北京航空学院

科学报告会论文集

庆祝建校三十周年

第八分册　数理类

1982.10

前　　言

建校三十年来，我院科研工作遵循党的方针政策，密切结合教学，取得不少成果，在此基础上，总结出了一批有一定理论价值与实践意义的学术论文。

战斗在祖国各地的校友们，在为实现我国四个现代化这一伟大历史任务的过程中，同样做出了可喜的成绩，此次他们热情响应母校三十周年校庆征稿的号召，把自己多年来从事教学、科研与工程技术实际工作中所积累起来的宝贵经验，进行理论总结，书写成文，投寄我院。

为隆重纪念我院三十周年校庆日，加强院内外的学术交流与联系，我处特编辑这套校庆论文集。文集刊载本院与校友近期科研成果或技术总结的详细文摘。为节省篇幅，在编辑时将作者原列参考文献删去。

论文按专题分类出版：

1. 材料科学与工程类
2. 无线电电子学类
3. 自动控制类
4. 发动机类
5. 飞行器与力学类
6. 计算机类、管理工程类、情报学类
7. 制造工程类
8. 数理类
9. 机械设计类
10. 医疗类、体育类
11. 社会科学类
12. 大学生论文集

由于编辑出版力量有限，时间也较仓促，难免有遗漏和不妥之处，欢迎批评指正。

北京航空学院　科研处

1 9 8 2 年10月

第八分册　数理类

目　　录

单变量最优化的样条函数法

应用数理系 王日爽 徐 兵

一、引 言

求解单变量最优化问题

$$(P) \qquad \min_{x} f(x) \quad 或 \quad \min_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$$

目前有种种方法，诸如二次插值法、三次插值法、*Fibonacci* 法等等。它们的基本想法无非是利用较低次多项式对目标函数进行逼近，或利用目标函数值的信息对目标函数的极小点进行估计。众所周知，当今，样条函数已证实是逼近函数或拟合曲线的强有力工具，本文旨在尝试用这种工具讨论上述问题的解法，姑且称之为样条函数法。这种算法，计算简单、易于使用，较之一般的多项式插值法更为有效，对于收敛性、稳定性有着明显的预测，并且更加充分地利用了目标函数所提供的信息。

我们首先给出$[a, b]$ $(a<b)$ 上的三个节点a、$(a+b)/2$、b的三次样条，它的表示式为

$$s(x)=\begin{cases} s_1(x)=M\dfrac{(x-a)^3}{3(b-a)}+f_0\dfrac{a+b-2x}{b-a}+2\left[f_{\frac{1}{2}}-\dfrac{M(b-a)^2}{24}\right]\dfrac{x-a}{b-a} \\ \qquad\qquad x\in[a,\ (a+b)/2] \\ s_2(x)=M\dfrac{(b-x)^3}{3(b-a)}+2\cdot\left[f_{\frac{1}{2}}-\dfrac{M(b-a)^2}{24}\right]\dfrac{b-x}{b-a}+f_1\dfrac{2x-(a+b)}{b-a} \\ \qquad\qquad x\in[(a+b)/2,\ b] \end{cases} \tag{1}$$

其中M是三次样条函数在 $x=(a+b)/2$ 处的二阶导数值，f_0、$f_{\frac{1}{2}}$、f_1 分别是$f(x)$ 在 $x=a$、$(a+b)/2$、b处的函数值。

由于考虑的是等距三次自然样条，所以M需满足

$$2M=6\cdot\frac{2(f_1-f_{\frac{1}{2}})/(b-a)-2(f_{\frac{1}{2}}-f_0)/(b-a)}{b-a}$$

即

$$M=\frac{6(f_1-2f_{\frac{1}{2}}+f_0)}{(b-a)^2} \tag{2}$$

式（1）的导数式为

$$
s'(x)=\begin{cases} s'_1(x)=M\dfrac{(x-a)^2}{b-a}+2\cdot\dfrac{f_{\frac{1}{2}}-f_0}{b-a}-\dfrac{M}{12}(b-a) \\ \qquad\qquad x\in[a,\ (a+b)/2] \\ s'_2(x)=-M\dfrac{(b-x)^2}{b-a}+2\cdot\dfrac{f_1-f_{\frac{1}{2}}}{b-a}+\dfrac{M}{12}(b-a) \\ \qquad\qquad x\in[(a+b/2,\ b] \end{cases} \tag{3}
$$

