$ 与 $x^2+x-2=0$.

解 由于两个方程的解均为 $x=1$，故是同解方程.

2. $x-\frac{2}{x-2}=x-\frac{2}{x-2}$ 与 $x=2$.

解 很明显，当 $x=2$ 时，$\frac{2}{x-2}$ 无意义，故不是同解方程.

3. $x-\sqrt{x-1}=3-\sqrt{x-1}$ 与 $x=3$.

解 $x-\sqrt{x-1}=3-\sqrt{x-1}$ 的解是 $x=3$，故是同解方程.

4. $x(x-3)=4x$ 与 $x-3=4$.

解 $x(x-3)=4x$ 的解是 $x_1=7$，$x_2=0$. 而 $x-$

$3=4$ 的解是 $x=7$，故不是同解方程.

5. 如果方程甲的解是 2 和 8，乙的解是 8 和 2，那么方程甲和方程乙是不是同解方程?

解 是同解方程.

方程的增根与失根

当解方程的化简过程违反了同解原理，使得原方程中未知数的取值范围发生了变化，于是就会产生增根与失根.

为了判断所解的根是否为增根，就必须检验方程的根. 要点：①分别代入；②分别计算；③比较计算的结果；④做出结论.

如在解分式方程时，原方程的解的取值范围为能满足方程，又满足分母 $\neq 0$ 的实数. 但通过去分母后，方程由分式方程变为整式方程，未知数取值范围变为能满足方程的实数. 因此，未知数取值范围扩大了，有可能产生增根.

有时解方程时，由于解法不当，造成原方程的未知数的取值范围缩小，因此也就会产生失根. 如方程 $x^2=2x$，两边同时约去 x，即产生此情况. 由于原方程为整式方程，x 的取值范围为一切实数，当两边同时约去 x，实质上是两边同时除以 x 即 $\frac{x^2}{x}=\frac{2x}{x}$，此方程变为分式方程，因此未知数的取值范围由原来的一切实数，缩小到分母 $x\neq 0$ 的实数，由于 $x=0$ 是原方程的解，但不是现在新方程 $\frac{x^2}{x}=\frac{2x}{x}$ 的解，于是产生了失根，所以习惯上我们是掌握“宁增勿失”这个原则，即宁可要增根也不能失根，因为只要把根代回原方程检验，即可辨明是否是增根. 而失根要找回来就困难了. 如上例 $x^2=2x$，正确的解法为 $x^2-2x=0$，$x(x-2)=0$ 可得 $x_1=0$，$x_2=2$，这样就避免了失根.

第二章　一元一次方程

第一节　基 本 概 念

定义

含有一个未知数，且未知数的次数为 1，系数不等于 0 的整式方程叫做一元一次方程.

标准式

$$ax = b\ (a \neq 0)$$

方程 $ax = b$ 或 $ax + b = 0$，只有当 $a \neq 0$ 时，才是一元一次方程；反之，如果明确指出 $ax = b$ 或 $ax + b = 0$ 是关于 x 的一元一次方程，那么就隐含着已知条件 $a \neq 0$.

解的原理

必须保证每一步所解得的新方程必须保持同解，即一定要以同解原理和运算法则为依据进行同解变形.

解的讨论

(1) 当 $a \neq 0$ 时，原方程有惟一的解 $x = \dfrac{b}{a}$；

(2) 当 $a = b = 0$，即为 $0x = 0$ 形式时，方程有无数个解；

(3) 当 $a = 0$，$b \neq 0$，即为 $0x = b$ 形式时，方程无解.

解题步骤与依据

(1) 去分母，方程两边都乘各分母的最小公倍数；
（同解原理 2）

(2) 去括号，先去小括号，再去中括号，最后去大括号；
（去括号法则）

(3) 移项，把含有未知数的项移到方程的一边，其他的

记住移项时要变号！

项移到另一边；（同解原理 1）

（4）合并同类项，把方程化为 $ax=b\ (a\neq 0)$ 的形式；（合并同类项法则）

（5）去系数，方程两边同除以未知数的系数；（同解原理 2）

（6）验根.（方程解的定义）

第二节　各种题型解法

基本型

例　解关于 x 的方程：$\frac{1-x}{12}-\frac{x-2}{2}=x-5-\frac{x+3}{3}$.

