

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА ТОМ I

Л. Д. ЛАНДАУ

Е. М. ЛИФШИЦ

МЕХАНИКА

朗道

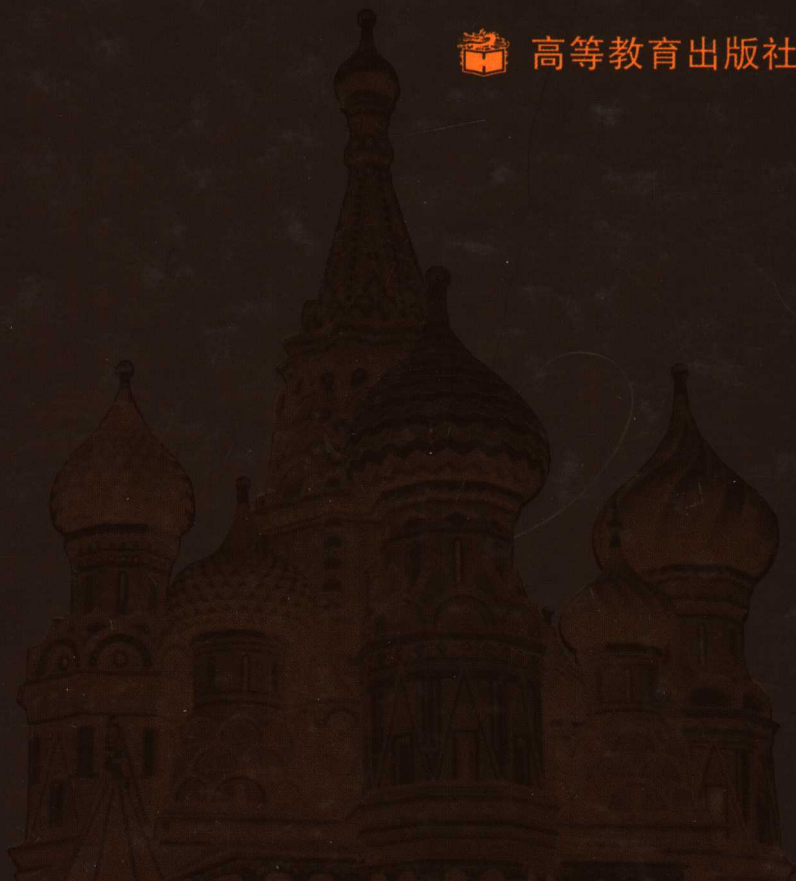
理论物理学教程 第一卷

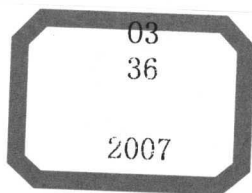
力学 (第五版)

Л. Д. 朗道 Е. М. 栗弗席兹 著 李俊峰 译



高等教育出版社





ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА ТОМ I

Л. Д. ЛАНДАУ
Е. М. ЛИФШИЦ

МЕХАНИКА

理论物理学教程 第一卷

力学 (第五版)

Л. Д. 朗道 Е. М. 栗弗席兹 著 李俊峰 译

俄罗斯联邦教育部推荐大学物理专业教学参考书



高等教育出版社

图字:01-2007-0910 号

Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц《Теоретическая физика. 10 томах》

Copyright© FIZMATLIT PUBLISHERS RUSSIA, ISBN 5-9221-0053-X

The Chinese language edition is authorized by FIZMATLIT PUBLISHERS RUSSIA for publishing and sales in the People's Republic of China

图书在版编目(CIP)数据

力学:第5版/(俄罗斯)朗道,(俄罗斯)栗弗席兹著:
李俊峰译. —北京:高等教育出版社,2007.4
ISBN 978-7-04-020849-8

I. 力… II. ①朗…②栗…③李… III. 力学—高
等学校—教材 IV. O3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 033678 号

策划编辑 王超 责任编辑 王超 封面设计 刘晓翔 责任绘图 朱静
版式设计 史新薇 责任校对 杨雪莲 责任印制 韩刚

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100011
总 机 010-58581000

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 北京中科印刷有限公司

开 本 787×1092 1/16
印 张 11.5
字 数 200 000
插 页 1

购书热线 010-58581118
免费咨询 800-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landraco.com>
<http://www.landraco.com.cn>
畅想教育 <http://www.widedu.com>

版 次 2007 年 4 月第 1 版
印 次 2007 年 4 月第 1 次印刷
定 价 35.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 20849-00

第四版编者序

从这本书开始,科学出版社将重新出版 Л. Д. 朗道和 Е. М. 栗弗席兹的《理论物理学》系列教程.这是首次在栗弗席兹去世后出版.准备出版已故作者的著作是令人伤感的,这个沉重的任务落到了我身上.

