

职工高中自学辅导丛书

SHUXUE

数学

下 册

上海文化出版社



38.765
·职工高中自学辅导丛书·

数 学

(下册)

《职工高中自学辅导丛书》编写组编



上海文化出版社

责任编辑：吴 欢

封面设计：陈达林

职工高中自学辅导丛书 《职工高中自学辅导丛书》
数 学 (下册) 编 写 组 编

上海文化出版社出版 上海绍兴路 74 号

新华书店上海发行所发行 江苏苏州印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 15.5 字数 343,000
1985 年 8 月第 1 版 1985 年 8 月第 1 次印刷 印数 1—64,000 册

书 号：7077·3048

定 价：1.50 元

编者的话

为了帮助职工自学高中课程学习,我们编写了一套《职工高中自学辅导丛书》。这套丛书包括数学、物理、化学、政治、语文、历史、地理等七门学科。

这套丛书是按职工高中的基本内容和教学要求编写的,它的特点是由浅入深、突出重点;循序渐进、加强训练。旨在帮助职工学员通过自学,掌握和巩固各学科的基础知识和基本技能,有助于参加高中毕业考试或成人高校入学考试。

这套丛书的数学自学读本分上、下两册,其内容及要求基本和《职工业余中等学校高中数学课本》(上海教育出版社出版,1983年7月第1版)一致。为了便于读者自学,我们对较难理解的概念作了深入浅出的说明;对较烦的运算增补了浅显的思考练习;对教学重点进行了详尽的讨论,而且从读者的“可接受”性出发,循序渐进地加强练习,安排了“自我检查题”。总之,我们按成人自学的特点安排了自学内容。本书要求具体,进度合理,既是读者自学的好教材,也是学员查阅的数学手册和升学、毕业考试的复习资料。同时它又可供职工高中数学教师作教材教法的参考。

本书计分三章,第三章由王抒编写,第四章由应畏之、林玲、熔炼编写,第五章由金才华、柴志洪编写,最后由王抒统稿,谢培同志审读,赵宪初、周廉隅同志审稿。

编写自学读本,我们刚刚尝试,书中不足之处,以至缺点、错误都在所难免,恳切期望读者批评指正!

编者

一九八四年十二月

目 录

第三章 空间图形	1
一 平面	1
3.1 平面及其表示法	2
3.2 平面的基本性质	3
二 空间两条直线	7
3.3 两直线的位置关系	7
3.4 异面直线	8
三 空间直线和平面	11
3.5 直线和平面的位置关系	11
3.6 直线和平面平行的判定和性质	12
3.7 直线和平面垂直的判定和性质	18
3.8 平面的斜线	22
3.9 三垂线定理	25
四 空间两个平面	28
3.10 两个平面的位置关系	28
3.11 平面和平面平行的判定和性质	30
3.12 二面角	35
3.13 平面和平面垂直的判定和性质	38
五 直线和平面	42
3.14 直线和平面间平行的判定方法	42
3.15 直线和平面间垂直的判定方法	47
习题一	51

自我检查题一	52
六 多面体	54
3.16 多面体	54
3.17 棱柱和它的性质	55
3.18 棱柱的直观图	65
3.19 棱柱的侧面积、体积计算	68
3.20 棱锥和它的性质	71
3.21 棱锥的直观图	78
3.22 棱锥的侧面积、体积计算	79
3.23 棱台和它的性质	84
3.24 棱台的直观图	91
3.25 棱台的侧面积、体积计算	93
习题二	98
七 旋转体	101
3.26 圆柱、圆锥、圆台	101
3.27 球	112
习题三	119
自我检查题二	120
本章内容提要	121
第四章 直线、曲线方程	123
一 直角坐标系	123
4.1 有向线段	123
4.2 平面直角坐标系	127
习题一	131
4.3 两点间的距离	132
4.4 线段的定比分点	134
习题二	139

二 曲线和方程	141
4.5 曲线和方程	141
4.6 由曲线求方程	143
4.7 由方程画出它的图形	146
习题三	148
三 直线	149
4.8 直线的倾角和斜率	149
4.9 直线方程的几种形式	152
4.10 直线方程的一般形式	159
习题四	161
4.11 两直线的平行与垂直	163
4.12 点到直线的距离	168
习题五	173
四 二阶及三阶行列式	175
4.13 二阶行列式和二元线性方程组	175
4.14 三阶行列式	181
习题六	184
五 圆锥曲线	185
4.15 圆	186
4.16 简单的二元二次方程组的解法	192
习题七	195
4.17 圆与直线的位置关系	197
4.18 圆的切线	200
4.19 坐标轴的平移	205
4.20 两圆的位置关系	210
习题八	215
自我检查题一	217