代入M的表达式幷经过简单计算可得

$$
s'_1\left(\frac{a+b}{2}\right)=s'_2\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{f_1-f_0}{b-a}
$$

有了这些准备，我们即可转入样条函数法的讨论。

二、方　法

我们总假定所考虑的目标函数具有以下性质：它在任意点处的二阶中心差商恒大于0，极易验证，这类函数是与严格凸函数类等价的；幷且我们还假定$f(x)$在初始区间$[a,b]$内部有一个极小值点，否则应该事先搜索出这一区间。对此讨论问题（P）的解，其方法步骤如下

1． 比较f_0与f_1，若

① $f_0<f_1$，则由式（3）可以断定，插值样条的极小值点必在 $[a,(a+b/2]$内，今以该区间的中点近似之，计算（或测定） $f_{\frac{1}{4}}=f\left(\dfrac{3a+b}{4}\right)$；

② $f_0>f_1$，则根据同样理由可知，极小值点应在$[(a+b)/2,\ b]$内，仍以此区间中点近似之，计算（或测定） $f_{\frac{3}{4}}=f\left(\dfrac{a+3b}{4}\right)$；

③ $f_0=f_1$，则需计算 $f_{\frac{1}{4}}$或 $f_{\frac{3}{4}}$，以便进一步决择。为简单，可将此情形归幷到情形①处理；

2． 在1中若①发生，则再比较 $f_{\frac{1}{4}}$与 $f_{\frac{1}{2}}$，当 $f_{\frac{1}{4}}<f_{\frac{1}{2}}$时，求解

$$
\min_{x\in[a,(a+b)/2]} f(x)
$$

否则，求解

$$
\min_{x\in[(3a+b)/4,b]} f(x)
$$

若②发生，则比较 $f_{\frac{1}{2}}$与 $f_{\frac{3}{4}}$，当 $f_{\frac{1}{2}}<f_{\frac{3}{4}}$ 时，求解

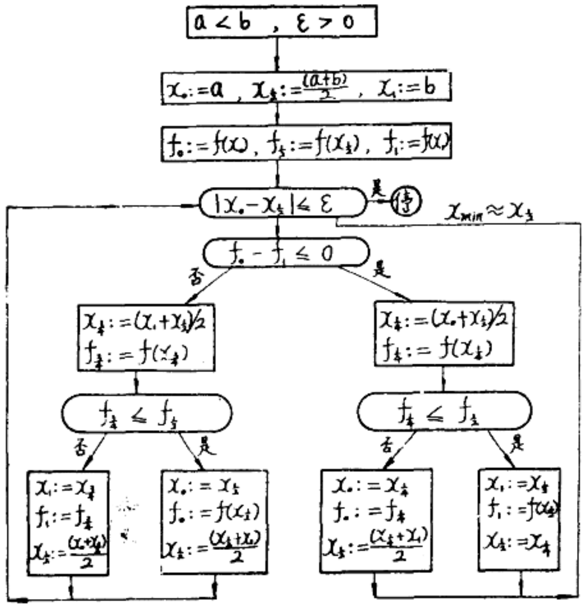
$$
\min_{x\in[a,(a+3b)/4]} f(x)
$$

否则求解

$$\min_{x \in [(a+b)/2,\, b]} f(x)$$

3. 对于2中提出的最优化问题仿上重复1的讨论，直至得到满意的解为止。其细节由下面的框图中给出。

其计算框图如下：



三、注　　記

1. 方法的说明：有必要指出，对于单变量优化问题的开始阶段，往往利用“0.618”法或 *Fibonacci* 法进行搜索。而当搜索区间[a , b]较小时，前述两种方法搜索速度开始减慢，再利用样条函数法，则较为有利。因此，通常的方法应是这种混合程式。

另外二中的方法有一点是应该说明的，这就是在确定了插值样条的极小值点所在区间之后，我们总是以该区间的中点取而代之的，这样就避免了求解方程的麻烦工作。当然，也可以不这样做，而具体求出这个极小点。