这次出版的《力学》修正了第三版出版后发现的印刷错误,也在文字上做了少量的改进.这些修改是栗弗席兹和我共同完成的,其中有一部分已经反映在最近的英文版中.

Л. П. 皮塔耶夫斯基

1987年5月

第三版序

该书的第二版与第一版几乎没有差别.在准备这一版时也没有发现任何值得修改之处,所以该书基本上是翻印(只是改正了印刷错误).我和 Л. И. 皮塔耶夫斯基只是对最后一章的绝热不变量进行了修改和补充.

E. M. 栗弗席兹

1972年6月

第一版序

从这本书开始,我们将陆续再版《理论物理学》教程,计划包括以下各卷:

1. 力学,
2. 场论,
3. 量子力学(非相对论理论),
4. 相对论量子理论,
5. 统计物理学,
6. 流体力学,
7. 弹性理论,
8. 连续介质电动力学,
9. 物理动理学.

第一卷的第一版曾于1940年由Л.朗道和Л.皮亚季戈尔斯基发表.虽然这套教程内容没有改变,但是经过了重大修改并完全重写.

感谢И.Е.贾洛申斯基和Л.П.皮塔耶夫斯基在阅读校样时给予的帮助.

Л.Д.朗道, Е.М.栗弗席兹

莫斯科,1957年7月

目 录

第一章 运动方程	1
§ 1 广义坐标	1
§ 2 最小作用量原理	2
§ 3 伽利略相对性原理	4
§ 4 自由质点的拉格朗日函数	5
§ 5 质点系的拉格朗日函数	7
第二章 守恒定律	12
§ 6 能量	12
§ 7 动量	14
§ 8 质心	15
§ 9 动量矩	17
§ 10 力学相似性	20
第三章 运动方程的积分	24
§ 11 一维运动	24
§ 12 根据振动周期确定势能	26
§ 13 折合质量	28
§ 14 有心力场内的运动	29
§ 15 开普勒问题	35
第四章 质点碰撞	41
§ 16 质点分裂	41
§ 17 质点弹性碰撞	44
§ 18 质点散射	47
§ 19 卢瑟福公式	53
§ 20 小角度散射	56

第五章 微振动	58
§ 21 一维自由振动	58
§ 22 强迫振动	61
§ 23 多自由度系统振动	66
§ 24 分子振动	71
§ 25 阻尼振动	76
§ 26 有摩擦的强迫振动	78
§ 27 参数共振	81
§ 28 非简谐振动	85
§ 29 非线性振动中的共振	88
§ 30 快速交变场中的运动	94
第六章 刚体的运动	97
§ 31 角速度	97
§ 32 惯性张量	99
§ 33 刚体动量矩	107
§ 34 刚体运动方程	109
§ 35 欧拉角	111
§ 36 欧拉方程	116
§ 37 非对称陀螺	118
§ 38 刚体接触	125
§ 39 非惯性参考系中的运动	129
第七章 正则方程	133
§ 40 哈密顿方程	133
§ 41 罗斯函数	135
§ 42 泊松括号	137
§ 43 作为坐标函数的作用量	141
§ 44 莫培督原理	143
§ 45 正则变换	145
§ 46 刘维尔定理	148
§ 47 哈密顿-雅可比方程	149
§ 48 分离变量	151
§ 49 绝热不变量	157
§ 50 正则变量	159
§ 51 绝热不变量守恒精确性	161
§ 52 条件周期运动	164

朗道撰写的第一版序	169
索引	171

第一章

运动方程

§ 1 广义坐标

质点是力学的基本概念之一,是指那些忽略尺寸而不会影响其运动描述的物体.当然,可否忽略尺寸因不同问题的具体条件而异.例如,研究行星绕太阳的运动时,可以认为行星是质点,但是在研究行星自转时就不能当作质点.

质点在空间的位置由其径矢 $\boldsymbol{r}$ 确定,其分量用笛卡儿坐标 x, y, z 表示.径矢 $\boldsymbol{r}$ 对时间的导数

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

称为质点的速度,其二阶导数 $d^2\boldsymbol{r}/dt^2$ 称为质点的加速度.今后,对时间的导数经常用符号上面的点表示,如 $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$.

