

高等学校
数学学习指导丛书

线性代数 精讲精练

与同济大学《线性代数》（第四版）同步

主编 陈治中

系统梳理知识体系
全面总结方法技巧
细致解答疑惑难点
精心配置分层练习



北京师范大学出版社

7-3C3

2006

高等学校
数学学习指导丛书

线性代数 精讲精练

与同济大学《线性代数》（第四版）同步

主编 陈治中

编者 陈治中



北京师范大学出版社

· 北京 ·

图书在版编目 (CIP) 数据

线性代数精讲精练/陈治中主编. —北京: 北京师范大学出版社, 2006
(高等学校数学辅导丛书)
ISBN 7-303-08036-8

I. 线… II. 陈… III. 线性代数-高等学校-教学参考资料 IV. 0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 036007 号

北京师范大学出版社出版发行
(北京新街口外大街 19 号 邮政编码: 100875)

<http://www.bnup.com.cn>

出版人: 赖德胜

北京东方圣雅印刷有限公司印刷 全国新华书店经销

开本: 185 mm × 260 mm 印张: 16.25 字数: 400 千字

2006 年 8 月第 1 版 2006 年 8 月第 1 次印刷

印数: 1 ~ 3 000 定价: 20.50 元

前 言

线性代数是高等院校理工科各专业的重要基础课，它对于后续课程的学习起着至关重要的作用，同时也是研究生入学考试数学科目的基本内容，因此学好线性代数课程是非常重要的。但是由于本课程的特点是逻辑性强，比较抽象，学习者往往感到不易理解与不好掌握，解题时感到困难，本书就是希望能给广大学生与自学人员提供一个帮助，帮助他们更好地理解和掌握基本概念，通过例子与解题，更好地掌握基本方法与基本技能，从而达到本课程的基本要求。

本书按目前高等院校使用较多的同济大学编《线性代数》（第四版）的章节顺序，基本采用同步形式编写，符号、术语亦与其基本一致，个别地方改为现在较为流行的说法，在书中都加以注明。

全书分六章，每章开头是基本要求。每一节分基本内容提要、重点难点与疑点问答、典型例题三个部分，每章最后是单元复习题。

“基本要求”是根据《线性代数课程基本要求》和研究生入学考试线性代数的基本要求编写的。

“基本内容提要”是该节基本概念与基本理论的综述。

“重点、难点与疑点问答”是作者根据多年来的教学实践与经验，指出本节的重点与难点，同时对学习过程中容易产生歧义与疑问的地方，采用问答的形式——作了解答与分析，加深对概念的理解与掌握。

“典型例题”给出了问题的解答，部分例题还加了评注。选取的部分往年考研试题都有标注，如：“例2（1999）”是指该题为1999年的考研题。

章末的“单元复习题”供练习与自测用，分填空题、单项选择题、计算与证明题三部分，并附解答与提示供参考。

本书是线性代数的同步辅导书，也是线性代数的考研辅导书，也

可供教师参考。

本书的出版得到了北京师范大学出版社的大力支持和帮助，特别是王松浦同志，在此深表谢意。

由于作者水平所限，错误与不妥之处，恳请广大读者与各位同行批评指正，在此先致谢意。

陈治中

2004 年 10 月于北京交通大学

目 录

第一章 行列式	(1)
第一节 n 阶行列式的定义	(1)
一、基本内容提要	(1)
1. 排列及其逆序数	(1)
2. 有关排列的主要结论	(1)
3. n 阶行列式的定义	(1)
二、重点、难点与疑点问答	(2)
三、典型例题	(3)
1. 有关排列与逆序的问题	(3)
2. 有关行列式的定义	(4)
3. 按定义计算行列式	(5)
第二节 行列式的计算	(6)
一、基本内容提要	(6)
1. 行列式的性质	(6)
2. 余子式与代数余子式	(7)
3. 行列式展开公式	(7)
4. 一些特殊行列式的值	(7)
* 5. 行列式乘法定理	(8)
二、重点、难点与疑点问答	(8)
三、典型例题	(10)
1. 应用行列式的性质	(10)
2. 按行(列)展开公式的应用	(15)
3. 递推公式法与数学归纳法	(17)
4. 加边法(升阶法)	(21)
5. 利用范德蒙德行列式	(22)
* 6. 分块行列式	(24)
第三节 克拉默(Cramer)法则	(25)
一、基本内容提要	(25)
1. 克拉默法则	(25)