2. 误差的估计：上述方法不仅对最优解有着明显的误差估计，而且对最优值也有着确切的估计。前者是随计算（或测定）目标函数值的次数而定的，以迭代最后的区间长度来衡量的，其每一次迭代使得区间的缩短率不低于3/4；至于后者，根据样条的误差估计，可有

$$f(x)-s(x)=O\left(\frac{h}{2}\right)$$

这里 h 是迭代最终区间的长度。如果$f(x)\in C^2[a, b]$，那么进而还有

$$f(x)-s(x)=O\left(\frac{h^2}{4}\right)$$

这里 h 同样是最终区间的长度。

3. 利用插值样条对单变量最优化问题的解法，远不仅限于此，例如，对带其它边界条件的讨论，对二次保凸样条的讨论，还可以考虑分批计算（或测定）目标函数值的样条插值方法（但这时应注意插值样条曲线的保凸性）以及利用双三次样条考虑二维最优化问题等等。

线性常微分方程
初始值问题的“基本解”法

应用数理系　成如翼

一、基本解的定义

设

$$L[u]=\sum_{i=0}^{n}a_i(x)u^{(n-i)}(x)=0$$

其中 a_i 在所论的区间内连续，且有在以后各式中出现的各阶的连续导数，$a_0>0$。其共轭方程为

$$L^*[v]=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}(a_iv)^{(n-i)}=0$$

定义 1

方程$L_\xi[u]=0$的基本解$v(\xi,\eta)$满足下列条件

$$\begin{cases} L_\xi^*[v]=0 \\ v(\xi,\eta)|_{\xi=\eta}=v'_\xi(\xi,\eta)|_{\xi=\eta}=\cdots\cdots=v_\xi^{(n-2)}(\xi,\eta)|_{\xi=\eta}=0 \\ \lim\limits_{\xi\to\eta\pm0}v_\xi^{(n-1)}(\xi,\ \eta)=\pm\dfrac{1}{a_0(\eta)} \end{cases}$$

定义 2

方程$L_\xi^*[v]=0$的基本解$u(\xi,\ \eta)$满足下列条件

$$\begin{cases} L_\xi[u]=0 \\ u(\xi,\ \eta)|_{\xi=\eta}=u'_\xi(\xi,\ \eta)|_{\xi=\eta}=\cdots\cdots=u_\xi^{(n-2)}(\xi,\ \eta)|_{\xi=\eta}=0 \\ \lim\limits_{\xi\to\eta\pm0}u_\xi^{(n-1)}(\xi,\ \eta)=\pm\dfrac{1}{a_0(\eta)} \end{cases}$$

二、Cauchy 公式

利用方程$L[u]=0$的基本解可以给出关于方程 $L[u]=f(x)$ 的 *Cauchy* 问题解的表达式。

定理

设 $f(x)$ 为连续函数，x_0 为所论的区间内的任一点，u_0、u_1、……、u_{n-1} 为任意实数，则 *Cauchy* 问题

$$\begin{cases} L[u]=f(x) \\ u|_{x=x_0}=u_0\ ,\quad u'|_{x=x_0}=u_1,\ \cdots\cdots,\ u^{(n-1)}|_{x=x_0}=u_{n-1} \end{cases}$$

有唯一解，其表达式为

$$u(x)=(-1)^n sgn(x-x_0)\left\{\sum_{j=0}^{n-1}u_j\left[\sum_{i=0}^{n-j-1}(-1)^{n-i-j-1}(a_i v)_{x_0}^{(n-i-j-1)}\right]\right.$$

$$\left.+\int_{x_0}^{x}v(t,\ x)f(t)dt\right\}$$

其中 v 是方程 $L[u]=0$ 的基本解，

$$(a_i v)_{x_0}^{(n-i-j-1)}=\frac{\partial^{n-i-j-1}}{\partial x_0^{n-i-j-1}}[a_i(x_0)v(x_0,x)]$$

三、　例

Cauchy 公式中，函数 $f(t)$ 的物理意义是源强度，基本解 $v(t,\ x)$ 的物理意义是在初始条件下由于 t 时刻受到单位强度的源的作用而对于 x 时刻的影响。在力学和工程实际问题中往往用基本解表示所得结果，它有明显的物理意义，便于应用。在数学上应用 *Cauchy* 公式将使原 *Cauchy* 问题转化为基本解的 *Cauchy* 问题。现举例将它和通常的解法作一比较。

