荣德基 总主编

特高级教师

点拨®

高二数学 下A

试验修订版

不要看着远方 就忽略了脚下的路 再猛烈的冲刺你也要踏好最后一步

内蒙古少年儿童出版社

特高级教师

点拨

高二数学（下 A）

（试验修订版）

总 主 编：荣德基

本册主编：包建民　李健鹏

编写人员：刘桂芹　陈晶月　王贺楠

内蒙古少年儿童出版社

图书在版编目(CIP)数据

特高级教师点拨.高二数学.下/荣德基主编.—通辽:内蒙古少年儿童出版社,2006.9
ISBN 7-5312-2138-1

Ⅰ.特... Ⅱ.荣... Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 107804 号

你的差距牵动着我的心

责任编辑/黑　虎
装帧设计/典点瑞泰
出版发行/内蒙古少年儿童出版社
地址邮编/内蒙古通辽市霍林河大街西 312 号(028000)
经　　销/新华书店
印　　刷/北京世纪雨田印刷有限公司
总 字 数/3182 千字
规　　格/880×1230 毫米　1/16
总 印 张/110
版　　次/2006 年 9 月第 1 版
印　　次/2006 年 9 月第 1 次印刷
总 定 价/153.00 元(全 9 册)

两只蚂蚁

非常不幸，两只蚂蚁误入玻璃杯中。

他们慌张地在玻璃杯底四处触探，想寻找一个缝隙爬出去。不一会儿，他们便发现，这根本不可能。于是，他们开始沿着杯壁向上攀登。看来，这是通向自由的惟一路径。

然而，玻璃的表面实在太光滑了，他们刚爬了两步，便重重地跌了下去。

三次、四次、五次……有一次，眼看就快爬到杯口了，可惜，最后一步却失败了，而且，这一次比哪次都摔得重，比哪次都摔得疼。

好半天，他们才喘过气来。一只蚂蚁一边揉着屁股，一边说："咱们不能再冒险了，否则，会摔得粉身碎骨的。"

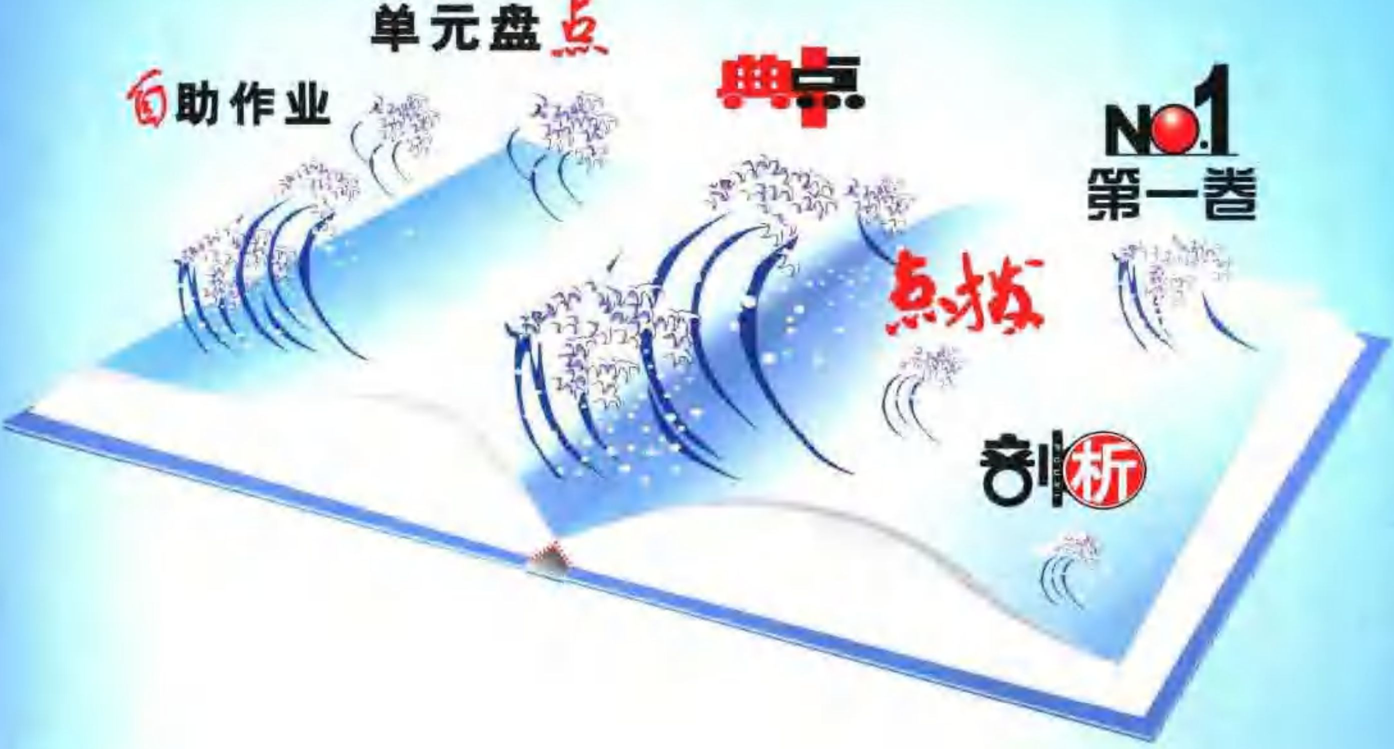
另一只蚂蚁说："刚才，咱们离胜利不是只差一步了吗？"说罢，他又重新开始攀登。

一次又一次跌倒，一次又一次攀登，他到底摸到了杯口的边缘，用最后一点力气，翻过了这道透明的围墙。

隔着玻璃，杯子里的蚂蚁既羡慕又忌妒地问："快告诉我，你获得成功的秘诀是什么？"

杯子外边的蚂蚁回答："接近成功的时候可能最困难。谁在最困难的时候也不丧失信心，谁就可能赢得胜利。"

荣德教辅和你一起坚持到胜利那一刻！



在知识的海洋里汲取智慧的浪花

见过一片海，
用渊博的知识激荡起壮阔的海面；
采过一丛花，
因智慧的碰撞绽放开含蓄的花瓣；
有过一个梦，
决定从这里启程……

《点拨》特色

◆ 遵循课前预习——课堂学习——课后复习的教学步骤设计版块。宏观至微观地对每章、每课、每节进行讲解，观点与例证结合。真正做到让学生明白大纲要求学什么，自己应该学什么，重点怎么学，非重点怎么学，基础怎么打，能力怎么抓，知识怎么用，试题怎么答……总之，讲就讲到点上，学就学个通透。

◆ 信息含量高。通过一个知识点的讲解，可以延伸到知识背景、专题、特例、反例等等。多角度、全方位地诠释每一个知识点，所有需要辅助了解的信息，所有可能忽略的信息，所有可能被误导的信息，总之，所有可能均在讲解范围内。

◆ “点拨”到位。对每一个问题的讲解均做到有理论，有例证，有思路引导，有解题过程，有解题思路、技巧、方法的分析，此精神在答案中尤其得到贯彻。答案加“点拨”是荣老师的首创。

◆ 题型丰富，命题结构科学。分教材跟踪练习题及综合应用创新练习题，其中除常见题型之外，还有许多创新题型。

《点拨》新版丛书特写

点拨，取点准、点精、点透，拨开迷雾，开发智力潜能之义。“点拨”二字，由中国书法家协会主席沈鹏先生题写，他自然畅达、墨趣横生、气韵生动、意象联翩的创作笔法，淋漓尽致地诠释出了点拨一书的精神主旨。而《点拨》丛书编委会的老师们也将荣德基老师独创的这一“点拨”理念贯彻至今，不曾有丝毫的松懈，可谓精益求精。也正因为如此，《点拨》才可以一直被读者朋友们奉为心目中的精品图书，这不只是对《点拨》的肯定，更是一种鼓励和鞭策。所以，读者朋友们每年如期看到《点拨》丛书在坚持它优良传统的同时，也在不断地看到它的改变……

《点拨》系列

1. 点拨新课标各版本教材配套用书：
   七年级至九年级，高中必修、选修用。
2. 点拨高考用书
3. 点拨中考用书：
   新课标各版本，人教试验修订版。
4. 点拨试验修订版教材配套用书：
   高一、高二、高三用。

