精算学中的随机过程

□ 张连增

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

本书不同于传统的理工或者经管类的随机过程教科书。在系统介绍了现代精算学中的随机过程理论的基础上，本书将随机过程理论及其在金融保险中的应用有机地结合起来，深入研究出现于金融保险中的随机过程专题，系统揭示随机过程的理论与方法如何巧妙地应用于金融保险中。

本书可作为综合大学经济类、金融类、保险类高年级本科生和研究生的教材或参考书，也可以供保险业精算人员和其他对金融工程、保险精算有兴趣的读者参考。

ISBN 7-04-020457-6

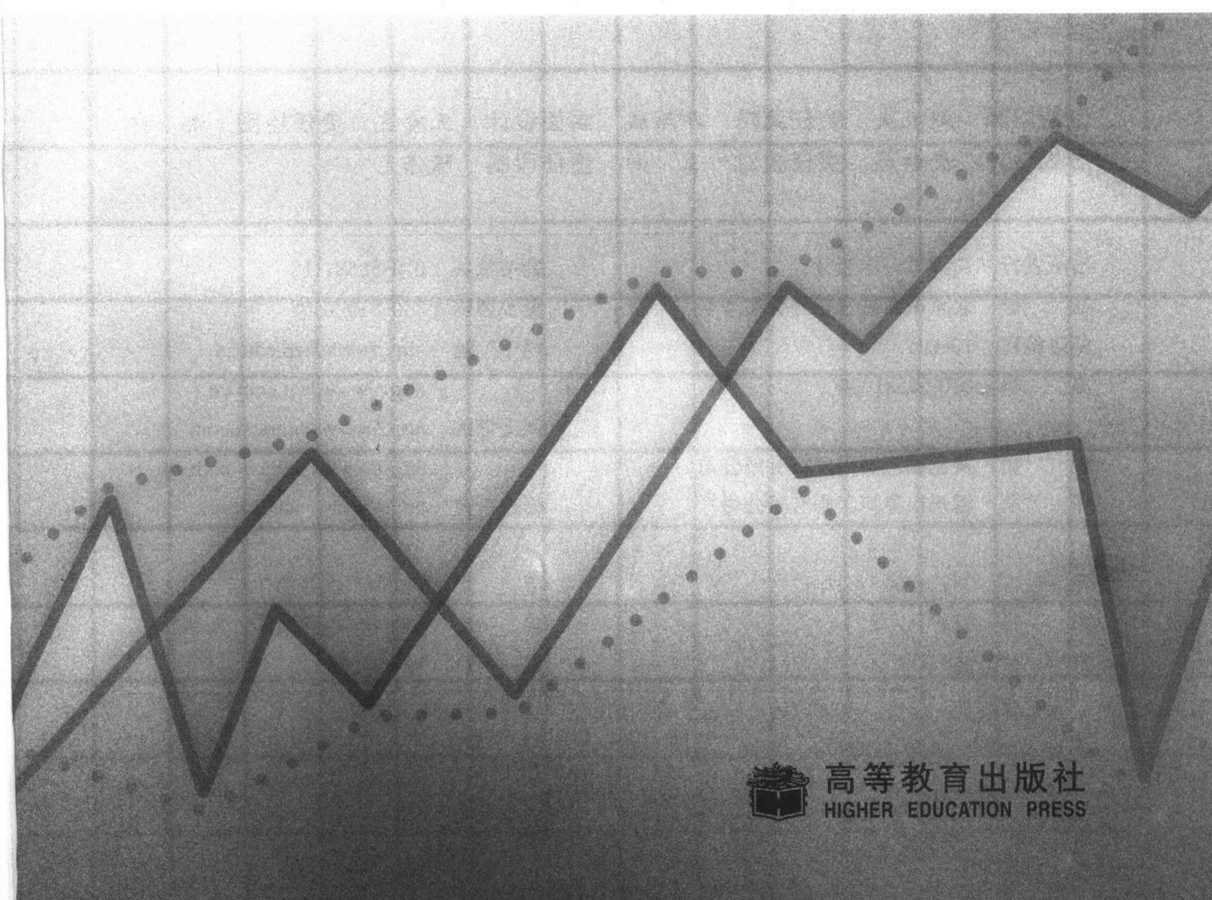
9 787040 204575 >

定价 30.10 元

■ 学科类别：数学

精算学中的随机过程

□ 张连增



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

图书在版编目(CIP)数据

精算学中的随机过程/张连增.—北京:高等教育出版社,2006.12
ISBN 7-04-020457-6

Ⅰ.精... Ⅱ.张... Ⅲ.精算学-随机过程-高等学校-教材 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 122898 号

策划编辑 赵天夫 责任编辑 邓雁城 封面设计 王凌波 责任绘图 郝 林
版式设计 史新薇 责任校对 王 雨 责任印制 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	涿州市星河印刷有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×960 1/16	版 次	2006年12月第1版
印 张	14.5	印 次	2006年12月第1次印刷
字 数	260 000	定 价	30.10元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 20457-00

郑重声明

前　言