例 1　求解

$$\begin{cases} y'+y=x & (1) \\ y|_{x=0}=1 & (2) \end{cases}$$

通常解法得

$$y=2e^{-x}+x-1$$

现应用 *Cauchy* 公式重解本例。方程（1）的对应齐次方程为

$$L_t[y]=y'+y=0$$

其基本解 $v(t,\ x)$ 满足下列 *Cauchy* 问题

$$\begin{cases} L^*[v]=-v_t'+v=0 & (3) \\ \lim\limits_{t\to x\pm 0} v(t,\ x)=\pm 1 & (4) \end{cases}$$

方程（3）的通解为

$$v=ce^t$$

将上式代入（4）式，并解得

$$c=\pm e^{-x}$$

$$\therefore \qquad v(t,\ x)=\pm e^{t-x}$$

当 $x<t<0$ 时，上式取正号；当 $0<t<x$ 时，上式取负号。

据 *Cauchy* 公式，则

$$y=-sgn(x)\left[v(0,\ x)+\int_0^x tv(t,\ x)dt\right]$$

$$=-sgn(x)\left[\pm e^{-x}\pm\int_0^x te^{t-x}dt\right]$$

$$=e^{-x}+\int_0^x te^{t-x}dt=2e^{-x}+x-1$$

两种解法所得结果完全相同。

例2　求解

$$\begin{cases} y''-y=4xe^x & (1)\\ y|_{x=0}=1,\quad y'|_{x=0}=0 & (2)\end{cases}$$

通常解法得

$$y=(x^2-x+1)e^x$$

现应用 *Cauchy* 公式重解本例。方程（1）的对应齐次方程的基本解 $v(t,\ x)$ 满足下列 *Cauchy* 问题

$$\begin{cases} L^*[v]=v''_t-v=0 & (3)\\ v(t,\ x)|_{t=x}=0 & (4)\\ \lim\limits_{t\to x\pm0} v'_t(t,\ x)=\pm1 & (5)\end{cases}$$

方程（3）的通解为

$$v=c_1e^t+c_2e^{-t}$$

将上式代入（4）、（5）式，并解得

$$c_1=\pm\frac{e^{-x}}{2},\qquad c_2=\mp\frac{e^x}{2}$$

$$\therefore \qquad v(t,\ x)=\pm\frac{1}{2}[e^{t-x}-e^{-(t-x)}]$$

当 $x<t<0$ 时，上式取正号；当 $0<t<x$ 时，上式取负号。

据 *Cauchy* 公式，则

$$y=sgn(x)\left\{-\left[\pm\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\right]\pm2\int_0^x te^t[e^{t-x}-e^{-(t-x)}]dt\right\}$$

$$=\pm sgn(x)\left[-\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})+2\int_0^x t(e^{2t-x}-e^x)dt\right]$$

$$=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})-2\int_0^x t(e^{2t-x}-e^x)dt=(x^2-x+1)e^x$$

两种解法所得结果完全相同。

例3　求解

$$\begin{cases} x^3y'''+x^2y''+xy'-y=x \quad , \qquad (x>0) & (1)\\ y|_{x=1}=1 \quad , \quad y'|_{x=1}=y''|_{x=1}=0 & (2)\end{cases}$$

通常解法得

$$y=x\ln x+\sqrt{\frac{x}{3}}\left(\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x-\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)$$

现应用 *Cauchy* 公式重解本例。方程（1）的对应齐次方程为

$$L_t[y]=t^3y'''+t^2y''+ty'-y=0$$

其基本解$v(t,\ x)$满足下列 *Cauchy* 问题

$$\begin{cases} L^*[v]=-(t^3v)'''_t+(t^2v)''_t-(tv)'_t-v=0 & (3)\\ v(t,\ x)|_{t=x}=v'_t(t,\ x)|_{t=x}=0 & (4)\\ \lim\limits_{t\to x\pm0} v''_t(t,\ x)=\pm\frac{1}{x^3} & (5)\end{cases}$$

方程（3）即为

$$t^3v'''_t+8t^2v''_t+15tv'_t+6v=0$$

其通解为

$$v=c_1t^{-2}+t^{-3/2}\left(c_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\ln t+c_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\ln t\right)$$

将上式代入（4）、（5）式，并解得

$$c_1=\pm x$$

$$c_2=\mp\sqrt{\frac{x}{3}}\left(\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x+\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)$$

$$c_3=\pm\sqrt{\frac{x}{3}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x-\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)$$

$$\therefore \qquad v(t,\ x)=\pm\left[\frac{x}{t^2}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3}\,t^{3/2}}\left(\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\frac{t}{x}-\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\frac{t}{x}\right)\right]$$