2. 等价说法	(25)
3. 齐次方程组的情形	(26)
二、重点、难点与疑点问答	(26)
三、典型例题	(26)
单元复习题	(31)

第二章 矩阵及其运算 (36)

第一节 矩阵及其运算	(36)
一、基本内容提要	(36)
1. 矩阵的概念	(36)
2. 一些特殊的矩阵	(36)
3. 矩阵的运算及性质	(37)
4. 特殊矩阵的重要结果	(38)
二、重点、难点与疑点问答	(38)
三、典型例题	(42)
1. 矩阵的基本运算	(42)
2. 求方阵的幂	(44)
3. 对称矩阵和反对称矩阵	(45)
第二节 逆矩阵	(46)
一、基本内容提要	(46)
1. 逆矩阵的概念	(46)
2. 矩阵可逆的充分必要条件	(46)
3. 逆矩阵的性质	(46)
4. 利用公式求逆矩阵	(46)
5. 方阵的行列式	(46)
6. 有关伴随矩阵的结果	(47)
二、重点、难点与疑点问答	(47)
三、典型例题	(48)
1. 利用定义与公式求逆矩阵	(48)
2. 有关矩阵可逆性的证明	(50)
3. 方阵的多项式问题	(51)
4. 有关伴随矩阵的性质	(52)
5. 方阵行列式的计算	(54)
6. 解矩阵方程	(55)
第三节 分块矩阵	(57)
一、基本内容提要	(57)
1. 分块矩阵的概念	(57)
2. 常用的分块方法	(57)
3. 分块矩阵的运算及性质	(57)

二、重点、难点与疑点问答	(58)
三、典型例题	(59)
单元复习题	(63)
第三章 矩阵的初等变换与线性方程组	(66)
第一节 矩阵的初等变换与初等矩阵	(66)
一、基本内容提要	(66)
1. 矩阵的初等变换与初等矩阵	(66)
2. 等价矩阵与等价标准形	(67)
3. 初等矩阵与初等变换的性质	(67)
4. 利用初等变换求逆矩阵	(68)
5. 利用初等变换解矩阵方程	(68)
二、重点、难点与疑点问答	(68)
三、典型例题	(70)
第二节 矩阵的秩	(75)
一、基本内容提要	(75)
1. 矩阵的秩的概念	(75)
2. 初等变换与矩阵的秩	(75)
3. 有关矩阵秩的公式	(75)
4. 利用初等变换求矩阵的秩	(76)
二、重点、难点与疑点问答	(76)
三、典型例题	(77)
1. 计算矩阵的秩	(77)
2. 关于非零子式	(80)
3. 有关矩阵秩的证明题	(81)
第三节 线性方程组的解	(85)
一、基本内容提要	(85)
1. n 元线性方程组	(85)
2. 齐次线性方程组有非零解的条件	(85)
3. 非齐次线性方程组有解的条件	(85)
4. 利用初等变换解线性方程组	(86)
二、重点、难点与疑点问答	(86)
三、典型例题	(87)
单元复习题	(92)
第四章 向量组的线性相关性	(96)
第一节 向量组的线性相关性	(96)
一、基本内容提要	(96)
1. n 维向量的概念	(96)

2. 向量的线性运算	(96)
3. 向量组的线性相关性概念	(97)
4. 线性相关性的理论	(97)
5. 一些有用的结果	(98)
二、重点、难点与疑点问答	(98)
三、典型例题	(100)
1. 线性相关的基本概念	(100)
2. 判断向量组的线性相关性	(103)
3. 有关线性表示的问题	(109)
第二节 向量组的秩	(111)
一、基本内容提要	(111)
1. 向量组的等价	(111)
2. 极大线性无关组的概念	(112)
3. 向量组的秩	(112)
4. 向量组的秩与矩阵的秩的关系	(112)
5. 向量组的秩的求法	(113)
二、重点、难点与疑点问答	(113)
三、典型例题	(114)
1. 求向量组的秩与极大无关组	(114)
2. 求相应的参数	(116)
3. 有关向量组秩的证明题	(117)
第三节 向量空间	(121)
一、基本内容提要	(121)
1. n 维向量空间的概念	(121)
2. 维数与基	(121)
3. 基变换与坐标变换	(121)
二、重点、难点与疑点问答	(121)
三、典型例题	(123)
第四节 线性方程组的解的结构	(125)
一、基本内容提要	(125)
1. 齐次线性方程组解的结构与基础解系	(125)
2. 非齐次线性方程组解的结构	(126)
3. n 元齐次线性方程组有非零解的条件	(126)
4. 非齐次线性方程组有解的充分必要条件	(127)
二、重点、难点与疑点问答	(127)
三、典型例题	(128)
1. 求解线性方程组 (用基础解系表示)	(128)
2. 同解方程与公共解问题	(132)
3. 基础解系与解的结构	(137)