去分母时，即方程等号两端同乘各分母的最小公倍数时，不要漏乘没有分母的项，即 $(x-5)$ 不要漏乘 12.

解　去分母(两边乘以 12)，得

$(1-x)-6(x-2)=12(x-5)-4(x+3)$.

去括号，得　$1-x-6x+12=12x-60-4x-12$.

移项，得　$-x-6x-12x+4x=-60-12-12-1$.

合并同类项，得　$-15x=-85$.

去系数(两边除以 -15)，得　$x=\frac{17}{3}$.

验根(略).

小数型

例 1　解关于 x 的方程：$0.5(x-1)+x+0.5=0.6$.

解　化小数为整数(两边乘以 10)，得

$5(x-1)+10x+5=6$.

去括号，得　$5x-5+10x+5=6$.

移项，得　$5x+10x=6+5-5$.

合并，得　$15x=6$.

去系数，得　$x=\frac{2}{5}$.

验根(略).

例 2 解关于 x 的方程：$\frac{x-5}{2}=\frac{0.4x+0.9}{0.5}-\frac{0.03+0.02x}{0.03}$.

解 化小数为整数，得 $\quad \frac{x-5}{2}=\frac{4x+9}{5}-\frac{3+2x}{3}$.

去分母，得 $\quad 15(x-5)=6(4x+9)-10(3+2x)$.

去括号，得 $\quad 15x-75=24x+54-30-20x$.

移项，得 $\quad 15x-24x+20x=54-30+75$.

合并，得 $\quad 11x=99$.

去系数，得 $\quad x=9$.

验根(略).

本题易在去分母、去括号和移项中出现错误，还会对 $\frac{0.4x+0.9}{0.5}$ 和 $\frac{0.03+0.02x}{0.03}$ 产生害怕心理，不知道应当怎样寻找公分母.

对于分数的分子、分母同时扩大或缩小若干倍，值不变. 这一性质在中考中会经常遇到.

括号型

分析与点评 遇到多层括号的题型，一般是采用“去括号法则”，“由里向外”即先去小括号，再去中括号，最后去大括号. 但是解题不要限于一般化，应先观察一下题目，从题目本身的特点出发. 有的题型相反，由外向里层层剥去其括号，并与移项和合并相结合，这样解题反而比较简捷、合理.

例 1 解关于 y 的方程：$2\{3[4(5y-1)-8]-20\}-7=1$.

解 移项合并，得 $\quad 2\{3[4(5y-1)-8]-20\}=8$.

去大括号，得 $\quad 3[4(5y-1)-8]-20=4$.

移项合并，得 $\quad 3[4(5y-1)-8]=24$.

去中括号，得 $\quad 4(5y-1)-8=8$.

移项合并，得 $\quad 4(5y-1)=16$.

去小括号，得 $\quad 5y-1=4$.

移项合并，得 $\quad 5y=5$.

去系数，得 $\quad y=1$.

验根(略).

例 2 解关于 x 的方程：$\frac{1}{9}\left\{\frac{1}{7}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{x+2}{3}+4\right)+6\right]+8\right\}=1$.

解 去大括号，得 $\frac{1}{7}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{x+2}{3}+4\right)+6\right]+8=9.$

移项合并，得 $\frac{1}{7}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{x+2}{3}+4\right)+6\right]=1.$

去中括号，得 $\frac{1}{5}\left(\frac{x+2}{3}+4\right)+6=7.$

移项合并，得 $\frac{1}{5}\left(\frac{x+2}{3}+4\right)=1.$

去小括号，得 $\frac{x+2}{3}+4=5.$

移项合并，得 $\frac{x+2}{3}=1.$

解方程，得 $x=1.$

验根(略).

繁分式型

分析与点评 凡是属于繁分式形式的方程解法应运用分式的基本性质，把原方程变成整式方程，如 $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ 变为 $\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$.

例 解关于 x 的方程：$x-\dfrac{\frac{x}{2}-\frac{3+x}{4}}{2}=3-\dfrac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{6-x}{3}\right)}{2}$.

解 该方程可视为 $x-\dfrac{\frac{x}{2}-\frac{3+x}{4}}{\frac{2}{1}}=3-\dfrac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{6-x}{3}\right)}{\frac{2}{1}}$.

根据分式的基本性质可将原方程变形成整式方程：