当$x<t<1$时，上式取正号；当$1<t<x$时，上式取负号。

据 *Cauchy* 公式，则

$$y=-sgn(x-1)\{[t^3v(t,\ x)]''_t|_{t=1}-[t^2v(t,\ x)]'_t|_{t=1}$$

$$+[tv(t,\ x)]_{t=1}+\int_1^x tv(t,\ x)dt\}$$

$$=-sgn(x-1)\left\{\pm x\pm\int_1^x\left[\frac{x}{t}+\sqrt{\frac{x}{3t}}\left(\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\frac{t}{x}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\frac{t}{x}\right)\right]dt\right\}=x+\int_1^x\left[\frac{x}{t}\right.$$

$$\left.+\sqrt{\frac{x}{3t}}\left(\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\frac{t}{x}-\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\frac{t}{x}\right)\right]dt$$

$$=x\ln x+\sqrt{\frac{x}{3}}\left(\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x-\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)$$

其中用分部积分得

$$\int_1^x\frac{1}{\sqrt{t}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\frac{t}{x}dt=\frac{1}{2}\left(-\sqrt{3x}\right.$$

$$\left.+\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x+\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)$$

$$\int_1^x\frac{1}{\sqrt{t}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\frac{t}{x}dt=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}\right.$$

$$\left.+\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)$$

两种解法所得结果完全相同。

例 4　求解

$$\begin{cases} y^{(4)}-y=0 & (1)\\ y|_{x=0}=1\ ,\quad y'|_{x=0}=y''|_{x=0}=y'''|_{x=0}=0 & (2)\end{cases}$$

通常解法得

$$y=\frac{1}{4}(e^x+e^{-x}+2\cos x)$$

现应用 *Cauchy* 公式重解本例。方程（1）的基本解$v(t,\ x)$满足下列 *Cauchy* 问题

$$
\begin{cases}
L^*[v]=v_t^{(4)}-v=0 & (3)\\
v(t,\ x)|_{t=x}=v_t'(t,\ x)|_{t=x}=v_t''(t,\ x)|_{t=x}=0 & (4)\\
\lim\limits_{t\to x\pm 0} v_t'''(t,\ x)=\pm 1 & (5)
\end{cases}
$$

方程（3）的通解为

$$v=c_1e^t+c_2e^{-t}+c_3\cos t+c_4\sin t$$

将上式代入（4）、（5）式，并解得

$$c_1=\pm\frac{e^{-x}}{4}\quad,\qquad c_2=\mp\frac{e^x}{4}$$

$$c_3=\pm\frac{\sin x}{2}\quad,\qquad c_4=\mp\frac{\cos x}{2}$$

$$\therefore\qquad v(t,\ x)=\pm\frac{1}{4}[e^{t-x}-e^{-(t-x)}-2\sin(t-x)]$$

当$x<t<0$时，上式取正号；当$0<t<x$时，上式取负号。

据 *Cauchy* 公式，则

$$y=sgn(x)[-v_t'''(0,\ x)]=-sgn(x)\left[\pm\frac{1}{4}(e^x+e^{-x}+2\cos x)\right]$$

$$=\frac{1}{4}(e^x+e^{-x}+2\cos x)$$

两种解法所得结果完全相同。

四、附　　录

以三阶线性常微分方程为例给出 *Cauchy* 公式的证明。

设

$$L[u]=\sum_{i=0}^{3}a_i(x)u^{(3-i)}(x)=0 \tag{1}$$

其共轭方程为

$$L^*[v]=\sum_{i=0}^{3}(-1)^{3-i}(a_iv)^{(3-i)}=0 \tag{2}$$

方程 $L_\xi[u]=0$ 的基本解 $v(\xi,\ \eta)$ 满足下列 *Cauchy* 问题

$$
\begin{cases}
L_\xi^*[v]=0\\
v(\xi,\ \eta)|_{\xi=\eta}=v_\xi'(\xi,\ \eta)|_{\xi=\eta}=0\\
\lim\limits_{\xi\to\eta\pm 0} v_\xi''(\xi,\ \eta)=\pm\dfrac{1}{a_0(\eta)}
\end{cases}
\tag{3}
$$