《点拨》丛书贯彻的荣德教辅策划理念

点拨理念——用易学、易掌握、易变通的方式，用妥帖、精辟的语言，深入浅出，使同学们在思维里顿悟，在理解中通透，在运用中熟练。

创新理念——深入挖掘贯彻同步辅助教学的两个概念：教材新知识学习同步和教材知识复习同步。

精品理念——精益求精，策划读者需要的、做最适合读者的精品图书。

差距理念——荣老师的独创，贯彻荣德教辅独特的CETC循环学习法的精髓。

高考在平时理念——在练习中融入对应本课（节）知识点的高考真题，培养高考应试能力。

编委会祝福

感谢一直以来关心支持《点拨》丛书的老师、家长和同学们，是你们给了我们动力和灵感。因此，你们来信中的鼓励和建议都将在荣德教辅新书中找到影子，希望你们能仔细观察、认真使用，也在本书中找到您的汗水！

最后，祝老师和家长朋友们工作顺利、身体健康！

2006年2月

震撼学生心灵的学习方法

◆ 撬动灵感的杠杆——荣德基老师创造CETC学习法灵感的由来

创造从学习开始。1997年两本书叫醒了荣老师沉睡的灵感神经，点亮了CETC循环学习法的灵魂之光。她们是《在北大等你》（光明日报出版社出版）和《等你在清华》（中国检察出版社出版）。

书中考入清华和北大的文、理科高考状元及优秀学生，用自己的切身经历，介绍了他们高效率的复习方式和独特的高考心态平衡法。摘录如下：

1. “我习惯于把每次测验中出现的错误记录下来，到下一次考试前翻过来看看，这样就不会重犯过去的错误。”

（熊选萌，1996年广西文科高考第一名 北京大学经济学院）

2. “题不二错。我们班同学大都有一个错题本。通过分析错题，可以明白自己的弱点，更好地查缺补漏。同学们不妨一试。”

（魏娟，1995年北京文科高考第一名 北京大学经济学院）

3. “对高考来说，重视一道错题比你做一百道习题也许更为重要。”

（侯森，1996年河北省文科高考第三名 北京大学法律系）

4. “我高中三年的单元考和期末考的卷子以及高三的各种试卷基本上都保存着，在最后关头把它们拿出来看看，主要是看其中的错题，分析一下错误原因，讨论一下正确做法，使我加深了印象，不让自己再犯相同的错误。”

（徐海燕，1995年四川省理科高考第三名 北京大学生命科学学院）

◆ CETC的灵魂——差距

C—comprehension：听老师讲课，读教材，看教辅，不懂的地方——差距。（为什么不懂，有差距）

E—exercise：做练习题的错题——差距。（练习时为什么做错题，有差距）

T—test：各种考试中做错的题——差距。（考试时为什么做错题，有差距）

C—countermeasure：应对措施——消灭差距的方式方法。（再次做题时，保证题不二错）

锁定差距：C 、E、 T

缩小差距与消灭差距：C

CETC：锁定差距——缩小差距——消灭差距（这是CETC的目标和核心）

荣德基CETC循环学习法：CETC不停地循环——循环——再循环，差距在循环中锁定，在循环中缩小，在循环中消灭。

5. “我建议同学们能建立一个‘错题记录’，仔细分析原因，找出相应的知识点加以巩固强化，这样能避免重复犯同样的错误。”

（尹华，1997年山东省理工科高考第一名 清华大学化学系）

6. “一个很有效的方法就是做完题后写总结、感想，尤其是对那些想了半天没做出来的或者会做做错的题尤为重要。要把自己为什么不会做或者为什么做错的原因记下来，这样才会有真正的收获，做题的意义也在于此。我自己就一直是这样做的，如果你翻看我做过的习题集或试卷，就会发现随处都是用红笔写的批注，我从中收获极大。”

（张卓恩，1997年保送清华大学经济管理学院 1997年北京市理工科高考第七名）

7. “要重视自己的学习方法。在学习中，学习方法非常重要，两个智力和勤奋程度差不多的人，方法好的可能会优秀很多。这里我只提供一个比较适用的方法：自己准备一个笔记本，把平时做题中出现的错误都整理上去，写上造成错误的原因和启示。如果你平时做题出错较多，比如一张练习卷要错五、六处或更多，抄错题恐怕得不偿失，这时你可以在试卷上把错题做上标记，在题目的旁边写上评析，然后把试卷保存好，每过一段时间，就把‘错题笔记’或标记错题的试卷翻看看一看，好处会很大。在看参考书时，也注意把精彩之处或做错的题目做上标记，这样以后你再看这本书时就有所侧重了，不必再整个看一遍。”

（魏少岩，1996年平时成绩优秀保送清华）

◆ 荣老师规律总结：

如何对待错误？考上清华、北大的同学们，都有一个错题记录本，关注做错的题，花精力复习做错的题！

目录

CONTENTS

第十章 排列、组合和二项式定理

第十一章 概 率

第九章 直线、平面、简单几何体

知识链接

1. **经验链接**：现实生活中，我们接触到许许多多、形形色色的空间图形和几何体，这些图形和几何体都是由点、线、面构成的. 从小学到初中，我们陆续学习了正方体、长方体、圆柱、圆锥、球等特殊几何体的初步知识，在本章我们将继续学习这些几何体的相关知识，还要重点研究空间中的点、线、面的位置关系，学习空间图形的画法、性质、计算和应用.

2. **问题链接**：升国旗是我们经常参加的活动. 旗杆是垂直立在地平面上的，竖立旗杆时怎样才能保证它垂直立于地平面上？旗杆与地平面内的直线存在怎样的位置关系？如果旗杆的高度为 h，旗杆底端与地平面内某条直线 l 间的距离为 d，那么旗杆顶端到 l 的距离是多少？要解决这类问题，就要用到本章的知识.

第一节 平 面

Ⅰ 课前准备

关键概念和公理及推论提示

关键概念：平面、直线在平面内、直线在平面外、两个平面相交.

关键公理及推论：公理 1、公理 2、公理 3、推论 1、推论 2、推论 3.

Ⅱ 基础知识必备

一、必记知识背牢

1. 基本概念：平面.

(1)必记内容：平面具有向四周的无限延展性. 无比平整性.

(2)巧记方法：延展性、平整性.

2. 基本概念：直线在平面内、直线在平面外.

(1)必记内容：如果直线 l 上所有的点都在平面 α 内，就说直线 l 在平面 α 内，或者说平面 α 经过直线 l. 记作 $l\subset\alpha$. 否则，就说直线 l 在平面 α 外，记作 $l\not\subset\alpha$.

(2)巧记方法：直线 l、平面 α 为点集，若 $l\subset\alpha$，则直线 l 在平面 α 内；若 $l\not\subset\alpha$，则直线 l 在平面 α 外.

3. 基本概念：两个平面相交.

(1)必记内容：如果平面 α 和 β 有一条公共直线 l，就说平面 α 和 β 相交，交线是 l，记作 $\alpha\cap\beta=l$.

(2)巧记方法：若 $\alpha\cap\beta=l$，则平面 α 和平面 β 相交.

4. 公理：平面的基本性质.

(1)必记内容：公理 1　如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内.

公理 2　如果两个平面有一个公共点，那么它们还有其他公共点，且所有这些公共点的集合是一条过这个公共点的直线.

公理 3　经过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面.

推论 1　经过一条直线和这条直线外的一点，有且只有一个平面.

推论 2　经过两条相交直线，有且只有一个平面.

推论 3　经过两条平行直线，有且只有一个平面.

(2)巧记方法：公理 1　$A\in l, B\in l, A\in\alpha, B\in\alpha \Rightarrow l\subset\alpha$.

公理 2　$P\in\alpha\cap\beta\Rightarrow\alpha\cap\beta=l$ 且 $P\in l$.

公理 3　不在同一条直线上的三点确定一个平面.

推论 1　一条直线和直线外一点确定一个平面.

推论 2　两条相交直线确定一个平面.

推论 3　两条平行直线确定一个平面.

二、精彩点拨教材知识

知识点 1：平面

详解：平面是一个不定义的，只作描述说明的原始概念. 常见的桌面、墙面、平静的水平面等，都给我们以平面的形象，但不能说它们就是平面，几何里说的平面既无大小，又无薄厚，可以向四周无限延展，没有边界来理解平面，可联系直线的无限延伸性、无端点来对此理解.

类似于，平面几何里用直线的一部分表示直线，我们也用平面的一部分来表示平面. 通常画平行四边形来表示平面. 当平面是水平放置时，通常画成如图 9-1-1所示的形式；当平面是竖直放置时，通常画成如图 9-1-2 所示的形式；当一个平面的一部分被另一个平面遮住时，通常画成如图 9-1-3 所示的形式.

