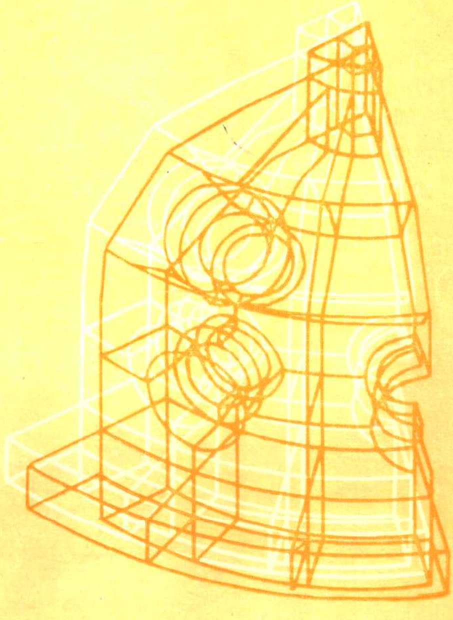
〔英〕R．K．利维斯莱 著

有限元

—工程师入门



东北林业大学出版社

有 限 元

工程师入门

[英] R. K. 利维斯莱 著
陈[illegible]谦 高东[illegible] 译
倪元增 校

Finite Elements
an Introduction for Engineers
by R. K. Livesley
Cambridge University Press 1983

有　限　元
——工程师人门

〔英〕R. K. 利维斯莱　著
陈守谦　高东红　译
倪元增　校

东北林业大学出版社出版
(哈尔滨市和兴路8号)
黑龙江省新华书店发行　东北林业大学印刷厂印刷
开本 787×1092 毫米 1/32 印张 7.5 字数 160千字
1988年9月第1版　1988年9月第1次印刷
印数 1—3,000 册

ISBN 7-81008-028-8/TP·1　定价 1.80元

译 者 序

本书原著系英国剑桥大学 R. K. Livesley 所作的《Finite elements: an introduction for engineers》(1983年第一版)。它是为英国剑桥大学工程系三年级学生新备的有限元法教材。

最近十年来，国内许多学者对有限元这一学科进行了深入、广泛的研究，并相继出版了不少这方面的书籍。然而，这本书与我国现有的一些有限元著述却有很大不同。它强调了有限元法同其它数值方法之间的联系；在内容的安排上非常注重有限元基本概念和基本理论的阐述及应用；书中的习题也是围绕深入理解这些概念和理论而安排的。这些特点对有限元法的自学者来说是大有裨益的。

本书共分八章。第一章介绍了一些一般数学概念；第二～第七章介绍了有限元法的基本概念和基本理论及其在一些领域的应用；第八章讨论了有限元法的计算机程序设计思想。书中各章之间有密切的联系。

译者认为，本书很适合作理工科大专院校有限元课程的教学参考书，也可供从事实际工程设计、计算的工程师们参考。故将其译出，以飨读者。

在本书翻译过程中，得到了东北林业大学计算中心和东北林业大学出版社有关人员的热情帮助；袁俊琦同志为本书绘制了全部插图。这都对本书能及早与读者见面起了很大作用。对此，译者谨致谢意。

本书的全部译稿由陈守谦进行了统一整理，最后由倪无增副教授进行了全面审核。由于时间仓促，加之译者水平所限，书中的缺点和错误在所难免，因此敬希读者批评指正。

译　者

一九八七年十月

前　　言

有限元在1950年首次用于飞机设计，目前，许多大学和工学院将它作为从事应力分析的一种数值方法讲授。然而，近几年这种方法也逐渐应用于其它工程学科。这样广泛的应用范围表明，有限元法实际上是获得椭圆型偏微分方程近似解的一般方法，并且已在大学的工程数学课程中设置了相应的专题。

根据剑桥大学工程系三年级学生可采用的教程，有限元法的观点已被安排在目前的教科书之中。这部分课程的设置，要把前两年所讲的一般工程学位课程中的传统数学专题与有关特殊应用领域的专业课联系起来。