为了确定由 N 个质点组成的系统在空间的位置,需要给定 N 个径矢,即给定 $3N$ 个坐标.

通常,唯一地确定系统位置所需独立变量的数目称为系统的自由度^①, N 个质点组成系统的自由度为 $3N$.这些独立变量不一定是质点的笛卡儿坐标,根据问题的条件,有时选取其它坐标更加方便.

任意 s 个可以完全刻画系统(s 个自由度)位置的变量 $q_1, q_2, \dots, q_s$ 称为该系统的广义坐标,其导数 $\dot{q}_i$ 则称为广义速度.

^① 这里讨论的是完整系统,非完整系统的自由度不能这样定义,参见:马尔契夫著.理论力学(第3版).李俊峰译.北京:高等教育出版社,2005:21.

然而,给定广义坐标的数值并不能确定系统在给定时刻的“力学状态”,因为还不足以预测下一时刻系统的位置.对于给定的广义坐标值,系统可以具有任意的速度,因此下一时刻(即经过无穷小的时间间隔 dt)系统的位置可能不同.

实验表明,同时给定系统的所有广义坐标和速度就可以确定系统的状态,并且原则上也可以预测以后的运动.从数学观点看,在某时刻给定所有广义坐标 q 和速度 $\dot{q}$ 就唯一地确定了该时刻的加速度 $\ddot{q}$ ^①.

加速度与坐标、速度的关系式称为运动方程.对于函数 $q(t)$ 来说,这个关系式是二阶微分方程,原则上,将其积分可以求出函数 $q(t)$,即确定系统的运动轨迹.

§ 2 最小作用量原理

力学系统运动规律的最一般表述由最小作用量原理(或者哈密顿原理)给出.根据这个原理,描述每一个力学系统都可以用一个相应的函数

$$L(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t),$$

或者简记为 $L(q, \dot{q}, t)$, 并且系统的运动还要满足下面的条件.

假设在时刻 $t = t_1$ 和 $t = t_2$ 系统的位置由两个坐标 $q^{(1)}$ 和 $q^{(2)}$ 确定.那么,系统在这两个位置之间的运动使得积分

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (2.1)$$

取最小值^②.函数 L 称为给定系统的拉格朗日函数,积分(2.1)称为作用量.

拉格朗日函数中只包含 q 和 $\dot{q}$,而不包含更高阶导数 $\ddot{q}, \ddot{\ddot{q}}, \dots$,这反映了前面提到的物理事实,即力学状态完全由坐标和速度确定.

下面我们通过求积分(2.1)的最小值来推导运动微分方程.为了书写简便,我们先假设系统有一个自由度,只需一个函数 $q(t)$ 来确定.

设 $q = q(t)$ 是使 S 取最小值的函数,就是说用任意函数

$$q(t) + \delta q(t) \quad (2.2)$$

代替 $q(t)$ 都会使 S 增大,其中函数 $\delta q(t)$ (也称为函数 $q(t)$ 的变分)在从 t_1 到 t_2 的整个时间间隔内都是小量.由于比较函数(2.2)在时刻 $t = t_1$ 和 $t = t_2$ 也应该分别取值为 $q^{(1)}$ 和 $q^{(2)}$,于是有:

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0. \quad (2.3)$$

① 为了书写简便,我们用 q 表示所有广义坐标 $q_1, q_2, \dots, q_s$, 用 $\dot{q}$ 表示所有广义速度.

② 然而,应该指出的是,这个最小作用量原理的表述并不是对系统的整个运动轨迹成立,而是在足够小的区段上成立.对于整个轨迹来说,积分(2.1)只能取驻值而不一定是最小值.当然,这对于推导运动方程没有什么影响,因为我们只需用到驻值条件.

用 $q(t) + \delta q(t)$ 代替 $q(t)$ 使 S 产生的增量为

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt.$$

这个差按 δq 和 $\delta \dot{q}$ 的指数展开式(在积分号下的表达式中)是从一阶项开始的. S 取最小值^①的必要条件是这些项之和等于零. 这个和称为积分的一阶变分(或者简称为变分). 于是, 最小作用量原理可以写成

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0, \quad (2.4)$$

或者变分后的形式:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0.$$

注意到 $\delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q$, 将第二项分部积分得:

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0. \quad (2.5)$$

根据(2.3)上式中第一项等于零. 剩下的积分在 δq 任意取值时都应该等于零. 这只有在被积函数恒等于零的情况下才有可能. 于是我们得到方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

对于有 s 个自由度的系统, 在最小作用量原理中有 s 个不同的函数 $q_i(t)$ 应该独立地变分. 显然我们可以得到 s 个方程:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (2.6)$$

这就是我们要推导的运动微分方程, 在力学中称为拉格朗日方程^②. 如果给定力学系统的拉格朗日函数已知, 则方程(2.6)建立了加速度、速度和坐标之间的联系, 是系统的运动方程.