4.21 椭圆	218
习题九	233
4.22 双曲线	235
习题十	247
4.23 抛物线	248
习题十一	256
自我检查题二	257
六 极坐标	258
4.24 极坐标系	259
4.25 极坐标和直角坐标的互化	264
4.26 极坐标方程的图形	273
4.27 求曲线的极坐标方程	275
习题十二	284
七 参数方程	284
4.28 曲线的参数方程	285
4.29 参数方程化成普通方程	288
4.30 普通方程化成参数方程	290
4.31 由参数方程画图	295
4.32 常用曲线的参数方程	295
习题十三	297
自我检查题三	299
本章内容提要	300
第五章 复数、数列和排列、组合	303
5.1 复数	303
5.1 虚数单位 i	303
5.2 复数的有关概念	304
5.3 复数的向量表示	308

5.4	复数的四则运算	310
习题一		316
5.5	复数的三角式	317
5.6	复数三角式的运算	320
习题二		331
自我检查题一		333
二	数列	334
5.7	数列的概念	334
5.8	等差数列	338
5.9	等比数列	343
习题三		349
自我检查题二		350
三	排列和组合	351
5.10	基本原理	352
5.11	排列	354
5.12	排列数公式	357
5.13	组合	360
5.14	组合数公式	363
5.15	组合数的两个性质	365
习题四		368
四	数学归纳法和二项式定理	368
5.16	数学归纳法	368
5.17	二项式定理	371
5.18	二项展开式的性质	374
习题五		377
自我检查题三		378
本章内容提要		379

参考答案	384
------------	-----

附 录

上海市职工业余中学 1984 年(春)毕业 考试高中数学试题	470
上海市职工业余中学 1984 年(春)毕业 考试高中数学补考试题	474
上海市职工业余中学 1984 年第二次毕(结)业 考试高中数学试题	478
1984 年上海市成人高校招生考试数学试题	483

第三章 空间图形

通过这一章的学习,我们要达到以下的要求:

1. 在理解平面及其表示法的基础上,掌握平面的基本性质.

2. 掌握空间两条直线间的相互位置关系以及异面直线所成的角和异面直线间的距离.

3. 掌握直线和平面在空间的相互位置关系. 掌握直线和平面平行、垂直的判定条件和性质,以及直线和平面所成的角和三垂线定理(包括其逆定理).

4. 掌握两平面间的相互位置关系. 掌握平面和平面平行、垂直的判定条件和性质,二面角及其平面角.

5. 能解决有关柱、锥、台、球的一些计算问题.

一 平 面

平面,作为客观物体的空间形式之一,已在我们学习初中几何时就提出来了,当时着重研究的是点、直线以及圆弧间的基本性质,并没有对平面的性质进行讨论. 在这个单元里,我们将研究作为空间图形的基本元素:点、直线、平面等性质.

3.1 平面及其表示法

平面是广阔无涯的。常见的桌面、平静的水面、窗玻璃面等，都给我们以平面的形象。与初中几何里的直线是无限延伸的一样，几何中所说的平面，也是在空间无限伸展着的。

当我们在适当的角度和适当的距离观察桌面和窗玻璃面的时候，感到它们都很象平行四边形。因此，我们通常都画平行四边形来表示平面（如图 3.1）。在画一个水平放置的平面时，通常把平行四边形的锐角画成 45° ，横边画成等于邻边的两倍（如图 3.1 甲）。被遮住的部分画成虚线（如图 3.1 乙）或不画（如图 3.1 丙）。