为准备学习更专门的课程，工程师需要充分地理解有限元法的数学基础，而本书即为此所用。它强调有限元法与其它的近似数值分析方法之间的联系，并且用变分的概念建立收敛法则。为了强调该方法的多种用处，从部分工程学科中引出了一些例子。在223页列出了若干参考文献，以便查阅有关专题的来龙去脉。

在本书中，集中了作者认为对于此方法是十分重要的概念，因此必须省略一些一般内容。书中没涉及到非线性材料、杂交单元或大变形分析。唯一用到的变分原理，是在连续介质力学中以最小势能原理出现的。虽然叙述了约简积分和拼片试验，但是着重于协调单元的求解上，因为它存在严格的边界原则。

第一章回顾了一些在后面要用到的基本数学概念和方法。在接下来的六章中，叙述了有限元法的基本理论。前七章中每章都附有习题，其中许多习题使本课程主要部分所介绍的概念得到大量的应用。这些习题的解答，在每章的末尾完整地给出。最后一章论述有限元法的程序。虽然在这一章未有提供习题，但是，作者劝告打算掌握有限元法的读者花一些时间应用一个有限元程序。这种应用从实际工程设计问题的角度上讲是应该进行的。在一些教科书中可能会找到这类程序。

作者试图叙述有限元所产生的作用，但没有论述在什么情形下和为什么应当应用有限单元这种较普遍的问题。大规模商业有限元程序的利用，使工程师获得了有关其设计项目特性的很详细的信息选择。这种选择的存在，无论怎样，对部分程序用户来说，确实增加了而不是减少了他们的需要，其目的是为了作出确切的工程判断。一套计算机输出决不能是判断和常识的代用品。

作　　者

1982 年 5 月于剑桥

目　　录

第一章 绪 论

本书所叙述的是有关场的一些问题，所谓场的问题，也就是需要求具有适宜的边界条件的偏微分方程解的问题。这类问题存在于许多重要的工程科学领域，包括应力分析、液体流动、热传导以及电磁学等。

有限元法就是求取场问题近似解的一种数值方法。通过该方法可把基本微分方程转换成线性代数方程组。而它的普及价值主要在于这些方程可以很方便地用计算机集合和求解。

本章将阐述对于充分理解有限元法有重要作用的一些概念。首先扼要地提示一下后面将要用到的数学概念和运算方法；继之叙述了瑞利—瑞兹（Rayleigh-Ritz）法、有限差分法；最后简要说明了电路和构架结构分析的矩阵法。

§1.1 若干数学基础

矢量计算是场问题研究中的一个基本术语。阅读本书不需要大量的矢量知识，并认定读者已掌握了梯度和散度的概念。标量场 u 的梯度（矢量）用 ∇u 表示，而矢量场 $\mathbf{V}$ 的散度（标量）用 $\nabla\cdot\mathbf{V}$ 表示。书中列举出了如 $\nabla\cdot(u\mathbf{V})=\nabla u\cdot\mathbf{V}+u\nabla\cdot\mathbf{V}$ 这样的结果式，有时还要用到散度定理。初始，针对二维问题进行了大量的分析，然后扩展到三维问题。

矩阵代数是线性代数方程集合的基本术语，它广泛应用于所有有关有限元法的书籍中。本书不过多地引述这方面的内容，而所用的仅是矩阵加法、矩阵乘法和矩阵变换。作者

编写该书的前提是读者已经掌握解线性代数方程组的高斯消元法，所以，将大量篇幅放在方程组的集合而不是求解上。

运用矢量运算可以非常简捷地说明场的问题，而不必利用特定的坐标系。然而，在数值解当中，矢量通常是以分量形式表示的。包含这类矢量的一些运算如用矩阵代数符号书写是合适的。因此，两个矢量 **a** 和 **b** 的标量积既可以写成 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$，也可以写成 $\mathbf{a}^t\mathbf{b}$。后一种形式中规定 $\mathbf{a}^t$ 代表一个行矢量，而 **b** 代表列矢量。即

$$\mathbf{a}^t\mathbf{b}=[a_x a_y a_z]\begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}。$$