4. 解的理论的应用	(140)
单元复习题	(142)
第五章 相似矩阵及二次型	(147)
第一节 向量的内积	(147)
一、基本内容提要	(147)
1. 内积的概念	(147)
2. 长度与夹角	(148)
3. 标准(规范)正交基	(148)
4. 施密特正交化方法	(148)
5. 正交矩阵与正交变换	(149)
二、重点、难点与疑点问答	(149)
三、典型例题	(150)
第二节 方阵的特征值与特征向量	(154)
一、基本内容提要	(154)
1. 特征值与特征向量	(154)
2. 求特征值与特征向量的步骤	(154)
3. 特征值与特征向量的性质	(155)
二、重点、难点与疑点问答	(155)
三、典型例题	(157)
1. 求给定矩阵的特征值与特征向量	(157)
2. 伴随矩阵、正交矩阵等的特征值	(161)
3. 有关特征值的和与积	(162)
4. 已知特征值、特征向量及其性质的问题	(164)
第三节 相似矩阵与矩阵的对角化	(166)
一、基本内容提要	(166)
1. 相似矩阵	(166)
2. 相似矩阵的性质	(166)
3. 矩阵的相似对角化	(166)
二、重点、难点与疑点问答	(167)
三、典型例题	(168)
1. 关于相似矩阵的概念	(168)
2. 方阵的对角化问题	(171)
3. 求方阵的高次幂	(178)
第四节 实对称矩阵的相似对角化	(182)
一、基本内容提要	(182)
1. 实对称矩阵的对角化	(182)
2. 正交矩阵 Q 的求法	(182)
二、重点、难点与疑点问答	(183)

三、典型例题	(183)
第五节 二次型及其标准形	(188)
一、基本内容提要	(188)
1. 二次型及其矩阵表示	(188)
2. 可逆线性变换	(189)
3. 矩阵的合同	(189)
4. (实) 二次形的标准形与规范形	(189)
5. 化实二次型为标准形的方法	(189)
二、重点、难点与疑点问答	(190)
三、典型例题	(193)
1. 二次型及其矩阵表示	(193)
2. 正交变换法	(193)
3. 由标准形求参数及正交变换	(197)
4. 有关二次型的秩及其矩阵的特征值问题	(199)
5. 配方法	(201)
第六节 正定二次型	(204)
一、基本内容提要	(204)
1. 正定二次型	(204)
2. 顺序主子式	(204)
3. 实二次型(实对称矩阵)正(负)定的充分必要条件	(204)
二、重点、难点与疑点问答	(205)
三、典型例题	(206)
1. 确定二次型的正定性	(206)
2. 判定定理及应用	(209)
单元复习题	(212)

第六章 线性空间与线性变换

第一节 线性空间	(217)
一、基本内容提要	(217)
1. 线性空间的概念	(217)
2. 简单性质	(218)
3. 线性子空间	(218)
4. 维数、基、坐标	(218)
5. 基变换和坐标变换	(218)
6. 线性空间的同构	(219)
7. 常见的线性空间	(219)
二、重点、难点与疑点问答	(220)
三、典型例题	(220)
1. 判定集合是否构成线性空间	(220)

2. 关于子空间的判定与证明	(222)
3. 关于线性空间的维数、基与坐标	(224)
4. 求不同基之间的过渡矩阵及坐标变换	(227)
第二节 线性变换	(229)
一、基本内容提要	(229)
1. 线性变换的概念	(229)
2. 线性变换的基本性质	(230)
3. 线性变换的矩阵表示	(230)
4. 线性变换在不同基下的矩阵互相相似	(230)
二、重点、难点与疑点问答	(231)
三、典型例题	(231)
1. 判定变换是否为线性变换	(231)
2. 求线性变换在某组基下的矩阵	(233)
3. 有关线性变换的性质、值域和核	(235)
单元复习题	(238)
部分参考答案与提示	(241)

第一章

行列式

本章介绍行列式的基本概念、行列式的性质、行列式的计算以及解线性方程组的克拉默法则. 本章的基本要求是:

- (1) 了解行列式的概念, 掌握行列式的性质.
- (2) 会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.
- (3) 掌握克拉默法则.