从数学的观点看, 方程(2.6)包括 s 个未知函数 $q_i(t)$ 的 s 个二阶微分方程. 这个方程组的通解包含 $2s$ 个任意常数. 为了确定这些常数, 从而完全确定力学系统的运动, 必须知道描述系统在某给定时刻状态的初始条件, 例如坐标和速度的初值.

设力学系统由 A 和 B 两部分组成, 每个部分都是封闭的, 拉格朗日函数分别是 L_A 和 L_B . 在两个部分相距足够远以至它们的相互作用可以忽略的极限情况下, 系统的拉格朗日函数趋向于极限:

① 一般来说是驻值.

② 在求积分(2.1)驻值的变分计算中, 这些方程称为欧拉方程.

$$\lim L = L_A + L_B. \quad (2.7)$$

拉格朗日函数的这种可加性反映了一个事实:每一个独立部分的运动方程不可能包含另一个部分的物理量.

显然,将力学系统的拉格朗日函数乘以一个任意常数,不会改变运动微分方程.这似乎导致一种不确定性:各个孤立力学系统的拉格朗日函数可以乘以不同的任意常数.可加性消除了这个不确定性,只允许所有力学系统都乘以同一个任意常数,而这归结为选择这个物理量度量单位的任意性,我们还将 在 § 4 中继续讨论这个问题.

我们还需要进行以下的一般性讨论.考虑两个拉格朗日函数 $L'(q, \dot{q}, t)$ 和 $L(q, \dot{q}, t)$, 它们相差某个坐标和时间的函数 $f(q, t)$ 对时间的全导数:

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt}f(q, t). \quad (2.8)$$

计算这两个拉格朗日函数对应的积分(2.1)可得关系式:

$$\begin{aligned} S' &= \int_{t_1}^{t_2} L'(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}f(q, t) dt \\ &= S + f(q^{(2)}, t_2) - f(q^{(1)}, t_1), \end{aligned}$$

即 S 和 S' 相差一个附加项.该附加项在变分时将消失, $\delta S' = 0$ 和 $\delta S = 0$ 完全相同,因而运动微分方程也相同.

可见,拉格朗日函数可以附加任意一个关于时间和坐标的函数的全导数.

§ 3 伽利略相对性原理

为了研究力学现象必须选择参考系.一般来说运动规律在不同的参考系下具有不同的形式.假如任意选择参考系,则可能使非常简单的现象看起来十分复杂.这自然会产生一个问题,即如何选择参考系使得力学规律最简单.

相对于任意参考系,空间是非均匀的各向异性的.这就是说,如果某个物体与其它物体之间没有相互作用,但是它在空间中的不同位置 and 不同指向在力学意义上是不等价的.同样,一般情况下时间也是非均匀的,即不同时刻也是不等价的.显然,时间和空间的这些性质使力学现象的描述变得复杂.例如,自由物体(即不受任何外力作用)不可能静止:如果在某个时刻其速度等于零,但在下一个时刻它开始向某个方向运动.

然而,似乎总是存在某种参考系,空间相对它是均匀的各向同性的,时间相对它是均匀的.这样的参考系称为惯性参考系.在惯性参考系中,在某个时刻静止的自由物体将永远保持静止.

对于在惯性参考系中自由运动的质点,我们立即可以得到其拉格朗日函数形式的一些结论.时间和空间的均匀性意味着这个函数不显含质点的径矢 r 和

时间 t , 即 L 只是速度 $\mathbf{v}$ 的函数. 由于空间各向同性, 拉格朗日函数不依赖于矢量 $\mathbf{v}$ 的方向, 只能是速度大小的函数, 也就是说 L 是 $v^2 = \mathbf{v}^2$ 的函数:

$$L = L(v^2). \quad (3.1)$$

由拉格朗日函数不显含质点的径矢 $\mathbf{r}$ 可知 $\partial L / \partial \mathbf{r} = 0$, 拉格朗日方程可写成^①

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = 0,$$

由此可得 $\partial L / \partial \mathbf{v} = \text{const.}$ 而 $\partial L / \partial \mathbf{v}$ 只是速度的函数, 故

$$\mathbf{v} = \text{const.} \quad (3.2)$$

可见, 在惯性参考系中任何自由运动的速度的大小和方向都不改变. 这个结论包含了惯性定律的内容.