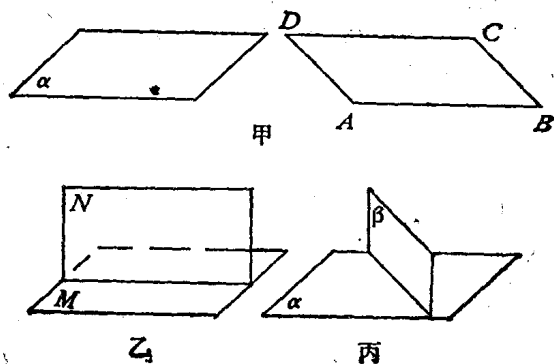


图3.1

如果平面是直立的，那么可画成图 3.2 的几种情况：

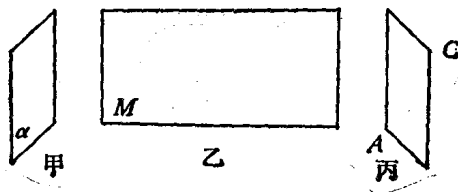


图3.2

如图 3.2 甲, 平面是在观察者的左前方; 图 3.2 乙, 平面是在观察者的正前方; 图 3.2 丙, 平面是在观察者的右前方。

为了表示平面, 通常用一个大写字母来表示, 如平面 M (图 3.1 乙, 图 3.2 乙), 有时也用一个小写的希腊字母来表示, 如平面 α (图 3.1 甲, 图 3.2 甲), 如果表示平面的平行四边形的顶点上已有字母时, 我们也可以用平行四边形的两个相对顶点上的字母来表示, 如平面 AO (图 3.1 甲, 图 3.2 丙)。

3.2 平面的基本性质

在生产与生活中, 人们经过长期的观察和实践, 总结出关于平面的一些基本性质。我们把它当作公理, 作为进一步推理的基础。

公理 1 如果一条直线上的两点在一个平面内, 那么这条直线上所有的点都在这个平面内。

这条公理通过直线与平面的关系, 描述了平面的基本性质。运用公理 1 可以作以下一些判定。

(1) 判定直线在平面内。只要直线上有两点在一个平面内, 并且这两点在直线上的位置是任意的, 而且这两点可以落在这个平面内的任何位置, 那么根据公理 1, 我们可以说

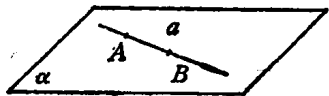


图 3.3

这条直线在这个平面内, 也可以说成这个平面通过这条直线, 也就是说这条直线上所有的点都落在这个平面内。为了方便, 如图 3.3 所示, 直线 a 上有两个点 A 、 B 在平面 α 内, 我们记作 $A \in a$, $B \in a$, $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, 这时, 我们就说直线 a 在平面 α 内, 或者平面 α 经过直线 a , 记作 $a \subset \alpha$ 。即

$$\left. \begin{array}{l} \text{点 } A, B \in \text{直线 } a \\ \text{点 } A, B \in \text{平面 } \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow a \subset \alpha.$$

这里的“ $\Rightarrow$ ”表示推理的记号, 当甲 $\Rightarrow$ 乙, 是表示: 由甲推出乙. 如果点 A 在直线 a 外, 记作 $A \notin a$; 点 A 在平面 α 外, 记作 $A \notin \alpha$; 直线 a 在平面 α 外, 记作 $a \not\subset \alpha$.

(2) 用直线鉴定平面. 如果我们要鉴定一个面是否是平面时, 可以利用公理1. 即当已知直线上有两点在这个面上时, 检查一下其他的点是否都在这个面上. 如果其他的点不都在这个面上, 那么可以断定这个面不是平面. 只有当直线上的任意两点, 落在这个面上的任意位置, 都能使直线上其他的点都落在这个面上时, 我们才能鉴定这个面是平面. 在日常生活中, 我们见木工用角尺在刚刚刨过的木板上用任意移动或转动的方法来观察角尺的边缘是否处处与木板靠紧来检查木板是否刨平, 就是应用了公理1.

(3) 判定点在平面内. 如果已知某一点在定直线上, 要判定它是否在给定的平面内时, 可以通过判别定直线是否在给定平面内来得出结论. 即: 设 $A \in l$, 若 $l \subset \alpha$, 则 $A \in \alpha$.

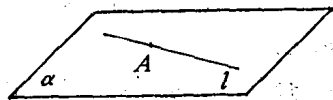


图3.4

公理2 如果两个平面有一个公共点, 那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线.

这条公理可以简单地看成: 两个平面相交, 它们相交于一条直线. 它从平面和平面的关系, 描述了平面的基本性质. 运用公理2可以作以下一些判定.

(1) 判定两个平面相交. 公理2告诉我们, 两个平面的相交处一定是一条直线. 如果这两个面中有一个不是平面时, 那么它们的相交处就不一定是直线. 平时检查两堵墙壁

是否砌平,常常是先观察两堵墙壁的相交处是否是一条直线.