像所有学科一样，精算学也是不断发展的学科。十年前，国际上精算师资格考试的内容较少涉及随机过程，但近年来，随机过程已经逐渐成为国际精算师资格考试的重要内容，随机过程的思想已经体现于精算学的教学研究中，并逐渐体现于保险监管中。在精算学的学术研究方面，浏览一下近年来国际精算学术期刊发表的研究论文，可见随机过程理论与方法已经成为不可缺少的工具。

一方面，应用随机过程理论不但可以处理传统的寿险与非寿险精算问题，而且可以处理非传统的保险产品定价等问题；另一方面，金融与投资理论，尤其是数理金融理论已经成为精算学的重要组成部分，在数理金融理论中，随机过程是最基本的工具。本书以精算学中的随机过程为中心，在以上两个方面加以展开，结合精算学系统地介绍随机过程。因此，本书区别于通常的供数学类等理科师生参考的随机过程的书。在本书中，数学处理上的严谨性是必要的，而且有必要在高起点上组织内容，但还要把随机过程如何在精算学中得到应用这一思路贯穿其中。

本书选材丰富，包含了精算学中常见的随机过程内容。国际上有种观点认为，Markov 过程、鞅、平稳独立增量过程构成了随机过程的绝大部分内容。我同意这种观点，在内容取舍上，以上内容在本书中都有所涉及。关于随机过程理论的一些经典内容，我参考了过去十多年来出版的部分优秀外文专著教材，而一些较新的内容，散见于近年来在国际学术期刊发表的研究论文。

在本书的内容安排上，前三章内容比较直观，读者学过概率论的一些基础知识后，就可以很容易阅读。有了对随机过程的一些感性认识后，从第四章开始，就需要在高起点上对随机过程理论与方法有深入的理解，为此需要概率的公理化定义。按

照我的体会, 条件期望是一个核心概念, 对初学者也是一个难点, 不易理解。但只要完全理解了这个核心概念后, 学习后面的涉及鞅、Markov 过程、平稳独立增量过程的内容, 就变得非常容易。相对而言, 最后一章内容 (更新过程) 比较独立, 但这部分内容在精算学中, 尤其是非寿险精算的破产理论会涉及, 所以此书包括了更新过程的内容。另外, 各章内容相对比较独立, 便于读者阅读某个专题。

需要指出, 本书中某些章节的内容没有完全展开, 或者对某些结论没有给出证明, 例如鞅的收敛定理、可选停时定理、随机微分方程、线性偏微分方程的数值算法等。这出于两方面的考虑。一方面, 我希望在选材上安排好结构与要点, 另一方面, 从介绍随机过程如何在精算学中得到应用的观点, 把某些内容完全展开意义不是很大。读者在精算学的学习与研究中, 如需要进一步对某些专题有深入的了解, 可参考相关的优秀专著教材。