第一节

n 阶行列式的定义

一、基本内容提要

1. 排列及其逆序数

(n 元) 排列 由自然数 $1, 2, \dots, n$ 组成的一个有序数组称为一个(n 元)排列, 常记作 $j_1 j_2 \cdots j_n$.

逆序 在一个 n 元排列中, 如果一个较大的数排在一个较小的数的前面, 就称这两个数构成一个逆序.

逆序数 一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数. n 元排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数常记作 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ (也可简记作 t)

奇排列和偶排列 逆序数为奇数的排列称为奇排列, 逆序数为偶数的排列称为偶排列.

2. 有关排列的主要结论

- (1) n 元排列共有 $n!$ 个, 其中奇、偶排列各有一半;
- (2) 对换改变排列的奇偶性;
- (3) 任意一个 n 元排列都可经过一些对换变成自然序排列(指自然数由小到大的排列), 并且所作对换的次数与这个排列有相同的奇偶性;
- (4) 任意两个 n 元排列都可经过一系列对换互变, 而且若这两个排列的奇偶性相同, 则所作的对换次数是偶数; 若这两个排列的奇偶性相反, 则所作的对换次数是奇数.

3. n 阶行列式的定义

2 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

3 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

这里 $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有的 (n) 元排列求和. n 阶行列式 D 表示所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

的代数, 这里 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列. 当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是偶排列时, 该项的前面带正号; 当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是奇排列时, 该项的前面带负号.

二、重点、难点与疑点问答

问 1 本节的重点和难点是什么? 应该注意哪些问题?

答 本节的重点和难点是 n 阶行列式的定义. 定义包括以下几个方面:

- (1) 项数: n 阶行列式应包括 $n!$ 个项;
- (2) 每项构成: 位于不同行不同列的 n 个元素的乘积;
- (3) 各项符号: 正负各半, 符号由元素下标排列的逆序数决定.

为了更好地理解 n 阶行列式的定义, 可以从下面几个方面去体会:

首先, n 阶行列式的定义是 2 阶、3 阶行列式定义的推广, 但这一推广必须抓住 2 阶、3 阶行列式的本质部分, 这就是如上定义包括的 3 个方面, 而不是表面看似简单的对角线法.

其次, 要始终想到行列式是由解线性方程组引进的记号, 而定义一般的 n 阶行列式首先也是为了更好地表示 n 元线性方程组的解. 实际上, 在整个线性代数的学习过程中, 都应该把握线性方程组这条主线, 围绕解线性方程组展开讨论与学习.

最后, 上述 3 条中的 (1) 和 (2) 容易从 2 阶、3 阶行列式推广到 n 阶行列式, 比较难确定的是从 2 阶、3 阶行列式推广到 n 阶行列式时的各项符号, 为此就要先讨论排列与逆序.

问 2 行列式表示什么?

答 行列式只是把 n^2 个数按 n 行 n 列排成的一个“记号”, 它表示一个算式 (即: $n!$ 个项的代数和), 说到底行列式表示一个数.

问 3 1 阶行列式 $|a|$ 和绝对值 $|a|$ 都表示一个数, 它们有什么不同?

答 规定 1 阶行列式 $|a|$ 就表示数 a ; 绝对值 $|a|$, 当 a 大于或等于 0 时为 a , 当 a 小于 0 时为 $-a$. 例如 1 阶行列式 $|-3| = -3$, 而绝对值 $|-3| = 3$.

问4 n 阶行列式为什么不能用对角线法去定义?