而梯度算子同样可以写成

$$\nabla=\begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{bmatrix}\ (列矢量)。$$

并用 ∇^t 表示散度算子（行矢量）*。采用这种形式是强调，在含有矢量微分算子 ∇ 的方程（如拉普拉斯和泊松方程）中所提出的数值解法，与线性应力分析（其中相应的微分算子是矩阵）中的对应量之间的相似性。

有限元法着眼于求解区域中的特定点或“节点”，并且大量分析是针对与节点有关的标量、矢量或矩阵。上述各量带有下标，它表示某节点或一组节点。书中用 $i,j,\cdots,m$ 表示分布在一个单元或一个求解域内所有节点的一般下标，而用 p, q,…, s 表示特定的节点。为了节省篇幅，一律采用缩简符号：每当乘积（包括微分算子的乘积）中含有重复表示的下标时，则表明在下标的取值范围内对该乘积求和。这种重复下标称之为“哑下标”，它与 Fortran “DO” 循环中

* 在一般曲线坐标中，没有这种简单变换关系。

的标志变量起同类作用。利用缩简符号所作的任何分析，总可以通过"普通写法"来验证。

本书经常出现的论题是用多项近似来表示函数。其最简单的形式为

$$u(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_{M-1}x^{M-1}。\qquad(1\text{-}1)$$

但是，以这种形式写出的表达式系数的值（除 c_0 外）与特定点的 $u(x)$值没有直接联系。(1-1)式的另一种形式是

$$u(x)=u_1n_1(x)+u_2n_2(x)+\cdots+u_Mn_M(x)=u_in_i(x),\quad(1\text{-}2)$$

书中广泛采用这种形式。上式中，系数 u_i 是函数 $u(x)$ 在含有 M 个点的一组点中，点 x_i 上的值；而函数 $n_i(x)$ 是 $M-1$ 阶多项式，它具有 $n_i(x_j)=\delta_{ij}$ 的性质，即如果 $i=j$，则 $n_i(x_j)=1$；如果 $i\neq j$，则 $n_i(x_j)=0$。对于 M 个任意点，函数 $n_i(x)$ 的一般形式是

$$n_i(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2),\cdots,(x-x_M)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2),\cdots,(x_i-x_M)}\quad\left.\begin{matrix}(\text{除去}(x-x_i))\\(\text{除去}(x_i-x_i))\end{matrix}\right\}\qquad(1\text{—}3)$$

这样的函数式称为拉格朗日插值多项式。

在方程 (1-2) 中，用 M 个独立的函数 $n_i(x)$ 的线性组合表示函数 $u(x)$，这类似于方程 $\mathbf{u}=u_i\mathbf{n}_i$，其中的矢量 $\mathbf{u}$ 用 M 个独立单位矢量 $\mathbf{n}_i$ 的线性组合来表示。而 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{n}_i$ 是 P 维 ($P\geqslant M$) 欧氏空间矢量。

由 (1-1) 和 (1-2) 式定义的多项式类型有两种不同用途。首先是作为对较复杂已知函数进行简易计算的近似式。其中(1—2)式给出的形式在这方面特别有用。如果设函数 $f(x)$在一组 M 个任意点中的点 x_i 上有值 $f(x_i)$，那么鉴于函数 n_i 的定义，当 $x=x_i$ 时，则近似式 $u(x)=f(x_i)n_i(x)$ 与 $f(x)$相等。