十多年前, 我在南开大学数学系学习随机过程, 其后在南开大学风险管理与保险学系任精算学教师。十多年来, 我对随机过程的理解逐渐深入, 同时见证了随机过程理论如何逐渐深入地在精算学中得以应用。我一直希望以自己的所学所悟, 完成一本专著, 力争成为国内精算学优秀参考书, 能够对广大读者有所启发帮助, 尽快地了解前沿内容。

数年前, 我阅读精算学研究论文, 已经注意到 Norberg 教授的研究, 很具特色。2004 年下半年, 我访问了伦敦经济学院统计学系, 更深入地了解了 Norberg 教授主持的精算学项目。此前, 我于 2002 年访问了墨尔本大学经济学系精算研究中心, 了解了该中心 Dickson 教授主持的精算学项目。对国内外精算学术研究的差别, 我深有体会, 也非常希望在进行学术研究的同时, 为国内同行撰写一本专著, 把国际上最新的研究成果系统地介绍给国内学术界同行, 一方面供同行参考, 另一方面为广大的莘莘学子铺路。

我于 2004 年冬季和 2005 年冬季两次为南开大学风险管理与保险学系精算研究生开设随机过程课程。本书是在讲学内容基础上扩充整理、反复修改而来, 凝聚了我的艰苦努力与许多心血。我尽了最大的努力, 系统地整理总结多年来的所学所悟。撰写本书的难度, 比我原来设想的要大得多。但艰辛的付出总有回报, 我深深地体会到, 本书的撰写过程也是一个不断加深理解的过程。

借此机会, 我要对许多人表达我深深的谢意, 没有他们方方面面的支持与帮助, 这本书是不可能出现的。首先, 我要感谢家人的大力支持。感谢南开大学风险管理与保险学系 2004 级和 2005 级的精算研究生, 通过他们的反馈, 我更容易知道本书的难点所在, 这对未来的教学很有帮助。我特别感谢 2005 级研究生李开顺、高云、王子辉、周琪、魏建等人, 其中李开顺、高云、王子辉分别帮助完成了第一章、第二章、第三章的初稿, 周琪帮助完成了第四章的部分初稿, 魏建帮助绘制了书中的插图。另外, 我要感谢 Norberg 教授和 Dickson 教授, 他们为我提供了对外学术交流

的机会。

最后,本书能够如期出版,我要感谢高等教育出版社的大力支持。每一本书的出版都凝聚了多位编辑的辛勤劳动，本书也不例外。我特别要感谢两位编辑赵天夫和邓雁城，他们细致地审阅了全书，指出了一些内容和形式的不当之处，给出了一些内行的改进建议，从而使本书增色不少。

张连增

2006 年 6 月 18 日

目　　录

第一章　离散时间Markov 链

§1　转移概率与 Chapman-Kolmogorov 方程

1. 定义与例子

这一章要讨论的随机过程 $\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$, 状态空间包含有限个或可列个值。除非另有说明, 在这一章中, 状态空间是非负整数集 $\{0,1,2,\cdots\}$。$\{X_n=i\}$ 表示过程在时刻 n 处于状态 i 这一事件。假设过程当前处于状态 i, 下一步它以概率 P_{ij} 转移到另一状态 j, 而且 P_{ij} 与此前的信息无关, 即对于所有状态 $i_0, i_1, \cdots, i_{n-1}, i, j$, 以及 $n \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}\{X_{n+1}=j|X_n=i, X_{n-1}=i_{n-1}, \cdots, X_1=i_1, X_0=i_0\}=P_{ij} \tag{1}$$

此时称 X 为(时间齐次)Markov链。(1)式表明, 对于 Markov 链, 在给定过去状态 $X_0, X_1, \cdots, X_{n-1}$ 和现在状态 X_n 的条件下, 将来状态 X_{n+1} 的条件分布只取决于现在状态, 而与过去状态无关。

由概率的非负性, 考虑到各种转移方式, 可得

$$P_{ij} \geqslant 0, \quad i,j \geqslant 0; \quad \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}=1, \quad i=0,1,\cdots$$