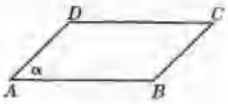
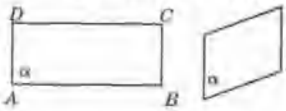
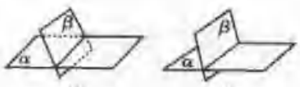


图 9-1-1



(1)　(2)

图 9-1-2



(1)　(2)

图 9-1-3

平面通常用一个希腊字母 α、β、γ 等来表示，如平面 α、平面 β、平面 γ 等，或用平行四边形的四个顶点表示，如平面 $ABCD$，也可以用平行四边形的两个相对顶点来表示，如平面 AC.

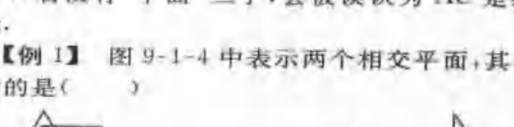
拓展：1. 有时根据需要也可以用其他平面图形来表示平面，如三角形、一般四边形、圆等.

2. 今后一般用字母 A、B、C、… 表示点，a、b、c、… 表示直线，用 α、β、γ、… 表示平面.

警示：1. 平面几何中添加辅助线画虚线，立体几何中则不然，能够看得见的线画成实线，被平面遮住看不见的线画成虚线(无论是题目中原有的线，还是添加的辅助线).

2. 表示平面时要在字母前写出“平面”二字，如平面 AC. 若没有“平面”二字，会被误认为 AC 是线段或直线.

【例 1】 图 9-1-4 中表示两个相交平面，其中画法正确的是(　　)



A　B　C　D

图 9-1-4

解：D　**点拨**：A 不正确，因为图中没有画出两平面

的交线；B不正确，是因为被平面 α 遮住部分画成了实线，应该不画或画成虚线；C不正确，原因是两个平面的公共点组成一条公共直线，画图时应画出两平面的交线，并且C图中也有与B相同的错误。D是正确的，符合画图规则。

知识点1针对性练习：

1. 下列命题中，正确的命题有(　　)

A. 墙面是平面

B. 3个平面重叠起来，比2个平面重叠起来厚

C. 一个平面的长是200cm，宽是100cm

D. 平面是平滑的，无厚度的，可以无限延展的只描述不定义的数学概念

2. 如图9-1-5所示的直观图是将正方体模型放置在你的水平视线的左上角绘制的，其中正确的是(　　)

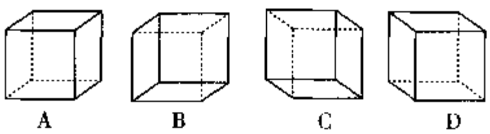


图9-1-5

知识点2：平面的基本性质(这是重点)

详解：平面的基本性质包括三个公理及三个推论，是研究立体图形的基本理论的基础。要掌握好这些性质的文字语言、符号语言和图形语言，并明确它们的具体作用。

三个公理及其三个推论的文字语言、符号语言和图形语言教材中已详细给出，这里只对这些公理及其推论的作用给予说明。

公理1的作用有：一是检验平面；二是判定直线是否在平面内；三是证明点在平面内，即若 $A\in l$，$l\subset\alpha$，则 $A\in\alpha$。

公理2的作用有：一是判定两个平面相交；二是证明点在直线上，即若 $\alpha\cap\beta=l$，$P\in\alpha$ 且 $P\in\beta$，则 $P\in l$；三是证明线共点，即若 $a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，$\alpha\cap\beta=l$，$a\cap b=O$，则 a、b、l 三条直线共点 O；四是证明点共线，即若 A、B、$C\in\alpha$，A、B、$C\in\beta$，$\alpha\cap\beta=l$，则 A、B、$C\in l$。五是画两个平面的交线。

公理3及其推论的作用有：一是证明点、线共面；二是判定空间一些点、线确定的平面的个数。

拓展：公理3及其推论中"有且只有一个"的含义包括两层：一层是说"有"，它表示图形的存在性；一层是说"只有一个"，它表示图形的唯一性。"有且只有一个"与"确定一个"是等价的，如公理3可叙述为"不在同一条直线上的三点确定一个平面。"

【例2】 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，对角线 A_1C 与平面 BDC_1 交于点 O，AC、BD 交于点 M，求证：点 C_1、O、M 共线。

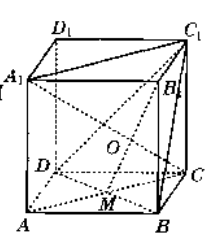


图9-1-6

证明：如图9-1-6所示 $AA_1\parallel CC_1$，所以 AA_1、CC_1 确定平面 ACC_1A_1，则 $A_1C\subset$ 平面 ACC_1A_1。

又因为 $O\in A_1C$，所以 $O\in$ 平面 ACC_1A_1。

因为 $A_1C\cap$ 平面 $BDC_1=O$，所以 $O\in$ 平面 BDC_1。

所以点 O 为平面 ACC_1A_1 与平面 BDC_1 的公共点。

因为 $AC\cap BD=M$，所以 $M\in AC$ 且 $M\in BD$。

又因为 $AC\subset$ 平面 ACC_1A_1，$BD\subset$ 平面 BDC_1，

所以 $M\in$ 平面 ACC_1A_1 且 $M\in$ 平面 BDC_1。

又因为 $C_1\in$ 平面 ACC_1A_1 且 $C_1\in$ 平面 BDC_1，

所以点 O、M、C_1 均为平面 ACC_1A_1 与平面 BDC_1 的公共点，点 O、M、C_1 必在平面 ACC_1A_1 与平面 BDC_1 的交线上。

所以点 O、C_1、M 共线。

点拨：证明点共线的问题，一般转化为证明这些点是某两个平面的公共点。这样，可根据公理2证明这些点都在这两个平面的交线上。

【例3】 如图9-1-7，已知平面 α、β、γ 两两相交有三条交线 a、b、c，若 $a\cap b=P$，试证明直线 c 也过 P 点。

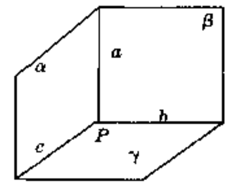


图9-1-7

证明：如图9-1-7，$\alpha\cap\beta=a$，$\beta\cap\gamma=b$，所以 $a\subset\alpha$ 且 $b\subset\gamma$ 因为 $a\cap b=P$，所以 $P\in a$ 且 $P\in b$，

所以 $P\in\alpha$ 且 $P\in\gamma$。

又因为 $\alpha\cap\gamma=c$，所以 $P\in c$，即直线 c 也过 P 点。

点拨：此题实际上是证明 a、b、c 三线共点。证明三线共点的常用方法是：先证其中两条直线相交于一点，后证此交点在第三条直线上。需证明两直线的交点是两平面的公共点，而第三条直线是这两个平面的交线。

【例4】 已知四条直线两两相交，且不共点，求证这四条直线在同一平面内。[N]

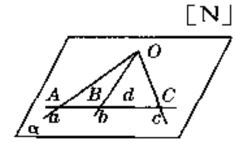


图9-1-8

证明：(1)如图9-1-8所示，直线 a、b、c 过同一点 O，直线 d 不过点 O，且与 a、b、c 分别交于点 A、B、C。

因为 $O\notin d$，所以经过直线 d 和点 O 有且只有一个平面 α。

因为 A、B、$C\in d$，所以 A、B、$C\in\alpha$。

因为 $O\in\alpha$，所以直线 AO、BO、CO 都在平面 α 内，即 a、b、c、d 在同一个平面 α 内。

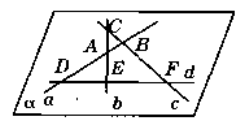


图9-1-9

(2)如图9-1-9所示，a、b、c、d 两两相交，但无三线共点。

因为 $a\cap b=A$ 所以直线 a、b 确定一个平面 α。

因为 $B\in a$，$C\in b$，所以 $B\in\alpha$ 且 $C\in\alpha$。

又因为 B、$C\in c$，所以由公理1得 $c\subset\alpha$。

同理 $d\subset\alpha$。从而有 a、b、c、d 都在平面 α 内。

综合(1)、(2)可知，两两相交且不共点的四条直线在同一平面内。

点拨：共面问题的常用证明方法有：(1)先确定一个平面，再证明有关的点、线在这个平面内；

(2)先过不同的点、线确定两个平面，再证明这两个平面重合。

本例题的证明中，需进行分类讨论。认真审题，分清各种位置的可能性，合理分类，做到不"重"不"漏"。

知识点2针对性练习：

3. 下列推理错误的是(　　)

A. $A\in l$，$A\in\alpha$，$B\in l$，$B\in\alpha\Rightarrow l\subset\alpha$

B. $A\in\alpha$，$A\in\beta$，$B\in\alpha$，$B\in\beta\Rightarrow\alpha\cap\beta=AB$

C. $l\not\subset\alpha$，$A\in l\Rightarrow A\notin\alpha$

D. A、B、$C\in\alpha$，A、B、$C\in\beta$，且 A、B、C 不共线 $\Rightarrow\alpha$ 与 β 重合

4. 下列命题中正确的是(　　)

A. 一组对边平行的四边形是平面图形

B. 两两平行的三条直线共面

C. 两组对边分别相等的四边形是平行四边形

D. 四边相等的四边形是菱形

5. 想一想，互相平行的四条直线，每两条确定一个平面，最多可确定______个平面，最少可确定______个平面.