举个例子，我们研究函数$f(x)$在$f(-1)=5$、$f(0)=8$、$f(1)=13$时的二次近似函数$u(x)$的构成。则函数n_i为

$$n_1=(x-1)x/2,\quad n_2=1-x^2,\quad n_3=(x+1)x/2。$$

上述函数如图 1-1 所示。且不难验证

$$u(x)=5[(x-1)x/2]+8[1-x^2]+13[(x+1)x/2]$$

是一个能得出所需数值的二次函数。事实上，这个函数就是$f(x)$。

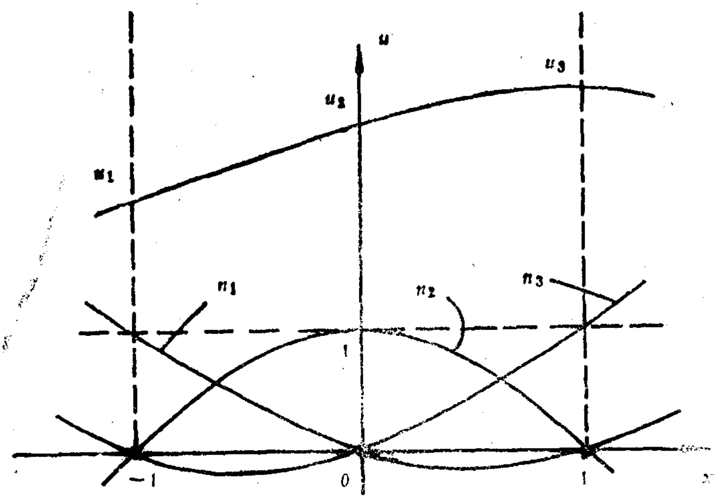


图 1-1　利用三个二次多项式的一种近似

多项近似式的第二种用途，是作为对未知函数的近似式，它最适用于有限元法。如果用多项近似式$u(x)=n_i(x)u_i(x)$代替一个微分方程的待求解，则问题可由寻求一个连续的未知函数，变成求一组数值u_i，这些数值与微分方程的解非常接近。

不难把(1-3)式中定义的拉格朗日插值多项式$n_i(x)$引申到二维或三维空间。这些引申了的函数形式在有限元法中起关键的作用，并且广泛地应用于本书的后面章节。在此，按

着有限元法的习惯把它们称为形函数（Shape function）。

有限元法中经常需要进行面积分和体积分的运算，其积分域是求解域的一部分(子域)，事实上，这部分就是“有限元”。在这样的积分中，被积函数通常是矩阵，其系数是位置的函数。这个矩阵的积分仍是一个同阶的矩阵，其中每个系数都是被积函数中对应系数的积分。它遵循矩阵的加法律，而实际上积分就是求和的极限。

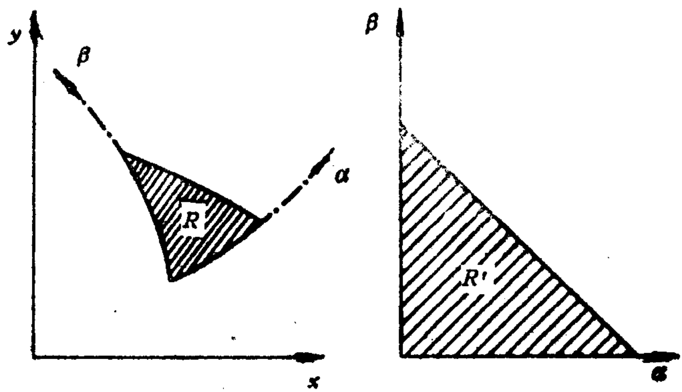


图 1-2　二维映射：x 和 y 是 α 和 β 的指定函数

在有限元法中，积分运算经常分为两个阶段进行：

(a) 变量替换。这就是把积分区域映射成几何图形较简单的区域，相应地如三角形、正方形、四面体等等。图 1-2 所示为一个平面曲边三角形的典型映射。在原来的 x、y 平面中，变量 α、β 确定了一个曲面坐标系，并称之为参数坐标（Parametric coordinates）。对于一个定义在二维区域上的、如图中所示的函数 $f(x,y)$，其积分值由下式给出：

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{R'} f[x(\alpha,\beta),\ y(\alpha,\beta)]\,|\mathbf{J}|\,\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta。$$