方程$L^*_\xi[v]=0$的基本解$u(\xi,\eta)$满足下列Cauchy问题

$$\begin{cases} L_\xi[u]=0 \\ u(\xi,\eta)|_{\xi=\eta}=u'_\xi(\xi,\eta)|_{\xi=\eta}=0 \\ \lim\limits_{\xi\to\eta\pm 0} u''_\xi(\xi,\eta)=\pm\dfrac{1}{a_0(\eta)} \end{cases} \tag{4}$$

定理1

若x_0、x为所论的区间内的任意两点，则

$$v(x,x_0)=-u(x_0,x) \tag{5}$$

证：设$x_0<t<x$，对于$v(t,x_0)$、$u(t,x)$利用分部积分，并由（3）、（4）式得

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x}\{uL^*[v]-vL[u]\}dt &= \int_{x_0}^{x}\left\{\sum_{i=0}^{3}[(-1)^{3-i}u(a_iv)^{(3-i)}\right.\\ &\quad \left.-a_iu^{(3-i)}v]\right\}dt\\ &=-\left\{\sum_{j=0}^{2}u^{(j)}\left[\sum_{i=0}^{2-j}(-1)^{2-i-j}(a_iv)^{(2-i-j)}\right]\right\}\Bigg|_{x_0}^{x}\\ &=u(x_0,x)a_0(x_0)v''_t(x_0^+,x_0)-u''_t(x^-,x)a_0(x_0)v(x,x_0)\\ &=u(x_0,x)+v(x,x_0)\end{aligned}$$

其中

$$v''_t(x_0^+,x_0)=\lim_{t\to x_0+0}v''_t(t,x_0)$$

$$u''_t(x^-,x)=\lim_{t\to x-0}u''_t(t,x)$$

而

$$\int_{x_0}^{x}\{uL^*[v]-vL[u]\}dt=0$$

∴

$$v(x,x_0)=-u(x_0,x)$$

同理可证当$x<t<x_0$时，（5）式成立。于是

$$\begin{cases} L_\eta[v]=0 \\ v(\xi,\eta)|_{\eta=\xi}=v'_\eta(\xi,\eta)|_{\eta=\xi}=0 \\ \lim\limits_{\eta\to\xi\pm 0} v''_\eta(\xi,\eta)=\mp\dfrac{1}{a_0(\xi)} \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} L_\eta^*[u]=0 \\ u(\xi,\eta)|_{\eta=\xi}=u'_\eta(\xi,\eta)|_{\eta=\xi}=0 \\ \lim\limits_{\eta\to\xi\pm 0} u''_\eta(\xi,\eta)=\mp\dfrac{1}{a_0(\xi)} \end{cases} \tag{7}$$

定理 2

若$v(\xi,\eta)$是方程$L_\xi[u]=0$的基本解，则

1. $$\lim_{\eta\to\xi\pm 0} v''_\xi(\xi,\eta)=\mp\frac{1}{a_0(\xi)} \tag{8}$$

2. $$\lim_{\xi\to\eta\pm 0} v''_\eta(\xi,\eta)=\pm\frac{1}{a_0(\eta)} \tag{9}$$

3. $$\lim_{\eta\to\xi\pm 0} v''_{\xi\eta}(\xi,\eta)=\pm\frac{1}{a_0(\xi)} \tag{10}$$

4. $$\lim_{\eta\to\xi\pm 0} v'''_\xi(\xi,\eta)=\pm\frac{3a'_0(\xi)-a_1(\xi)}{[a_0(\xi)]^2} \tag{11}$$

5. $$\lim_{\eta\to\xi\pm 0} \frac{\partial^3 v(\xi,\eta)}{\partial\xi^2\partial\eta}=\mp\frac{2a'_0(\xi)-a_1(\xi)}{[a_0(\xi)]^2} \tag{12}$$

6. $$\lim_{\eta\to\xi\pm 0} \frac{\partial^3 v(\xi,\eta)}{\partial\xi\partial\eta^2}=\pm\frac{a'_0(\xi)-a_1(\xi)}{[a_0(\xi)]^2} \tag{13}$$