三、易错点和易忽略点导析

易错点1：画两个相交平面.

易错点导析：对于初学者，画图是必须掌握的技能，也是一个难点，画图要按所学的方法和规则去进行，画相交平面时要画好交线，被平面遮住的部分画成虚线或不画. 容易出现的错误是实线、虚线画得不当.

【例1】 画出两个相交平面的直观图.

错解：如图9-1-10.

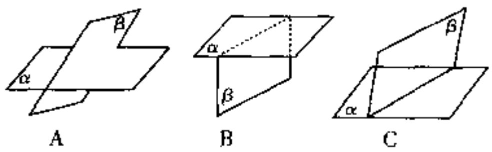


图9-1-10

错解分析：画直观图要注意实、虚线，它是正确表示空间位置关系的关键. 图9-1-10中，A应画出平面α、β的交线；B中α、β的交线应为实线；C中被平面β挡着的部分应画成虚线.

正确解法：如图9-1-11.

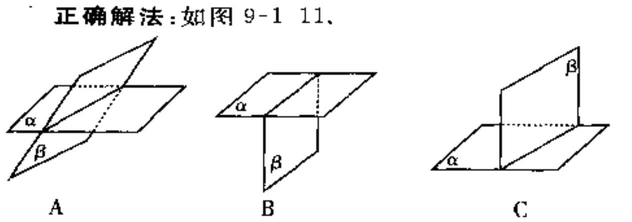


图9-1-11

针对性练习：

6. 按给定的要求，图9-1-12中图形画得正确的是(　　)

A：$a\subset\alpha$；　B：$A\in\alpha$且$A\in\beta$；　C：$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，$a\cap b=O$；　D：$A\in\alpha$，$A\in\beta$，$\alpha\cap\beta=EF$.

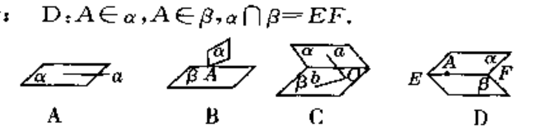


图9-1-12

易错点2：共面问题的证明.

易错点导析：共线问题的证明常用方法有两种. 有时容易将两种方法弄混，或是误认为不同点或直线确定的两个平面是同一个. 要避免这些错误，应掌握好平面的基本性质和证明方法.

【例2】 一条直线d与三条平行直线a、b、c都相交，如图9-1-13所示. 求证：这四条直线共面.

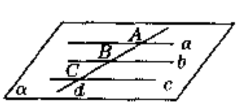


图9-1-13

错证一：因为$a/\!/b$，所以a、b可确定一个平面α. 又$b/\!/c$，所以b、c可确定一个平面β. 因为$a/\!/b/\!/c$，所以α与β重合. 设$d\cap a=A$，$d\cap b=B$，则$A\in\alpha$，$B\in\alpha$. 又A、B两点在直线d上，所以$d\subset\alpha$. 故a、b、c、d四条直线共面.

错证二：令$d\cap a=A$，$d\cap b=B$，$d\cap c=C$，则d与a可确定一个平面α，d与b可确定一个平面β. 又$a/\!/b$，所以a、b可确定一个平面γ. 所以$A\in\gamma$，$B\in\gamma$，$A\in d$，$B\in d$. 所以$d\subset\gamma$. 所以α、β、γ三个平面重合. 又$c/\!/b$，所以$c\subset\gamma$. 所以四条直线共面.

错证分析：在证明的过程中，必须符合公理、及其推论的条件时，才能得到相应的结论. 错证一中在证α与β重合时及错证二中在证明$c\subset\gamma$时就犯了这样的错误，得到的结论缺少理论依据.

正确证法：令$d\cap a=A$，$d\cap b=B$，$d\cap c=C$. 因为$a/\!/b$，所以a、b可确定一个平面α. 所以$a\subset\alpha$，$b\subset\alpha$. 所以$A\in\alpha$，$B\in\alpha$，又因为$A\in d$，$B\in d$. 所以$d\subset\alpha$. 又$b/\!/c$，所以b、c可确定一个平面β. 所以$b\subset\beta$，$c\subset\beta$. 所以$B\in\beta$，$C\in\beta$，由$B\in d$，$C\in d$. 所以$d\subset\beta$. 因为$b\cap d=B$，$b\subset\alpha$，$d\subset\alpha$，$b\subset\beta$，$d\subset\beta$，即α为两相交直线b、d确定的平面，β也为两相交直线b、d确定的平面，所以α与β重合. 故四条直线a、b、c、d共面.

针对性练习：

7. 两个平面重合的条件是(　　)

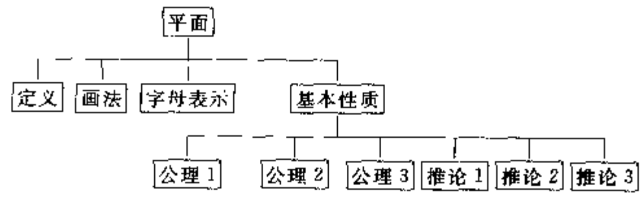
A. 有三个公共点　　　B. 有两条公共直线

C. 有无数多个公共点

D. 有一条公共直线

8. 求证：和同一条直线都相交的所有平行线共面.

四、构建知识网络



五、针对性练习答案及点拨

1. D　**点拨：**根据平面的意义，可知平面可向四周无限延展，给人以平整的感觉，无大小，无边界，无厚度，从而选D.

2. C　**点拨：**根据题意可知，应看到正方体模型的前面、下底面和右侧面，另外三个面看不到，故选C.

3. C　**点拨：**根据公理1、公理2和公理3，直接判定选项A、B、D给出的推理是正确的. 如图9-1-14所示，$l\not\subset\alpha$，$A\in l$，但是$A\in\alpha$. 故选C.

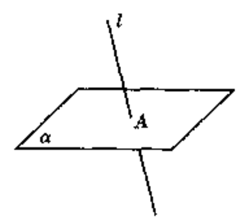


图9-1-14

4. A　**点拨：**互相平行的一组对边所在直线确定一个平面α，根据公理1可证另一组对边也在平面α内，则此四边形为平面图形. 故选A.

5. 6；1　**点拨：**若直线a、b、c、d互相平行，则a与b、a与c、b与c、a与d、b与d、c与d分别确定一个平面，这些平面互不相同时，最多可确定6个平面；这些平面都相同时，最少可确定1个平面.

6. D　**点拨：**A中$a\subset\alpha$，应把表示直线a的线段画在表示平面α的平行四边形内；B中$A\in\alpha$且$A\in\beta$，则平面α与β有一条公共直线，画图时应画出两平面的交线；C中$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，$a\cap b=O$，则点O应在α与β的交线上；前三个图都出现了错误，而最后一图是正确的，故选D.

7. B　**点拨：**根据公理2可知，两个平面有三个公共点或有无数多个公共点，若这些公共点共线，则两个平面可能相交；两个平面有一条公共直线时，两平面也可能相交；那么，A、C、D都不正确，故选B.

8. 解：已知：$a_1/\!/a_2/\!/\cdots/\!/a_n/\!/\cdots$，$a_i\cap l=A_i$（$i=1,2,3,\cdots,n,\cdots$），如图9-1-15所示.

求证：a_1，a_2，a_3，$\cdots$，a_n，$\cdots$共面.

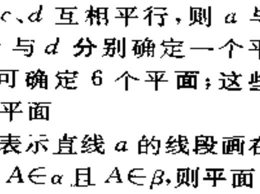


图9-1-15

证明：因为$a_1/\!/a_2$所以a_1、a_2确定一个平面α.

