高等学校
数学学习指导丛书

线性代数精讲精练

与同济大学《线性代数》（第四版）同步

主编　陈治中

系统梳理知识体系
全面总结方法技巧
细致解答疑惑难点
精心配置分层练习

北京师范大学出版社

高　等　学　校
数学学习指导丛书

线性代数精讲精练

与同济大学《线性代数》（第四版）同步

主编　陈治中
编者　陈治中

北京师范大学出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

线性代数精讲精练/陈治中主编．—北京：北京师范大学出版社，2006
（高等学校数学辅导丛书）
ISBN 7-303-08036-8

Ⅰ．线…　Ⅱ．陈…　Ⅲ．线性代数-高等学校-教学参考资料　Ⅳ．0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 036007 号

北京师范大学出版社出版发行
（北京新街口外大街 19 号　邮政编码：100875）
http://www.bnup.com.cn
出版人：赖德胜
北京东方圣雅印刷有限公司印刷　全国新华书店经销
开本：185 mm × 260 mm　印张：16.25　字数：400 千字
2006 年 8 月第 1 版　2006 年 8 月第 1 次印刷
印数：1 ~ 3 000　定价：20.50 元

前言

线性代数是高等院校理工科各专业的重要基础课，它对于后续课程的学习起着至关重要的作用，同时也是研究生入学考试数学科目的基本内容，因此学好线性代数课程是非常重要的．但是由于本课程的特点是逻辑性强，比较抽象，学习者往往感到不易理解与不好掌握，解题时感到困难，本书就是希望能给广大学生与自学人员提供一个帮助，帮助他们更好地理解和掌握基本概念，通过例子与解题，更好地掌握基本方法与基本技能，从而达到本课程的基本要求．

本书按目前高等院校使用较多的同济大学编《线性代数》（第四版）的章节顺序，基本采用同步形式编写，符号、术语亦与其基本一致，个别地方改为现在较为流行的说法，在书中都加以注明．

全书分六章，每章开头是基本要求．每一节分基本内容提要、重点难点与疑点问答、典型例题三个部分，每章最后是单元复习题．

“基本要求”是根据《线性代数课程基本要求》和研究生入学考试线性代数的基本要求编写的．

“基本内容提要”是该节基本概念与基本理论的综述．

“重点、难点与疑点问答”是作者根据多年来的教学实践与经验，指出本节的重点与难点，同时对学习过程中容易产生歧义与疑问的地方，采用问答的形式一一作了解答与分析，加深对概念的理解与掌握．

“典型例题”给出了问题的解答，部分例题还加了评注．选取的部分往年考研试题都有标注，如：“例 2（1999）”是指该题为 1999 年的考研题．

章末的“单元复习题”供练习与自测用，分填空题、单项选择题、计算与证明题三部分，并附解答与提示供参考．

本书是线性代数的同步辅导书，也是线性代数的考研辅导书，也

可供教师参考.

本书的出版得到了北京师范大学出版社的大力支持和帮助，特别是王松浦同志，在此深表谢意.

由于作者水平所限，错误与不妥之处，恳请广大读者与各位同行批评指正，在此先致谢意.

陈治中

2004年10月于北京交通大学

目 录

第一章 行列式

本章介绍行列式的基本概念、行列式的性质、行列式的计算以及解线性方程组的克拉默法则.本章的基本要求是:

(1) 了解行列式的概念,掌握行列式的性质.

(2) 会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.

(3) 掌握克拉默法则.

第一节 n 阶行列式的定义

一、基本内容提要

1 排列及其逆序数

(n 元)排列 由自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个(n 元)排列,常记作 $j_1j_2\cdots j_n$.

逆序 在一个 n 元排列中,如果一个较大的数排在一个较小的数的前面,就称这两个数构成一个逆序.

逆序数 一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数.n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数常记作 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$(也可简记作 t)

奇排列和偶排列 逆序数为奇数的排列称为奇排列,逆序数为偶数的排列称为偶排列.

2 有关排列的主要结论

(1) n 元排列共有 $n!$ 个,其中奇、偶排列各有一半;

(2) 对换改变排列的奇偶性;

(3) 任意一个 n 元排列都可经过一些对换变成自然序排列(指自然数由小到大的排列),并且所作对换的次数与这个排列有相同的奇偶性;

(4) 任意两个 n 元排列都可经过一系列对换互变,而且若这两个排列的奇偶性相同,则所作的对换次数是偶数;若这两个排列的奇偶性相反,则所作的对换次数是奇数.

3 n 阶行列式的定义

2 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

3 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有的(n 元)排列求和. n 阶行列式D 表示所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

的代数和,这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列. 当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时,该项的前面带正号;当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时,该项的前面带负号.

二、重点、难点与疑点问答

问 1　本节的重点和难点是什么? 应该注意哪些问题?

答　本节的重点和难点是 n 阶行列式的定义. 定义包括以下几个方面:

(1) 项数:n 阶行列式应包括$n!$ 个项;

(2) 每项构成:位于不同行不同列的 n 个元素的乘积;

(3) 各项符号:正负各半,符号由元素下标排列的逆序数决定.