答 首先注意这个问题提得不准确. 不是“不能用”而是“不去用”对角线法定义. 原则上讲, 不论如何定义都是可以的. 问题是为什么要去定义一般的行列式呢? 定义它又有什么用呢? 我们知道, 2, 3 阶行列式是解线性方程组引进的, 而且当系数行列式不等于零时, 可以用行列式简洁表示方程组的唯一解. 引进一般 n 阶行列式的概念, 首先应该能够清楚表示线性方程组的解. 但是如果按照对角线法去定义, 在表示线性方程组的解时就会出问题. 例如对于 4 阶行列式, 若用类似的对角线法去定义, 那么行列式应该包括 4 正 4 负共 8 项; 另一方面, 若按消元法解 4 元线性方程组, 它的解中分子、分母(当分母不为零时)都各有 24 项, 显然就不能用这样定义的行列式来表示, 所以我们不用对角线法去定义 n 阶行列式.

问5 项 $a_{11}a_{23}a_{33}a_{42}$ 是否是 4 阶行列式 $D = |a_{ij}|$ 中的一项, 为什么?

答 不是. 因为该项中 4 个元素虽然分别位于 1, 2, 3, 4 行, 但是其中的 a_{23} 和 a_{33} 都位于第 3 列, 这是不可能的, 所以它不是 D 中的一项.

问6 两个行列式相等, 它们的阶是否一定相等?

答 不一定. 因为两个行列式相等是指这两个行列式的值相等, 与行列式的阶没有关系.

问7 行列式 $|a_{ij}|$ 副对角线上的元素乘积的项 $a_{1n}a_{2, n-1}\cdots a_{n1}$ 是否一定带负号, 为什么?

答 不一定. 这是因为行列式各项的符号是由元素下标的逆序数决定的, 当 $n=2, 3$ 时带负号, 这容易造成一种错觉, 以为在任何行列式中副对角线上元素乘积的项总是带负号的, 实际上, 当 $n=4$ 时, 由于 $\tau(4321)=6$ 是偶数, 所以带正号, 即

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(4321)} abcd = abcd;$$

一般地, 要视

$$\tau(n, n-1, \cdots, 2, 1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

的奇偶性而定, 亦即

$$\begin{vmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \ddots & & \\ a_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n.$$

三、典型例题

1. 有关排列与逆序的问题

例1 求排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数.

解 由于 1 的前面有 $n-1$ 个数比它大, 2 的前面有 $n-2$ 个数比它大, $\cdots$, $n-1$ 的前面有 1 个数比它大, 所以

$$\tau(n(n-1)\cdots 21) = (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

例2 求排列 $1\ 3\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots 2$ 的逆序数.

解 显然, 此排列中前 $n+1$ 个数 $1, 3, \cdots, 2n-1, 2n$ 的前面都没有比它们大的数. 第 $n+2$ 个数 $2n-2$ 的前面有 2 个数 $2n$ 与 $2n-1$ 比它大, 第 $n+3$ 个数 $2n-4$ 的前面有 4 个数比它大, 依次类推, 可得

$$\begin{aligned} \tau(1\ 3\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots 2) \\ &= 0 + \cdots + 0 + 2 + 4 + \cdots + (2n-4) + (2n-2) \\ &= 2[1 + 2 + \cdots + (n-2) + (n-1)] \\ &= n(n-1). \end{aligned}$$

例3 如果排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数为 k , 问排列 $j_n j_{n-1} \cdots j_2 j_1$ 的逆序数是多少?

解 对于每个数 j_i 来说, 比 j_i 大的数有 $n-j_i$ 个, 所以, 由 j_i 与比它大的各个数, 在两个排列中所构成的逆序数的和为 $n-j_i$, 因此, 两个排列的逆序总数为

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2},$$

从而排列 $j_n j_{n-1} \cdots j_2 j_1$ 的逆序数为 $\frac{n(n-1)}{2} - k$.

例4 选择 i 与 k , 使 9 元排列 $1\ 2\ 7\ 4\ i\ 5\ 6\ k\ 9$ 为偶排列.

解 显然 i 与 k 只能取 3 和 8 两个数, 若取 $i=3, k=8$, 检查排列 $1\ 2\ 7\ 4\ 3\ 5\ 6\ 8\ 9$ 的逆序数, 由于

$$\tau(1\ 2\ 7\ 4\ 3\ 5\ 6\ 8\ 9) = 0 + 0 + 4 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 5.$$

所以是奇排列. 由于对换改变排列的奇偶性, 故取 $i=8, k=3$ 时, 排列 $1\ 2\ 7\ 4\ 8\ 5\ 6\ 3\ 9$ 为偶排列.

2.5 有关行列式的定义

例5 已知 $a_{31}a_{2i}a_{13}a_{5k}a_{44}$ 是 5 阶行列式中的一项且带正号, 确定 i 和 k .