因为 $a_1 \cap l = A_1$，所以 $A_1 \in a_1$，则 $A_1 \in \alpha$.

同理 $A_2 \in \alpha$，所以 $l \subset \alpha$.

又因为 $a_2 \parallel a_3$，所以 a_2、a_3 确定一个平面 β.

同理 $l \subset \beta$.

于是相交直线 l 与 a_2 既在平面 α 内，又在平面 β 内.

所以 α 与 β 重合，所以 $a_3 \subset \alpha$. 同理 $a_n \subset \alpha$，所以 a_1，a_2，a_3，…，a_n，…共面.

点拨：由推论 2 可知两相交直线确定一个平面，先证其中两相交直线确定一个平面，然后再证明其他直线确定的平面和这个平面重合. 这也是证明多线共面的常用方法.

Ⅲ 综合应用创新能力培养

一、学科综合思维专题点拨

学科综合思维导析：立体几何是研究空间图形及其位置关系的数学分支，空间图形的部分可能在一个平面内，有关这部分的研究就可以利用平面几何的知识和方法. 常见的学科综合就是立体几何与平面几何的综合. 将空间图形问题向平面几何问题转化是常用的思想方法.

【例 1】 一条直线和这条直线外不在同一直线上的三点，可以确定多少个平面？并说明理由.

解：设直线 l 及 l 外不共线的三点 A、B、C. 由公理 3 可知 A、B、C 可以确定一个平面 α. 若 l 在平面 α 内，这时只能确定一个平面.

若 l 不在平面 α 内，可分下列情况进行讨论：

(1)若 A、B、C 中有两点与 l 共面，不妨设 A、B 与 l 共面于 β.

则 $C \notin \beta$，否则 α 与 β 重合，点 C 与 l 可确定一个平面 γ，这时可确定三个平面.

(2)若 A、B、C 中无任何两点与 l 共面，这时 A、B、C 三点与 l 分别可确定一个平面，连同 α 在内，共可确定四个平面. 综上所述，一条直线与这条直线外不共线的三点，确定平面的个数，可以是 1 个，3 个或 4 个.

点拨：解决此类问题的关键是分清点与直线的各种位置关系，然后进行分类讨论.

【例 2】 如图 9-1-16 所示，在棱长为 a 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M、N 分别为 AA_1、C_1D_1 的中点，过 D、M、N 三点的平面与正方体的下底面相交于直线 l.

(1)画出直线 l，并说明画法的依据；

(2)设 $A_1B_1 \cap l = P$，求线段 PB_1 的长.

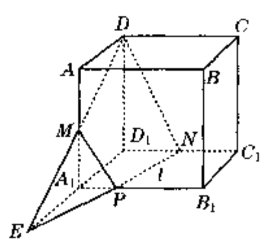


图 9-1-16

解：(1)延长 DM 交 D_1A_1 的延长线于 E，连结 NE，则 NE 即为所求的直线 l. 下面对画法作出说明. 因为 $E \in$ 直线 DM，直线 $DM \subset$ 平面 DMN，所以 $E \in$ 平面 DMN. 又 $E \in$ 直线 A_1D_1，直线 $A_1D_1 \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，所以 $E \in$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$. 所以 E 为平面 DMN 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的公共点. 因为平面 $DMN \cap$ 平面 $A_1B_1C_1D_1 = l$，所以 $E \in l$. 同理可证 $N \in l$. 所以直线 EN 就是所求的直线 l.

(2)因为 M 为 AA_1 的中点，且 $AD \parallel ED_1$，所以 $AD = A_1E = A_1D_1 = a$.

又因为 $A_1P \parallel D_1N$，且 $D_1N = \frac{1}{2}a$，所以 $A_1P = \frac{1}{2}D_1N = \frac{1}{4}a$. 所以 $PB_1 = A_1B_1 - A_1P = a - \frac{1}{4}a = \frac{3}{4}a$.

则线段 PB_1 的长为 $\frac{3}{4}a$.

点拨：作两平面交线的依据是公理 1 和公理 2，本题中易观察到 N 为两平面的公共点，要作出交线 l，再找到两平面的一个公共点是关键. 另外，本题中用到了平面几何中的结论，但需注意在结论没有证明的前提下，必须在同一平面内应用.

二、实际应用思维专题点拨

实际应用思维导析：我们生活的空间中，有形形色色的几何体，会经常遇到平面的部分和直线的部分，生活中许多现象，做法可以用所学知识解释其中的道理.

【例 3】 不在同一直线上的三点确定一个平面，为什么一位同学骑着自行车行驶时不会摔倒？

解：由于自行车在行进过程中，车头在不断地左右摆动，这时前轮与后轮不断形成新的平面，所以不会摔倒.

三、创新思维专题点拨

创新思维导析：解决一个问题，需要进行思维活动. 思维具有创新性，用新颖的思维方法，不同的思维方法分析问题、解决问题，是创新思维的体现.

【例 4】 (巧题妙解)已知 P 是▱$ABCD$ 所在平面外一点，连结 PA、PB、PC、PD，如图 9-1-17所示，点 E、F、G、H 分别为 $\triangle PAB$、$\triangle PBC$、$\triangle PCD$、$\triangle PDA$ 的重心，求证：E、F、G、H 四点共面. [N]

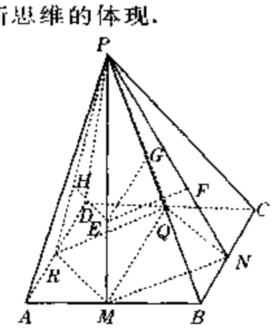


图 9-1-17

证明：连结 PE、PF、PG、PH 并延长交▱$ABCD$ 的各边于 M、N、Q、R. 因为 E、F、G、H 分别为所在三角形的重心，所以 M、N、Q、R 分别为所在边的中点. 顺次连结 M、N、Q、R，所得四边形 $MNQR$ 为平行四边形，且 $\overrightarrow{PE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PM}$，$\overrightarrow{PF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PN}$，$\overrightarrow{PG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PQ}$，$\overrightarrow{PH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PR}$.

连结 EH、EG、EF、MQ. 因为四边形 $MNQR$ 为平行四边形，所以 $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MR} = (\overrightarrow{PN} - \overrightarrow{PM}) + (\overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PM}) = \frac{3}{2}(\overrightarrow{PF} - \overrightarrow{PE}) + \frac{3}{2}(\overrightarrow{PH} - \overrightarrow{PE}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{EF} + \frac{3}{2}\overrightarrow{EH}$. 而 $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{PG} - \frac{3}{2}\overrightarrow{PE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{EG}$，所以 $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH}$. 由共面向量定理得 E、F、G、H 四点共面.

点拨：本题妙在利用共面向量的定理，要证 E、F、G、H 四点共面，只要证明存在有序实数对 λ_1、λ_2，使得 $\overrightarrow{EG} = \lambda_1\overrightarrow{EF} + \lambda_2\overrightarrow{EH}$ 即可，巧妙地将空间严格的证明问题转化为向量运算而解决.

【例 5】 (多变题)已知 E、F、G、H 分别是空间四边形 $ABCD$ 各边 AB、AD、CB、CD 上的点，且直线 EF 和 GH 交于点 P，如图 9-1-18 所示，求证：点 B、D、P 在同一条直线上.(注：四个顶点不共面的四边形叫做空间四边形.)

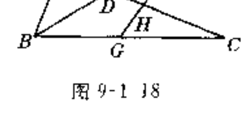


图 9-1-18

证明：因为直线 $EF \cap$ 直线 $GH = P$，所以 $P \in$ 直线 EF. 而 $EF \subset$ 平面 ABD，所以 $P \in$ 平面 ABD. 同理 $P \in$ 平面 CBD. 所以 $P \in$ 平面 $ABD \cap$ 平面 CBD. 因为平面

$ABD\cap$平面$CBD=BD$，所以$P\in$直线BD. 故点B、D、P在一条直线上.

一变：如图9-1-19，已知空间四边形$ABCD$中，E、H分别是AB、AD的中点，F、G分别是边BC、CD上的点，且$\frac{CF}{CB}=\frac{CG}{CD}=\frac{2}{3}$，求证：三条直线$EF$、$GH$、$AC$相交于一点.

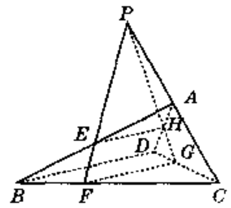


图9-1-19

解：连结GF、EH. 在$\triangle ABD$中，EH为中位线，所以$EH\underline{\parallel}\frac{1}{2}BD$.