7. $$\lim_{\eta\to\xi\pm 0} v^{(4)}_\xi(\xi,\eta)=-\frac{1}{a_0(\xi)}\{[4a'_0(\xi)-a_1(\xi)]v'''_\xi(\xi,\xi^\pm)+[6a''_0(\xi)-3a'_1(\xi)+a_2(\xi)]v''_\xi(\xi,\xi^\pm)\} \tag{14}$$

8. $$\lim_{\eta\to\xi\pm 0} \frac{\partial^4 v(\xi,\eta)}{\partial\xi^3\partial\eta}=\pm\frac{1}{[a_0(\xi)]^3}\{a_0(\xi)[3a''_0(\xi)-a'_1(\xi)]-2a'_0(\xi)[3a'_0(\xi)-a_1(\xi)]\}-v^{(4)}_\xi(\xi,\xi^\pm) \tag{15}$$

9. $$\lim_{\eta\to\xi\pm 0} \frac{\partial^4 v(\xi,\eta)}{\partial\xi^2\partial\eta^2}=\mp\frac{1}{[a_0(\xi)]^3}\{a_0(\xi)[5a''_0(\xi)-2a'_1(\xi)]-2a'_0(\xi)[5a'_0(\xi)-2a_1(\xi)]\}+v^{(4)}_\xi(\xi,\xi^\pm) \tag{16}$$

证：1. 由（3）式得

$$v''_\xi(\eta^\mp,\eta)=\lim_{\xi\to\eta\mp 0} v''_\xi(\xi,\eta)=\mp\frac{1}{a_0(\eta)}$$

取 $\eta=\xi$ 得

$$v''_\xi(\xi^\mp,\xi)=\mp\frac{1}{a_0(\xi)}$$

$$\therefore \qquad \lim_{\eta\to\xi\pm0} v''_{\xi}(\xi,\ \eta)=v''_{\xi}(\xi,\ \xi^{\pm})=v''_{\xi}(\xi^{\mp},\ \xi)=\mp\frac{1}{a_0(\xi)}$$

2. 由（6）式得

$$v''_{\eta}(\xi,\ \xi^{\mp})=\lim_{\eta\to\xi\mp0} v''_{\eta}(\xi,\ \eta)=\pm\frac{1}{a_0(\xi)}$$

取 $\xi=\eta$ 得

$$v''_{\eta}(\eta,\ \eta^{\mp})=\pm\frac{1}{a_0(\eta)}$$

$$\therefore \qquad \lim_{\xi\to\eta\pm0} v''_{\eta}(\xi,\ \eta)=v''_{\eta}(\eta^{\pm},\ \eta)=v''_{\eta}(\eta,\ \eta^{\mp})=\pm\frac{1}{a_0(\eta)}$$

3. 由（3）式得

$$v'_{\xi}(\eta^{\mp},\ \eta)=0$$

取 $\eta=\xi$ 得

$$v'_{\xi}(\xi,\ \xi^{\pm})=v'_{\xi}(\xi^{\mp},\ \xi)=0 \tag{17}$$

将（17）式两端对ξ求导得

$$\frac{d}{d\xi}v'_{\xi}(\xi,\ \xi^{\pm})=0$$

即

$$v''_{\xi\eta}(\xi,\ \xi^{\pm})+v''_{\xi}(\xi,\ \xi^{\pm})=0$$

据（8）式，则

$$\lim_{\eta\to\xi\pm0} v''_{\xi\eta}(\xi,\ \eta)=\pm\frac{1}{a_0(\xi)}$$

4. 由（6）式得

$$v(\xi,\ \xi^{\pm})=0 \tag{18}$$

由（3）式得

$$\sum_{i=0}^{3}(-1)^{3-i}(a_iv)_{\xi}^{(3-i)}=\sum_{i=0}^{3}\sum_{l=0}^{3-i}(-1)^{3-i}C_{3-i}^{l}a_i^{(l)}(\xi)v_{\xi}^{(3-i-l)}(\xi,\ \eta)=0$$

令$\eta\to\xi\pm0$，由（17）、（18）式得

$$-a_0v'''_{\xi}(\xi,\ \xi^{\pm})-(3a'_0-a_1)v''_{\xi}(\xi,\ \xi^{\pm})=0$$

则

$$\lim_{\eta\to\xi\pm0} v'''_{\xi}(\xi,\eta)=\pm\frac{3a'_0(\xi)-a_1(\xi)}{[a_0(\xi)]^2}$$