解 先将行标按自然顺序排列,

$$a_{31}a_{2i}a_{13}a_{5k}a_{44} = a_{13}a_{2i}a_{31}a_{44}a_{5k}.$$

要使该项带正号, 则列标的排列 $3\ i\ 1\ 4\ k$ 为偶排列, 而 i 与 k 的选择只能是 2 和 5. 若选 $i=2, k=5$, 则

$$\tau(3\ 2\ 1\ 4\ 5) = 2 + 1 + 0 + 0 + 0 = 3,$$

为奇排列. 故取 $i=5, k=2$ 即满足要求.

例6 写出 4 阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.

解 由 $D = \sum (-1)^{\tau(p_1 p_2 p_3 p_4)} a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} a_{4p_4}$, 及题设 $p_1=1, p_2=3, p_3, p_4$ 只能取 2 或 4, 因此含 $a_{11}a_{23}$ 的项为

$$\begin{aligned} (-1)^{\tau(1324)} a_{11} a_{23} a_{32} a_{44} &= -a_{11} a_{23} a_{32} a_{44} \text{ 和} \\ (-1)^{\tau(1342)} a_{11} a_{23} a_{34} a_{42} &= a_{11} a_{23} a_{34} a_{42}. \end{aligned}$$

例7 写出 5 阶行列式中含有因子 $a_{14}a_{23}$ 且带有负号的项.

解 由于含因子 $a_{14}a_{23}$ 的项形如

$$(-1)^{\tau(43p_3 p_4 p_5)} a_{14} a_{23} a_{3p_3} a_{4p_4} a_{5p_5}.$$

该项所带的符号取决于排列 $43p_3 p_4 p_5$ 的奇偶性, 而 $43p_3 p_4 p_5$ 共有 $3! = 6$ 种取法, 分别是

43125, 43152, 43215, 43251, 43512, 43521 通过计算可知, 43125, 43251, 43512 为奇排列,

因此 5 阶行列式中含有因子 $a_{14}a_{23}$ 且带负号的项为

$$-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{55}, -a_{14}a_{23}a_{32}a_{45}a_{51}, -a_{14}a_{23}a_{35}a_{41}a_{52}.$$

例 8 设在 5 阶行列式中 $a_{12}=0$, 问展开式中为零的项至少有多少个?

解 因为在 5 阶行列式的展开式中含 a_{12} 的项为

$$a_{12}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}a_{5p_5},$$

其中 $p_2p_3p_4p_5$ 是 1, 3, 4, 5 的一个排列, 共有 $4! = 24$ 种, 故至少有 24 项为零.

例 9 利用行列式的定义, 求

$$f(x) = \begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$$

的展开式中 x^4 和 x^3 的系数.

解 行列式中含 x^4 的项只有一项, 即

$$(-1)^{\tau(1234)} a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} = (-1)^{\tau(1234)} 5x \cdot x \cdot x \cdot 2x = 10x^4,$$

故 x^4 的系数为 10.

行列式中含 x^3 的项有两项, 即

$$(-1)^{\tau(2134)} a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} = (-1)^{\tau(2134)} 1 \cdot x \cdot x \cdot 2x = -2x^3,$$

$$(-1)^{\tau(4231)} a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} = (-1)^{\tau(4231)} 3 \cdot x \cdot x \cdot x = -3x^3,$$

故 x^3 的系数为 $-2-3=-5$.

3. 按定义计算行列式

例 10 利用行列式的定义证明

$$D_5 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

证 展开式中的一项为

$$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4j_5)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5},$$

其中 j_3, j_4, j_5 中至少有一个数取到 3, 4, 5 中的某一个, 即 $a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$ 中至少一个数为零, 行列式的展开式中任何一项都为零, 因此 $D_5=0$.

例 11 计算 4 阶行列式

$$D_4 = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h \end{vmatrix}.$$

解 按定义, D_4 是 $4! = 24$ 项的代数和, 其中除了 $acfh, adeh, bdeg, bcfg$ 这 4 项外, 其余的项都至少含一个因子 0, 因而等于 0, 上面 4 项的行标都是自然序排列, 列标的排列依次是 1234, 1324, 4321, 4231. 其中第一个和第三个是偶排列, 第二个和第四个是奇排列, 因此