其中$|\mathbf{J}|$是雅可比（Jacobian）矩阵行列式：

$$\mathbf{J}=\begin{bmatrix}\partial x/\partial\alpha & \partial y/\partial\alpha\\ \partial x/\partial\beta & \partial y/\partial\beta\end{bmatrix}。$$

这个行列式可理解为映射的局部面积放大系数。类似的公式同样适合于体积分。

（b）数值积分。有限元法几乎总是用高斯积分公式计算变量替换后的积分。这种运算是一维高斯公式向二维、三维的推广，其一般形式是

$$\int_{-1}^{1}f(\alpha)\mathrm{d}\alpha\simeq h_i f(\alpha_i)\qquad(i=1,\cdots,N),\tag{1-4}$$

其中 α_i 值（高斯点）是勒让德（Legendre）多项式 $P_N(\alpha)$ 的根，而系数 h_i（高斯加权值）是只随数值 N 而定的常数。高斯积分公式比辛普森（Simpson）法的等间距公式准确，对任意 $2N$-1 阶多项式，一维 N 点公式是精确的。例如一维“三点公式”是

$$\int_{-1}^{1}f(\alpha)\mathrm{d}\alpha\simeq[5f(-0.7746)+8f(0)+5f(0.7746)]/9,$$

那么，这个公式对于 α 的 5 阶或 5 阶以下的任意多项式都是精确的。而二维“四点公式”为

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}f(\alpha,\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\simeq\ & f(0.5773,\ 0.5773)\\ &+f(0.5773-0.5773)\\ &+f(-0.5773,\ 0.5773)\\ &+f(-0.5773,\ -0.5773),\end{aligned}$$

它对于任意三次函数* 同样精确。一维、二维、三维数值积分的高斯点和高斯加权值表可以在第八章参考文献 1 中查到。

---

* 具有 α、β 二个变量的一般三次式含有 1、α、β、α^2、$\alpha\beta$、β^2、α^3、$\alpha^2\beta$、$\alpha\beta^2$、β^3 项。

§1.2 微分方程的近似解——瑞兹法*

现考察一个线性常微分方程 $Lu(x)=w(x)$，其中 L 是线性微分算子（例如 $xd^2/dx^2+d/dx$），w 是一个自变量为 x 的已知函数，并且有使方程在区域 $a\leqslant x\leqslant b$ 上存在唯一解的足够的边界条件。假设没能求出其精确解的解析表达式，而近似解 $u(x)$ 构成了下列形式：

$$u(x)=c_i\varphi_i(x)\qquad(i=1,\cdots,M),\tag{1-5}$$

其中 $\varphi_1(x),\cdots,\varphi_M$ 是一组 M 个线性无关函数，c_1，…，c_M 是待定常数。

求解的第一步是涉及选择函数集 $\varphi_i(x)$ 的问题，一个比较适当的近似方法就是选择一个无穷的正交函数集的子集（通常是前 M 项），常见的例子是傅里叶级数的 M 项。如果正交函数就是微分算子 L 的特征函数（亦就是 $L\Phi=\lambda\Phi$ 的解），那么可以得到一个形式非常简单的解。然而，找到一组合适的正交函数往往是很困难的，而有限元法（至少是本书中所叙述的）则是基于非正交的近似函数上的，这个非正交函数是简单的多项式——最常用的是三阶多项式。

一旦选出近似函数，下一步就是求取系数 c_i。该系数能够为这组函数得出最佳近似式。为确定一定意义的"最佳"，需要一些标准，而瑞兹法提出了这样的一个标准。它不是着眼于解微分方程，而是基于等价的变分原理（Varational principle），其中的解与一个积分的驻值相联系。对于由物理系统中得出的微分方程，它的积分往往表示某种能量形式；若这个解是稳定的，则这个驻值也就是一个极小值**。

---

* 历史上，瑞利首先提出了这个方法，后由瑞兹进行了扩展。

** 稳定平衡状态总是一个能量极小值。