在$\triangle CBD$中，因为$\frac{CF}{CB}=\frac{CG}{CD}=\frac{2}{3}$，所以$FG=\frac{2}{3}BD$且$FG\parallel BD$.

所以四边形$EFGH$为梯形，从而两腰EF、GH必相交于一点P.

因为$P\in$直线EF，$EF\subset$平面ABC，所以$P\in$平面ABC.

同理$P\in$平面ADC. 所以P在平面ABC和平面ADC的交线AC上，

故EF、GH、AC三直线交于一点.

二变：如图9-1-20，空间四边形$ABCD$中，E、F分别为AB、BC的中点，G、H分别是CD和AD上的点，且$\frac{DG}{DC}=\frac{DH}{DA}=\frac{1}{m}(m>2)$. 求证：$EH$、$FG$、$BD$相交于一点.

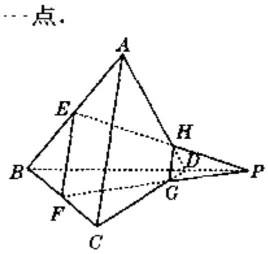


图9-1-20

解：连结AC，因为E、F分别是AB、BC的中点，所以$EF\underline{\parallel}\frac{1}{2}AC$. 又因为$\frac{DG}{DC}=\frac{DH}{DA}=\frac{1}{m}$，所以$HG\underline{\parallel}\frac{1}{m}AC$. 而$m>2$，所以$EF\parallel GH$，且$EF>HG$. 所以$EH$和$FG$相交于一点$P$. 又因为$P\in EH$，$EH\subset$平面$ABD$，所以$P\in$平面$ABD$. 同理$P\in$平面$BCD$. 所以$P\in BD$，即直线$BD$经过点$P$. 因此，直线$EH$、$FG$、$BD$相交于一点.

点拨：由本题的证明可知：(1)要证明三点在同一条直线上，只需证明这三点都是两个平面的公共点；(2)要证明一点在一条直线上，只需证明这个点是两个平面的公共点，这条直线是两个平面的交线.

四、研究性学习思维专题点拨

科学探究思维专题点拨

科学探究思维导析：在学习中，对某类问题可能出现的结果进行科学性探究，总结归纳出规律性的结论，会对知识的理解引向深入，形成系统的知识体系.

【例6】 一个平面把空间分成两部分，两个平面能把空间分成几部分？三个平面呢？

解：1. 首先看两个平面分空间的情况：

(1)两个平面互相平行时，将空间分成3部分，如图9-1-21(1).

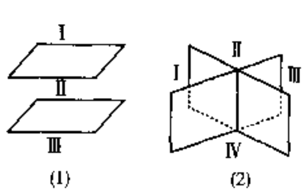


图9-1-21

(2)两个平面相交时，将空间分成4部分，如图9-1-21(2).

2. 接着研究三个平面分空间的情况：

(1)三个平面互相平行时，将空间分成4个部分，如图9-1-22(1).

(2)其中两个平面平行，第三个平面与它们都相交，这时三个平面把空间分成6个部分，如图9-1-22(2).

(3)三个平面相交于一条直线，这时三个平面将空间分成6个部分，如图9-1-22(3).

(4)三个平面相交于三条平行直线，这时三个平面将空间分成7个部分，如图9-1-22(4).

(5)三个平面相交于过一点的三条直线，这时三个平面将空间分成8个部分，如图9-1-22(5).

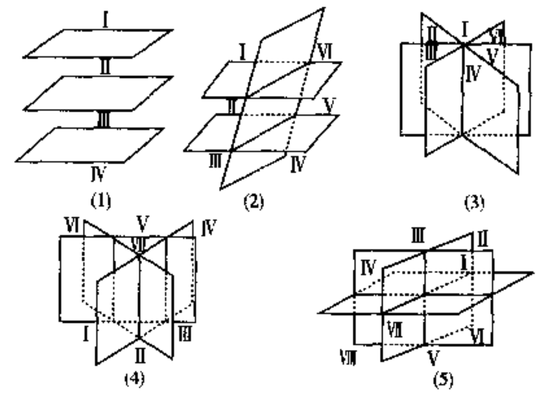


图9-1-22

点拨：对于这类问题一定要考虑全面，可先采用类比的方法. 如三条直线都能把平面分成几个部分，再扩展到空间.

五、高考思维专题点拨

高考思维导析：本节内容是立体几何的起始内容，基础地位非常重要. 从近几年的高考试题来看，很少出现单独考查平面的基本性质的题目，但其内容在历年高考试题中常常结合其他知识命题，因此，必须重视此内容，并掌握好它.

【例7】 (2005，全国Ⅱ，5分)正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，P、Q、R分别是AB、AD、B_1C_1的中点. 那么，正方体的过P、Q、R的截面图形是(　　) [N]

A. 三角形　B. 四边形　C. 五边形　D. 六边形

解：D　**点拨**：如图9-1-23，连结QP并延长交CB的延长线于点M，则点M为平面PQR与平面BCC_1B_1的公共点，则MR为平面PQR与平面BCC_1B_1的交线. 延长MR交CC_1的延长线于点N，则$N\in CC_1\subset$平面CDD_1C_1，即点N为平面PQR与平面CDD_1C_1的公共点. 从而可知截面PQR和正方体的六个面都有公共点，则此截面与正方体的六个面共有六条交线，这六条交线围成如图9-1-23中阴影部分所示的六边形，故选D.

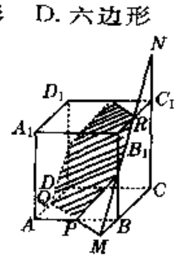


图9-1-23

Ⅳ 轻松一刻

数学名家谈数学的价值

集合论的建立者康托尔说：在数学的领域中，提出问题的艺术比解答问题的艺术更为重要.

数学巨匠希尔伯特说：没有任何问题可以像无穷那样深深的触动人的情感，很少有别的观念能像无穷那样激励理智产生富有成果的思想. 然而也没有任何

其他的概念能像无穷那样需要加以阐明.

数学王子高斯说：数学中的一些美丽定理具有这样的特性：它们极易从事实中归纳出来，但证明却隐藏的极深.

Ⅴ 强化练习题

A卷：教材跟踪练习题 (80分 45分钟)☞(157)

一、选择题(每题5分，共25分)

1.(测试知识点2)下面四个命题中，真命题的个数为(　　)

①如果两个平面有三个公共点，那么这两个平面重合；②两条直线一定可以确定一个平面；③若$M\in\alpha$，$M\in\beta$，$\alpha\cap\beta=l$，则$M\in l$；④空间中，相交于同一点的三条直线在同一平面内.

A. 1个　B. 2个　C. 3个　D. 4个

2.(测试知识点2)空间中有A、B、C、D、E五个点，若A、B、C、D共面，B、C、D、E共面那么这五个点(　　)

A. 一定共面　B. 可能共面也可能不共面

C. 一定不共面　D. 一定共线

3.(测试知识点2)下列推理中，错误的个数为(　　)

①$A\in l,A\in\alpha,B\in l,B\in\alpha\Rightarrow l\subset\alpha$；②$A\in\alpha,A\in\beta,B\in\alpha,B\in\beta\Rightarrow\alpha\cap\beta=AB$；③$l\not\subset\alpha,A\in l\Rightarrow A\notin\alpha$；④$A$、$B$、$C$、$D\in\alpha$，$A$、$B$、$C\in\beta$，且$A$、$B$、$C$不共线$\Rightarrow\alpha$与$\beta$重合.

A. 0个　B. 1个　C. 2个　D. 3个

4.(测试知识点1、2)下列说法中正确的是(　　)

A. 圆和三角形都可以表示一个平面

B. 任何一个多边形都可以表示一个平面

C. 无数条直线组成一个平面

D. 若P是平面α与平面β的公共点，则α与β的交线是过P点的任一直线

5.(测试知识点2)已知E、F、G、H分别是空间四边形$ABCD$各边上的点，且直线$EH\cap$直线$FG=P$，如图9-1-24所示，则点P在(　　)

A. 平面ABD内　B. 直线AC上

C. 直线AD上　D. 直线BD上

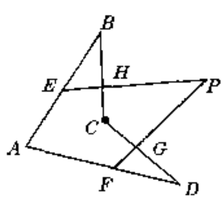


图9-1-24

二、填空题(每题5分，共15分)

6.(测试知识点2)若直线l上有一个点A不在平面α内，则直线l与平面α的公共点最多有______个.