(2) 判定定点在两相交平面的交线上. 如果已知点 A 既在平面 α 上又在平面 β 上, 那么点 A 必在平面 α 与平面 β 的交线 a 上. 如图 3.5 所示, 平面 α 与平面 β 有一个公共点 A , 它们就有一条唯一的过点 A 的公共直线(相交线) a . 这时, 我们称平面 α 与平面 β 相交于直线 a , 可以记作: $\alpha \cap \beta = a$, 即:

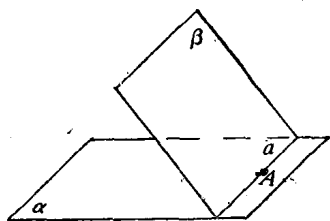


图3.5

$$\left. \begin{array}{l} \text{点 } A \in \text{平面 } \alpha \\ \text{点 } A \in \text{平面 } \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha \cap \beta = a \\ A \in a \end{array} \right.$$

(3) 画两个平面相交时,要求画出它们的交线. 同样,考虑两个平面相交的条件,要联系它们的交线一起来分析.

公理 3 经过不在同一直线上的三点,有且只有一个平面.

这条公理可以简单地说成: 不在一直线上的三点确定一个平面(图 3.6). 通常所说的“确定”,是指“可以作而且只能作”的意思. 它从平面的确定,描述了平面的基本性质. 由于确定平面是十分重要的,下面我们给出公理 3 的三个推论分别来考虑确定平面的条件.

推论 1 一条直线和这直线外的一点,确定一个平面.

如图 3.7, 设 A 是直线 a 外的一点, 在 a 上任取两点 B ,

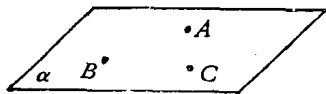


图3.6

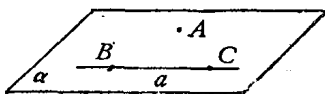


图3.7

O . 那么 A 、 B 、 C 是不在一直线上的三点, 根据公理 3, A 、 B 、 C 确定一个平面 α . 又因 B 、 C 在 α 内, 所以 a 在 α 内, 因此 a 和 A 确定一个平面 α .

推论 2 两条相交的直线, 确定一个平面(图 3.8).

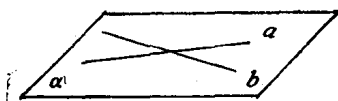


图3.8

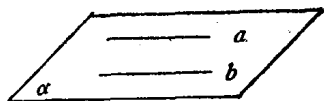


图3.9

推论 3 两条平行的直线, 确定一个平面(图 3.9).

思考与练习一

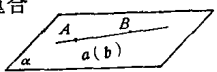
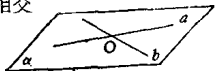
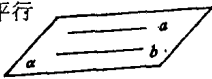
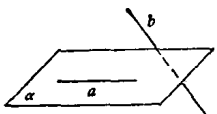
1. 过一点任意作三条直线, 它们是否在同一平面内, 为什么?
2. 一条直线和两条平行线相交, 这三条直线是否在同一平面内, 为什么?
3. 过已知直线外一点向直线上三个定点分别连结三条线段, 问这三条线段是否在同一平面内, 为什么?
4. 三条直线两两平行, 但不在同一平面内, 如果过其中任意两条各作平面, 共可作几个平面?
5. 四条线段依次首尾相接, 所得的图形一定是平面图形吗? 为什么?
6. 用符号表示下列关系:
 - (1) 点 A 在直线 l 上, 直线 l 在平面 α 内;
 - (2) 点 A 、 B 在直线 l 上, 点 A 、 B 在平面 α 内;
 - (3) 点 A 、 B 在直线 l 上, 点 C 不在直线 l 上;
 - (4) 直线 a 和直线 b 相交于平面 α 内一点 M .

二 空间两条直线

平面内的两条直线间的位置关系，是初中平面几何中已研究过的基础知识。那时，我们已将这些位置关系归结为：两直线重合、平行、相交三种情形。其中主要研究了平行、垂直（相交的一种特例）这两种位置关系。在这个单元里，我们将利用已有的平面几何知识，进一步研究两直线在空间的位置关系。

3.3 两直线的位置关系

和平面几何相仿，我们也用两直线的公共点数目来讨论它们的位置关系。

位置关系和图形		公共点数目与记法
共面关系	重合 	两条直线至少有两个不同的公共点。记作：直线 $a =$ 直线 b 。
	相交 	两条直线只有一个公共点。记作：直线 $a \cap$ 直线 $b =$ 点 O 。
	平行 	两条直线没有公共点，但可以共在一个平面内。记作： $a \parallel b$ 。
异面关系	既不平行，又不相交 	两条直线没有公共点，又不能共在一个平面内。记作：直线 $a \cap$ 直线 $b = \phi$ ，且 $a \subset \alpha$, $b \not\subset \alpha$, $b \nparallel a$ 。