为了更好地理解 n 阶行列式的定义,可以从下面几个方面去体会:

首先,n 阶行列式的定义是 2 阶、3 阶行列式定义的推广,但这一推广必须抓住 2 阶、3 阶行列式的本质部分,这就是如上定义包括的 3 个方面,而不是表面看似简单的对角线法.

其次,要始终想到行列式是由解线性方程组引进的记号,而定义一般的 n 阶行列式首先也是为了更好地表示n 元线性方程组的解. 实际上,在整个线性代数的学习过程中,都应该把握线性方程组这条主线,围绕解线性方程组展开讨论与学习.

最后,上述 3 条中的(1)和(2)容易从 2 阶、3 阶行列式推广到 n 阶行列式,比较难确定的是从 2 阶、3 阶行列式推广到 n 阶行列式时的各项符号,为此就要先讨论排列与逆序.

问 2　行列式表示什么?

答　行列式只是把 n^2 个数按 n 行n 列排成的一个"记号",它表示一个算式(即:$n!$ 个项的代数和),说到底行列式表示一个数.

问 3　1 阶行列式$|a|$和绝对值$|a|$都表示一个数,它们有什么不同?

答　规定 1 阶行列式$|a|$就表示数 a;绝对值$|a|$,当 a 大于或等于 0 时为 a,当 a 小于 0 时为$-a$. 例如 1 阶行列式$|-3|=-3$,而绝对值$|-3|=3$.

问 4 n 阶行列式为什么不能用对角线法去定义?

答 首先注意这个问题提得不准确.不是"不能用"而是"不去用"对角线法定义.原则上讲,不论如何定义都是可以的.问题是为什么要去定义一般的行列式呢?定义它又有什么用处呢?我们知道,2,3 阶行列式是解线性方程组引进的,而且当系数行列式不等于零时,可以用行列式简洁表示方程组的唯一解.引进一般 n 阶行列式的概念,首先应该能够清楚表示线性方程组的解.但是如果按照对角线法去定义,在表示线性方程组的解时就会出问题.例如对于 4 阶行列式,若用类似的对角线法去定义,那么行列式应该包括 4 正 4 负共 8 项;另一方面,若按消元法解 4 元线性方程组,它的解中分子、分母(当分母不为零时)都各有 24 项,显然就不能用这样定义的行列式来表示,所以我们不用对角线法去定义 n 阶行列式.

问 5 项 $a_{11}a_{23}a_{33}a_{42}$是否是 4 阶行列式 $D=|a_{ij}|$中的一项,为什么?

答 不是.因为该项中 4 个元素虽然分别位于 1,2,3,4 行,但是其中的 a_{23}和 a_{33}都位于第 3 列,这是不可能的,所以它不是 D 中的一项.

问 6 两个行列式相等,它们的阶是否一定相等?

答 不一定.因为两个行列式相等是指这两个行列式的值相等,与行列式的阶没有关系.

问 7 行列式$|a_{ij}|$副对角线上的元素乘积的项 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$是否一定带负号,为什么?

答 不一定.这是因为行列式各项的符号是由元素下标的逆序数决定的,当 $n=2,3$ 时带负号,这容易造成一种错觉,以为在任何行列式中副对角线上元素乘积的项总是带负号的,实际上,当 $n=4$ 时,由于 $\tau(4321)=6$ 是偶数,所以带正号,即

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(4321)}abcd = abcd;$$

一般地,要视

$$\tau(n,n-1,\cdots,2,1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

的奇偶性而定,亦即

$$\begin{vmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n.$$

三、典型例题

1 有关排列与逆序的问题

例 1 求排列 $n(n-1)\cdots 2\ 1$ 的逆序数.

解 由于 1 的前面有 $n-1$ 个数比它大,2 的前面有 $n-2$ 个数比它大,……,$n-1$ 的前面有 1 个数比它大,所以

$$\tau(n(n-1)\cdots 2\ 1)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}.$$

例 2 求排列 $1\ 3\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots 2$ 的逆序数.

解 显然,此排列中前 $n+1$ 个数 $1,3,\cdots,2n-1,2n$ 的前面都没有比它们大的数.第 $n+2$个数 $2n-2$ 的前面有 2 个数 $2n$ 与 $2n-1$ 比它大,第 $n+3$ 个数 $2n-4$ 的前面有 4 个数比它大,依次类推,可得

$$\begin{aligned}&\tau(1\ 3\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots 2)\\=&0+\cdots+0+2+4+\cdots+(2n-4)+(2n-2)\\=&2[1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)]\\=&n(n-1).\end{aligned}$$

例 3 如果排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数为k,问排列 $j_nj_{n-1}\cdots j_2j_1$ 的逆序数是多少?