以 $\mathbf{P}$ 表示一步转移概率 P_{ij} 构成的矩阵,

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \cdots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ P_{i0} & P_{i1} & P_{i2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

下面给出一些 Markov 链的例子。

例 1 (天气预报) 假设明天会下雨的概率只取决于今天的天气状态, 而与过去的天气状态无关。如果今天下雨, 那么明天下雨的概率为 α; 如果今天不下雨, 那么明天下雨的概率为 β。

如果用状态 0 表示下雨, 用状态 1 表示不下雨, 那么可以构造两种状态的 Markov 链, 其转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}$$

例 2 (信息系统) 考虑一个输送数字 0 和 1 的信息系统。每个数字的输送必须经过若干个阶段。在每个阶段, 一个数字在离开时与进入时保持不变的概率为 p。设 X_n 表示数字在第 n 个阶段内的变化, 那么 $\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$ 是两种状态的 Markov 链, 其转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{bmatrix}$$

例 3 在一天内, 人的心情或者高兴(A), 或者一般(B), 或者忧郁(C)。如果今天是高兴的, 那么明天的心情是 A、B 或 C 的概率分别为 0.5, 0.4, 0.1。如果今天感觉一般, 那么明天的心情是 A、B 或 C 的概率分别为 0.3, 0.4, 0.3。如果今天是忧郁的, 那么明天的心情是 A、B 或 C 的概率分别为 0.2, 0.3, 0.5。

设 X_n 表示在第 n 天的心情, 那么 $\{X_n, n\geqslant 0\}$ 是三种状态的 Markov 链, 其转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}$$

例 4 (把一个过程转化为 Markov 链) 假设今天是否下雨取决于过去两天的天气条件。具体地讲，如果过去两天都下雨，那么明天下雨的概率为 0.7；如果今天下雨而昨天没下雨，那么明天下雨的概率为 0.5；如果昨天下雨而今天没下雨，那么明天下雨的概率为 0.4；如果过去两天都没下雨，那么明天下雨的概率为 0.2。

设时刻 n 的状态只取决于在时刻 n 是否下雨，那么上述模型不是 Markov 链。但是，如果任意时刻的状态由当天和前一天的天气条件决定，那么上述模型可以转化为 Markov 链。此时，共有以下四种状态：

状态 0　如果今天和昨天都下雨

状态 1　如果今天下雨而昨天没下雨

状态 2　如果昨天下雨而今天没下雨

状态 3　如果今天和昨天都没下雨

此时可构造 Markov 链，其转移矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \end{bmatrix}$$

例 5 (随机游动模型) 如果 $P_{i,i+1} = p, P_{i,i-1} = 1-p,\ i = 0, \pm1, \pm2, \cdots$，其中 $0 < p < 1$，那么称状态空间是全体整数 $\{0, \pm1, \pm2, \cdots\}$ 的 Markov 链为随机游动。

上述模型的直观解释如下：一个人沿一条直线行走，在每一时刻，他或者以概率 p 向右移动一步，或者以概率 $1-p$ 向左移动一步。

例 6 (赌博模型) 假设一个赌徒在每一盘赌局中，或者以概率 p 赢得 1 元，或者以概率 $1-p$ 输掉 1 元。进一步，假设赌徒在输光或者在赢到 N 元时退出赌局，那么该赌徒的财富变化构成 Markov 链，其转移概率为

$$P_{i,i+1} = p = 1 - P_{i,i-1}, i = 1, 2, \cdots, N-1$$

$$P_{00} = P_{NN} = 1$$

这里称状态 0 和 N 为吸收状态，即过程进入就停留在那里的状态。上述例子是一个有限状态的有吸收壁(状态 0 和 N)的随机游动。

2. Chapman-Kolmogorov 方程

前面定义了一步转移概率 P_{ij}。现在定义过程从状态 i 经过 n 步转移到状态 j 的 n 步转移概率 P_{ij}^n，

$$P_{ij}^n = \mathbb{P}\{X_{m+n} = j | X_m = j\}, \quad i, j \geqslant 0$$