7.(测试知识点2)四条直线两两平行，任何三条不共面.如果经过其中任意两条作平面，那么可作平面的个数为________.

8.(测试知识点2)给出下列条件：①空间的任意三点；②空间的任意两条直线；③梯形的两条腰所在的直线；④空间的任意一条直线和任意一个点；⑤空间两两相交的三条直线.其中一定能独立确定一个平面的条件的序号是__________.

三、解答题(每题12分，共24分)

9.(测试知识点1,2)(1)根据下列条件画出图形：平面$\alpha\cap$平面$\beta=AB$，直线$a\subset\alpha$.直线$b\subset\beta$，$a\parallel AB$，$b\parallel AB$；(2)如图9-1-25，$A\in\alpha$，直线AB和AC不在α内，画出AB和AC所确定的平面，并画出直线BC和平面α的交点.

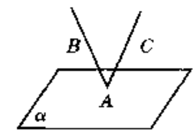


图9-1-25

10.(测试知识点1)如图9-1-26所示，$AB\cap\alpha=P$，$CD\cap\alpha=P$.A、D与B、C分别在α的两侧，$AC\cap\alpha=Q$，$BD\cap\alpha=R$，求证：P、Q、R三点共线.

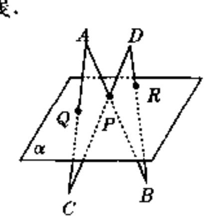


图9-1-26

四、实际应用题(8分)

11. 瓦工师傅抹墙面时，常用大直尺去刮平墙面.这其中说明什么道理？

五、探究题(4分)

12. 正方体的各面所在平面将空间分成______个部分.

六、高考题(4分)

13.(2005，吉林模拟，4分)四边形$ABCD$中，$AB=BC=CD=DA=BD=1$，则成为空间四边形时，AC的取值范围是______.

第二节　空间直线

Ⅰ 课前准备

关键概念和原理提示

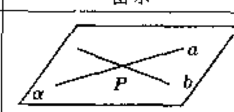
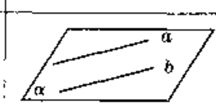
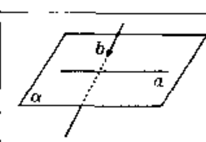
关键概念：异面直线、异面直线所成的角、两条异面直线互相垂直、两条异面直线的距离.

关键原理：空间两条直线的位置关系、公理4、等角定理及其推论.

Ⅱ 基础知识必备

一、必记知识背牢

1. 基本关系：空间两条直线的位置关系.

名称	含义	图示	符号表示
相交直线	有且仅有一个公共点		$a\cap b=P$
平行直线	在同一个平面内，没有公共点		$a\parallel b$
异面直线	不同在任何一个平面内，没有公共点		$a\cap b=\varnothing$且a与b不平行

2. 公理：公理 4（平行公理）.

（1）必记内容：平行于同一条直线的两条直线互相平行.

（2）巧记方法：$a // b, c // b \Rightarrow a // c$.

3. 基本定理：等角定理及其推论.

（1）必记内容：定理　如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同，那么这两个角相等.

推论　如果两条相交直线和另两条相交直线分别平行，那么这两组直线所成的锐角（或直角）相等.

（2）巧记方法：定理　边平行，方向同，则角相等.

推论　分别对应平行的两组相交直线所成的锐角（或直角）相等.

4. 基本概念：两条异面直线所成的角.

（1）必记内容：直线 a、b 是异面直线，经过空间任意一点 O，作直线 a'、b'，并使 $a' // a$，$b' // b$，我们把 a' 和 b' 所成的锐角（或直角）叫做异面直线 a 和 b 所成的角.

（2）巧记方法：经过空间任意一点，分别作异面直线 a、b 的平行线 a'、b'，a' 和 b' 所成的锐角（或直角）叫做异面直线 a 和 b 所成的角.

5. 基本概念：两条异面直线互相垂直.

（1）必记内容：如果两条异面直线所成的角是直角，就说这两条异面直线互相垂直.

（2）巧记方法：类似于平面中两条直线垂直，即所成的角是直角.

6. 基本概念：两条异面直线的公垂线.

（1）必记内容：和两条异面直线都垂直相交的直线，叫做两条异面直线的公垂线.

（2）巧记方法：和两条异面直线都垂直相交的直线

7. 基本概念：两条异面直线的距离.

（1）必记内容：两条异面直线的公垂线在这两条异面直线间的线段（公垂线段）的长度，叫做两条异面直线的距离.

（2）巧记方法：两条异面直线的公垂线段的长度，叫做它们的距离.

二、精彩点拨教材知识

知识点 1：空间两条直线的位置关系（这是难点）

详解：空间两条直线有三种位置关系：（1）相交；（2）平行；（3）异面. 其中前两种的共同特点是在同一平面内；第（2）、（3）两种的共同特点是没有公共点. 给定空间两条直线，它们的位置关系是上述中的一种，且只能是其中的一种. 如两条直线是异面直线，就意味着这两条直线既不平行又不相交.

理解异面直线的定义是本节的一个难点. 对异面直线的定义的理解应紧紧抓住"不同在任何一个平面内"这几个字，两条异面直线不能同在任何一个平面内，就是说不存在经过这两条异面直线的平面，任何一个平面不可能经过这两条异面直线. 分别在两个平面内的两条直线不一定是异面直线.

【例 1】　若直线 $a \perp b$，直线 $c // a$，则 c 与 b 的关系是（　　）

A. 相交或异面　　B. 相交或平行

C. 平行或异面　　D. 相交、平行或异面

解法一：（1）若 a、b、c 共面，由平面几何知识得 c 与 b 相交；（2）若 a、b、c 不共面，则 b、c 的位置如图 9-2-1 所示，相交或异面，综合（1）、（2），得 c 与 b 相交或异面，故选 A.

解法二：假设 $c // b$. 又 $c // a$，由公理 4，得 $a // b$，与已知 $a \perp b$ 矛盾. 因此，c 与 b 不平行，故选 A.

点拨：判定两直线的位置关系，不能只局限于平面

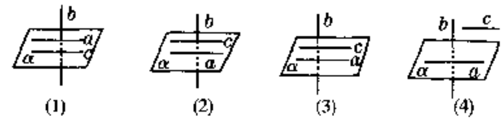


图 9-2-1

内，要把直线置身于空间来考虑，有时可分平面与空间两种情形讨论.

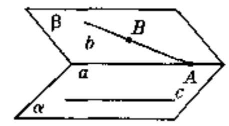


图 9-2-2

【例 2】　如图 9-2-2，已知 $\alpha \cap \beta = a$；$b \subset \beta$，$a \cap b = A$，且 $c \subset \alpha$，$c // a$. 求证：b、c 是异面直线.

证法一：因为 $a \cap b = A$，所以 $A \in a$. 又 $c // a$，所以 $A \notin c$. 在直线 b 上任取不同于 A 的一点 B. 因为 $b \subset \beta$，$B \notin a$，所以 $B \notin \alpha$，$B \notin c$. 由异面直线的判定定理得 AB 与 c 是异面直线，即 b 与 c 是异面直线.

证法二：假设 b、c 不是异面直线，即 b、c 在同一个平面内，设所在平面为 γ. 因为 $A \in b$，$b \subset \gamma$，所以 $A \in \gamma$. 又因为 $c \subset \gamma$，所以平面 γ 经过直线 c 和点 A. 又因为 $A \in a$，$a // c$，所以 $A \notin c$，可见过直线 c 和点 A 的平面就是 α. 所以平面 γ 与平面 α 重合. 所以 $b \subset \alpha$，与已知 $b \subset \beta$ 矛盾. 所以假设不成立. 故 b、c 是异面直线.

证法三：假设 b、c 不是异面直线，则 b 与 c 相交或 $b // c$.（1）若 b 与 c 相交，设 $b \cap c = P$. 因为 $b \subset \beta$，$c \subset \alpha$，$\alpha \cap \beta = a$，所以 $P \in a$. 又 $P \in c$，所以 $a \cap c = P$，这与已知 $a // c$ 矛盾. 因此直线 b、c 不相交.（2）若 $b // c$，由 $a // c$，可得 $a // b$. 这与已知 $a \cap b = A$ 矛盾，因此 b 与 c 不平行. 综上可得，直线 b、c 是异面直线.