解 对于每个数 j_i 来说,比 j_i 大的数有 $n-j_i$ 个,所以,由 j_i 与比它大的各个数,在两个排列中所构成的逆序数的和为 $n-j_i$,因此,两个排列的逆序总数为

$$1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2},$$

从而排列 $j_nj_{n-1}\cdots j_2j_1$ 的逆序数为$\frac{n(n-1)}{2}-k$.

例 4 选择 i 与k,使 9 元排列 $1\ 2\ 7\ 4\ i\ 5\ 6\ k\ 9$ 为偶排列.

解 显然 i 与k 只能取 3 和 8 两个数,若取 $i=3,k=8$,检查排列 $1\ 2\ 7\ 4\ 3\ 5\ 6\ 8\ 9$ 的逆序数,由于

$$\tau(1\ 2\ 7\ 4\ 3\ 5\ 6\ 8\ 9)=0+0+4+1+0+0+0+0+0=5.$$

所以是奇排列.由于对换改变排列的奇偶性,故取 $i=8,k=3$ 时,排列 $1\ 2\ 7\ 4\ 8\ 5\ 6\ 3\ 9$ 为偶排列.

2 有关行列式的定义

例 5 已知 $a_{31}a_{2i}a_{13}a_{5k}a_{44}$是 5 阶行列式中的一项且带正号,确定 i 和k.

解 先将行标按自然顺序排列,

$$a_{31}a_{2i}a_{13}a_{5k}a_{44}=a_{13}a_{2i}a_{31}a_{44}a_{5k}.$$

要使该项带正号,则列标的排列 $3\ i\ 1\ 4\ k$ 为偶排列,而 i 与k 的选择只能是 2 和 5.若选 $i=2,k=5$,则

$$\tau(3\ 2\ 1\ 4\ 5)=2+1+0+0+0=3,$$

为奇排列.故取 $i=5,k=2$ 即满足要求.

例 6 写出 4 阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$的项.

解 由 $D=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2p_3p_4)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$,及题设 $p_1=1,p_2=3,p_3,p_4$ 只能取 2 或 4,因此含 $a_{11}a_{23}$的项为

$$(-1)^{\tau(1324)}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}=-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}\text{和}$$
$$(-1)^{\tau(1342)}a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}=a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}.$$

例 7 写出 5 阶行列式中含有因子 $a_{14}a_{23}$且带有负号的项.

解 由于含因子 $a_{14}a_{23}$的项形如

$$(-1)^{\tau(43p_3p_4p_5)}a_{14}a_{23}a_{3p_3}a_{4p_4}a_{5p_5}.$$

该项所带的符号取决于排列 $43p_3p_4p_5$ 的奇偶性,而 $43p_3p_4p_5$ 共有 $3!\ =6$ 种取法,分别是

43125,43152,43215,43251,43512,43521 通过计算可知,43125,43251,43512 为奇排列,

因此 5 阶行列式中含有因子 $a_{14}a_{23}$ 且带负号的项为

$$-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{55},\ -a_{14}a_{23}a_{32}a_{45}a_{51},\ -a_{14}a_{23}a_{35}a_{41}a_{52}.$$

例 8　设在 5 阶行列式中 $a_{12}=0$，问展开式中为零的项至少有多少个？

解　因为在 5 阶行列式的展开式中含 a_{12} 的项为

$$a_{12}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}a_{5p_5},$$

其中 $p_2p_3p_4p_5$ 是 1,3,4,5 的一个排列，共有 $4!=24$ 种，故至少有 24 项为零.

例 9　利用行列式的定义，求

$$f(x)=\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$$

的展开式中 x^4 和 x^3 的系数.

解　行列式中含 x^4 的项只有一项，即

$$(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=(-1)^{\tau(1234)}5x\cdot x\cdot x\cdot 2x=10x^4,$$

故 x^4 的系数为 10.

行列式中含 x^3 的项有两项，即

$$(-1)^{\tau(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}=(-1)^{\tau(2134)}1\cdot x\cdot x\cdot 2x=-2x^3,$$

$$(-1)^{\tau(4231)}a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}=(-1)^{\tau(4231)}3\cdot x\cdot x\cdot x=-3x^3,$$

故 x^3 的系数为 $-2-3=-5$.

3 按定义计算行列式

例 10　利用行列式的定义证明

$$D_5=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

证　展开式中的一般项为

$$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4j_5)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5},$$

其中 j_3,j_4,j_5 中至少有一个数取到 3,4,5 中的某一个，即 $a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$ 中至少一个数为零，行列式的展开式中任何一项都为零，因此 $D_5=0$.

例 11　计算 4 阶行列式

$$D_4=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h \end{vmatrix}.$$

解　按定义，D_4 是 $4!=24$ 项的代数和，其中除了 $acfh$，$adeh$，$bdeg$，$bcfg$ 这 4 项外，其余的项都至少含一个因子 0，因而等于 0，上面 4 项的行标都是自然序排列，列标的排列依次是 1234,1324,4321,4231. 其中第一个和第三个是偶排列，第二个和第四个是奇排列，因此