如果在我们已有的这个惯性参考系以外, 再引进另一个惯性参考系, 它相对第一个惯性参考系作匀速直线运动, 则相对这两个参考系的自由运动规律完全相同: 自由运动仍是匀速直线运动.

实验证明, 不仅自由运动规律相对这两个参考系完全相同, 所有力学关系式相对这两个参考系都是等价的. 因此存在不只是一个, 而是无穷多个惯性参考系, 它们相互作用匀速直线运动. 在这些参考系中时间和空间都是相同的, 力学规律也是相同的. 这个结论称为伽利略相对性原理, 这是力学中最重要的原理之一.

上面论述充分说明了惯性参考系的特性, 应该利用这样的参考系研究力学现象. 今后如果不特别声明, 我们只研究惯性参考系.

无穷多个这样的参考系的等价性还表明, 不存在比其它参考系更好的一个“绝对”惯性参考系.

设有两个不同的参考系 K 和 K' , 其中 K' 相对 K 以速度 $\mathbf{V}$ 运动, 同一个质点相对这两个参考系的坐标 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{r}'$ 满足关系式

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V}t. \quad (3.3)$$

我们认为这两个参考系中的时间是相同的:

$$t = t'. \quad (3.4)$$

绝对时间假设是经典力学的基础^②.

公式(3.3)和(3.4)称为伽利略变换. 伽利略相对性原理可以表述为: 力学运动方程在伽利略变换下具有不变性.

§ 4 自由质点的拉格朗日函数

下面研究拉格朗日函数的形式, 首先研究一个最简单的例子——质点相对

① 标量对矢量的偏导数也是矢量, 其分量分别等于该标量分别对矢量各个分量的偏导数.

② 这个假设在相对论力学中不成立.

惯性参考系的自由运动. 我们已经知道, 这种情况下拉格朗日函数只能依赖于速度的平方. 我们利用伽利略原理来研究这个依赖关系的形式. 如果惯性参考系 K 以无穷小速度 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 相对惯性参考系 K' 运动, 则有 $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\varepsilon}$. 拉格朗日函数 $L(v^2)$ 经过伽利略变换后得到 L' , 由于在所有惯性参考系中运动方程的形式都相同, 故 L' 与 $L(v^2)$ 只能相差某个关于时间和坐标的函数的全导数(参见 § 2).

于是有

$$L' = L(v'^2) = L(v^2 + 2\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \varepsilon^2).$$

将这个表达式展开成 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的幂级数并忽略高阶小量得:

$$L(v'^2) = L(v^2) + 2 \frac{\partial L}{\partial v^2} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}.$$

只有当该等式右边第二项与速度 $\boldsymbol{v}$ 呈线性依赖关系时, 它才能是时间的全导数.

因此 $\frac{\partial L}{\partial v^2}$ 不依赖于速度, 即拉格朗日函数与速度平方成正比:

$$L = \frac{m}{2} v^2, \quad (4.1)$$

其中 m 为常数.

由拉格朗日函数在速度无穷小变换下满足伽利略相对性原理可知, 在参考系 K 以有限速度 $\boldsymbol{V}$ 相对 K' 运动情况下, 拉格朗日函数也满足该原理. 事实上,

$$L' = \frac{m}{2} v'^2 = \frac{m}{2} (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{V})^2 = \frac{m}{2} v^2 + 2 \frac{m}{2} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{V} + \frac{m}{2} V^2$$

或者

$$L' = L + \frac{d}{dt} \left(2 \frac{m}{2} \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{V} + \frac{m}{2} V^2 t \right).$$

第二项是全导数, 可以略去.

物理量 m 称为质点的质量. 根据拉格朗日函数的可加性, 对于无相互作用的质点组成的自由质点系, 有^①

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2}. \quad (4.2)$$

必须强调, 只有考虑到可加性的时候, 给出的质量定义才有实际物理意义. 在 § 2 曾经指出, 总是可以将拉格朗日函数乘以常数而不改变方程. 对于函数 (4.2), 乘以常数就相当于改变了质量的度量, 不同质点的质量之间的比例关系却是具有实际物理意义的, 不会发生改变.