点拨：证明两条直线是异面直线：（1）可以从条件出发，寻找异面直线判定的条件，由异面直线判定定理得出结论.（2）也可以用反证法，其一般步骤是：①假设结论不成立；②据理推出矛盾；③断定原结论正确.

知识点 1 针对性练习：

1. 两条异面直线就是指（　　）

A. 在空间内不相交的两条直线

B. 分别位于两个不同平面内的两条直线

C. 某一平面内的一条直线和这个平面外的一条直线

D. 不可能在同一平面内的两条直线

2. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，下面列举的四对直线中不是异面直线的一对是（　　）

A. AB 与 CC_1　　B. AA_1 与 B_1C

C. A_1C_1 与 AB　　D. A_1C_1 与 AC

知识点 2：平行公理（这是重点）

详解：在同一个平面内，如果两条直线都和第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行，对于空间的三条直线也有相同的规律，即公理 4：平行于同一条直线的两条直线互相平行. 公理 4 用符号表示如下：设 a、b、c 为直线，$a // b$，$c // b \Rightarrow a // c$. 公理 4 有着非常广泛的应用，要做到能灵活运用.

警示：公理 4 可以看做是由平面几何中的结论推广得到的，但在平面几何中成立的结论在立体几何中不是都成立，例如：在平面几何中，垂直于同一条直线的两条直线互相平行. 在立体几何中，这个结论是不成立的，这两条直线有可能相交，也可能异面. 一般来说，关于平面图形的结论若要推广到立体图形，必须经过证明.

【例 3】　如图 9-2-3，点 A 是 $\triangle BCD$ 所在平面外一点，M、N 分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 的重心，已知 $BD = 6$.（1）判断 MN 与 BD 的位置关系；（2）求 MN 的长.

解：（1）连结 AM、AN 并延长分别与 BC、CD 交于

点E和F,由重心定义知E、F分别为BC、CD的中点,连结EF.所以EF是$\triangle BCD$的中位线,所以$EF \underline{\parallel} \frac{1}{2}BD$.因为$M$、$N$分别为$\triangle ABC$和$\triangle ACD$的重心,所以$\frac{AM}{ME}=\frac{AN}{NF}=\frac{2}{1}$.所以$MN \parallel EF$且$MN=\frac{2}{3}EF$.由公理4,得$MN \parallel BD$.(2)因为$MN=\frac{2}{3}EF$,$EF=\frac{1}{2}BD$,所以$MN=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}BD=\frac{1}{3}BD=\frac{1}{3}\times 6=2$.则$MN$的长为2.

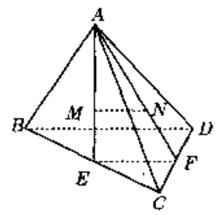


图9-2-3

点拨:从重心的定义出发,应用三角形重心的性质和公理4,从而找到MN与BD的位置关系.

知识点2针对性练习:

3.一条直线与两条平行线中的一条是异面直线,那么它与另一条的位置关系是(　　)

A.相交　　B.异面

C.相交或异面　　D.平行

4.如图9-2-4,E、F分别是长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱AA_1、CC_1的中点,求证:四边形B_1EDF是平行四边形. [N]

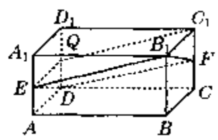


图9-2-4

知识点3:等角定理及其推论

详解:等角定理及其推论是由平面几何的结论推广到空间而得到的.理解、掌握这个定理及其推论应借助平面几何的结论类比地进行.理解并掌握它们对于理解异面直线所成角的定义以及后面将学习的二面角内容显得十分重要.

引申思考:如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行,那么这两个角的关系是_________.如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相反,那么这两个角的关系是_________.

结论分别为:相等或互补;相等.

【例4】 已知E、E_1分别是正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱AD、A_1D_1的中点,求证$\angle BEC=\angle B_1E_1C_1$.

证明:如图9-2-5,连结EE_1.则由已知得$AE \underline{\parallel} A_1E_1$.

所以四边形AEE_1A_1是平行四边形.所以$AA_1 \underline{\parallel} EE_1$.

又因为$AA_1 \underline{\parallel} BB_1$,所以$EE_1 \underline{\parallel} BB_1$.

所以四边形BEE_1B_1是平行四边形.所以$BE \parallel B_1E_1$.同理$CE \parallel C_1E_1$.

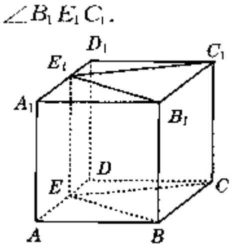


图9-2-5

又因为$\angle BEC$与$\angle B_1E_1C_1$的两边方向相同,所以$\angle BEC=\angle B_1E_1C_1$.

点拨:利用等角定理证明角相等是常见的方法.证明空间内两个角相等还有以下方法:(1)利用两个三角形全等;(2)利用两个三角形相似.

知识点3针对性练习:

5.一个角的两边和另一个角的两边分别平行是这两个角相等的(　　)

A.充分不必要条件

B.必要不充分条件

C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

6.如图9-2-6,在三棱锥$P-ABC$中,D、E、F分别是PA、PB、PC的中点,在$\triangle ABC$和$\triangle DEF$中,角一定相等的有(　　)

A.1对　　B.2对

C.3对　　D.4对

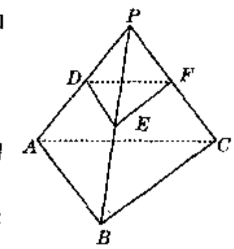


图9-2-6

知识点4:两条异面直线所成的角(这是重点、难点、热点)

详解:直线a、b是异面直线,经过空间任意一点O,作直线a'、b',并使$a' \parallel a$,$b' \parallel b$,则把直线a'和b'所成的锐角(或直角)叫做异面直线a和b所成的角.

两条异面直线所成的角定义是立体几何中的一个重要概念,是求两条异面直线所成角的依据和方法.两条异面直线所成的角是历年高考的热点之一,认真理解其定义至关重要.定义中过点O,作直线a、b的平行线必为相交直线,不重合.否则根据公理4推出异面直线a、b互相平行.点O是空间任意一点,无数种不同的O点选取方式,根据等角定理的推论可知,所作异面直线a、b的两组平行线分别所成的角相等.虽然说可以在空间任意选取,为了简便,点O都选在特殊位置,如点O选在直线a上.

由两条异面直线所成角的定义可知,两条异面直线所成角的范围是$\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$.

如果两条异面直线所成的角是直角,就说这两条异面直线互相垂直.异面直线a和b互相垂直,记作$a \perp b$.因此两条直线互相垂直时,这两条直线的位置关系有两种可能:相交或异面,也就是说,一条直线垂直于另一条直线,可能有垂足,也可能没有垂足.

【例5】 在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,E、F分别为AB、AD的中点,如图9-2-7,求EF与B_1C所成的角.

解:如图9-2-7,E、F分别为AB、AD的中点,则$EF \parallel BD$.

又因为$BD \parallel B_1D_1$,所以$EF \parallel B_1D_1$.

所以$\angle CB_1D_1$为异面直线EF与B_1C所成的角.

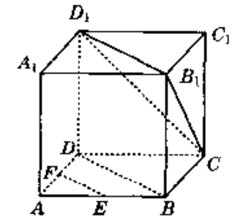


图9-2-7

在$\triangle B_1CD_1$中$B_1C=CD_1=B_1D_1$,所以$\angle CB_1D_1=60°$.

所以EF与B_1C所成的角为$60°$.

点拨:求异面直线所成的角的一般步骤是:(1)构造:根据异面直线所成角的定义,用平移法作出异面直线所成的角;(2)认定:证明作出的角就是要求的角;(3)计算:常利用三角形,求该角的某种三角函数值,表示出角;(4)写结论.也可以概括为"一作、二证、三计算".

【例6】 已知空间四边形$ABCD$中$AB=CD=3$,E、F分别是BC、AD上的点,并且$BE:EC=AF:FD=1:2$,$EF=\sqrt{7}$,如图9-2-8,求AB与CD所成角的大小. [N]

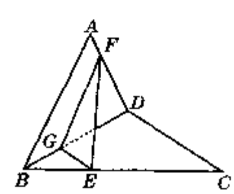


图9-2-8

解:如图9-2-8,连结BD,在BD上取点G,使$BG:GD=1:2$,连结EG、FG、EF.

$\triangle BCD$中,因为$\frac{BE}{EC}=\frac{BG}{GD}$,

所以$EG \parallel CD$.同理$FG \parallel AB$.

所以EG和FG所成的锐角(或直角)就是异面直线AB和CD所成的角.