容易看出, 质量不可能是负的. 事实上, 根据最小作用量原理, 质点从空间点 1 到空间点 2 的真实运动, 使得积分

① 我们用拉丁字母表中前几个字母表示质点的编号, 用 i, k, l 给坐标编号.

$$S = \int_1^2 \frac{mv^2}{2} dt$$

取最小值. 假如质量是负的, 对于快速离开点 1 再快速接近点 2 的轨迹, 作用量可以取绝对值任意大的负值, 不可能有最小值^①.

注意到

$$v^2 = \left(\frac{dl}{dt} \right)^2 = \frac{dl^2}{dt^2}. \quad (4.3)$$

因此为了得到拉格朗日函数只需求出在特定坐标系中弧长微元 dl 的平方.

例如, 在笛卡儿坐标系中 $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, 进而有

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad (4.4)$$

在柱坐标系中 $dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$, 进而有

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2), \quad (4.5)$$

在球坐标系中 $dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$, 进而有

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2). \quad (4.6)$$

§ 5 质点系的拉格朗日函数

下面研究一种质点系, 其质点之间有相互作用, 但不受外部任何物体作用, 称为封闭质点系. 为了描述质点之间的相互作用, 可以在自由质点系的拉格朗日函数中增加坐标的函数(根据相互作用的性质确定).^②将这个函数记为 U , 则有

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} - U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots) \quad (5.1)$$

($\mathbf{r}_a$ 是第 a 个质点的径矢). 这是封闭质点系拉格朗日函数的一般形式.

函数 U 称为质点系的势能, 而

$$T = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2}$$

称为质点系的动能, 这些名称的含义将在 § 6 中介绍.

势能仅依赖于所有质点在相同时刻的分布, 这意味着其中一个质点位置的改变立刻影响到所有其它质点, 可以说相互作用瞬间“扩散”. 这个相互作用的性质在经典力学中是必然的, 它紧密联系着经典力学的基本前提, 即绝对时间假设和伽利略相对性原理. 如果相互作用不是瞬间扩散的, 即以一定的速度扩散, 而

① 在第 2 页的注释中给出的说明不会影响这个结论, 因为 $m < 0$ 时积分在轨迹上任意小区间都不可能具有最小值.

② 这个结论限于本书所述的经典(非相对论)力学范畴.

时间的绝对性意味着通常的速度相加法则适用于所有现象,因此在不同的(相对运动)参考系中扩散速度不相同.于是相互作用的物体的运动规律在不同惯性参考系中也不相同,这就违背了伽利略相对性原理.

在 § 3 中我们只提到了时间的均匀性.拉格朗日函数的形式(5.1)表明,时间不仅是均匀的,而且是各向同性的,即时间的性质在两个方向上都是相同的.事实上,用 $-t$ 代替 t 不会改变拉格朗日函数,进而也不会改变运动方程.换句话说,如果在参考系中某种运动是可能的,则反运动也是可能的,即可以按照相反的顺序进行运动.在这个意义下,按照经典力学定律所有运动都是可逆的.

知道拉格朗日函数后就可以建立运动方程:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a}. \quad (5.2)$$

将(5.1)代入后得:

$$m_a \frac{d \mathbf{v}_a}{dt} = - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}. \quad (5.3)$$

这种形式的运动方程称为牛顿方程,是自由质点系力学的基础.方程(5.3)右端的矢量

$$\mathbf{F}_a = - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a} \quad (5.4)$$

称为作用在第 a 个质点上的力.它与 U 一样,依赖于所有质点的坐标,但不依赖于速度.因此,方程(5.3)表明,质点的加速度矢量也是坐标的函数.

势能可以增减任意常数而不改变运动方程(这是在 § 2 中讲到的拉格朗日函数不确定性的特殊情况).选择这个任意常数的最自然和最通用的方法是,当无限增大质点间距离时势能趋向于零.

如果描述运动不是用笛卡儿坐标,而是用任意的广义坐标 q_i ,则为了得到拉格朗日函数必须引进相应的变换:

$$x_a = f_a(q_1, q_2, \dots, q_s), \dot{x}_a = \sum_k \frac{\partial f_a}{\partial q_k} \dot{q}_k, \text{ etc.}$$

将这些表达式代入函数

$$L = \frac{1}{2} \sum_a m_a (\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2 + \dot{z}_a^2) - U,$$

可得如下形式的拉格朗日函数:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k - U(q), \quad (5.5)$$

其中 a_{ik} 是广义坐标的函数.用广义坐标写出的动能是速度的二次函数,但可以依赖于广义坐标.

到此为止我们只研究了封闭质点系.下面研究非封闭质点系 A ,它与运动