高等工程专科学校教材

概率与数理统计

修订本

刘智庆 吕本吉 编

华中理工大学出版社

概率与数理统计

刘智庆　吕本吉　编

华中理工大学出版社

(鄂)新登字第10号

图书在版编目(CIP)数据

概率与数理统计/刘智庆,吕本吉编 -2版(修订本) —武汉:
华中理工大学出版社,1995年1月

ISBN 7-5609-0356-8

Ⅰ.概…

Ⅱ.①刘… ②吕…

Ⅲ.①概率论 ②数理统计

Ⅳ.021

概率与数理统计

刘智庆 吕本吉

责任编辑 龙纯曼

*

华中理工大学出版社出版发行

(武昌喻家山 邮编:430074)

新华书店湖北发行所经销

华中理工大学出版社沔阳印刷厂印刷

*

开本:787×1092 1/32 印张:9 字数:

1995年1月第2版 1995年1月第6次印刷

印数:23 001—28 000

定价:5.50元

ISBN 7-5609-0356-8/O·58

序

十年来，我国的高等教育事业蓬勃发展，尤其是高等专科教育的发展更为迅速．为了进一步提高教学质量，急需编写、出版适合专科教学要求的教材．教材是师生进行教学活动的重要依据，决定着课程甚至专业的教学水平和教学效果．因此切实搞好教材建设，使专科学校的教材能充分体现专科的培养目标，符合教学大纲与教学计划的要求，是当前专科学校深化教学改革中的一项十分重要而又紧迫的工作．

各高等专科学校为了适应教学需要，根据专科的特点和教学要求，自编了部分教材或讲义，在一定程度上克服了长期使用本科教材因而难以体现专科特点的弊病．为了进一步提高教材编写和出版的质量，在国家教委的支持下，在华中理工大学出版社的积极倡导下，沈阳冶金机械专科学校、郑州机械专科学校、哈尔滨机电专科学校和湖南省轻工业专科学校等14所专科学校，于1987年5月成立了“东北、华中地区高等工程专科学校教材协调委员会”，组织和协调有关工程专科学校的教材编写工作．

经参加“协调委员会”的各校负责同志的协商，决定首先编写一套适用面较广的教材，并由各校组织学术水平较高、教学经验丰富的教师分工合作，进行编写．由于参加编写教材的教师的共同努力，以及华中理工大学出版社的大力支持，现已编写好了一套适用于高等工程专科学校的教材，它们是高等数学、线性代数、概率与数理统计、大专物理、理论力学、材料

力学、工程力学、电工与电子技术、金属热加工、工程材料、机械原理、机械设计和机制工艺学．这些教材将由华中理工大学出版社陆续分批出版．

这套教材是在认真分析了十年来使用的国内外高校教材、自编讲义和较系统地总结了多年的教学经验的基础上编写出来的，因此较好地体现了专科特点，符合一般专科教学计划和教学大纲的要求，适合全日制高等工程专科学校以及夜大、职大、函大的工程专科班使用．

这套教材的特点是，符合专科培养目标，内容的深度、广度适当，突出理论联系实际，注意知识的应用和学生能力的培养，适当介绍与反映了现代科学技术的新成就．这套教材不仅具有专科的特色和富于启发性，而且文字简练，结构严谨，插图清晰，是目前比较理想的专科教材，希望推广使用．

由于编写高等工程专科教材是一项新的工作，很多问题尚在探索之中，加之水平有限，编写时间较短，书中难免存在缺点和错误．殷切希望使用本教材的教师和广大读者批评指正．

东北、华中地区高等工程专科学校

教材协调委员会主任　于勤兹

于1988年5月

第二版序言

本书第一版出版后，我们经过几年的教学实践，并吸收了读者的意见，在此基础上对第一版进行了修改和补充．修改了若干不当之处，在文字的叙述上作了些改进，力图将概念写得清晰易懂，以便于教学和读者的阅读．例题和习题的配置也有变动，特别是数理统计部分（第五章至第八章）的习题数量有所增加．

由于编者水平有限，本版中还会有不少错误和不当之处，希望读者批评指正．

编　者

1994 年 5 月

前　言

1987年4月在华中理工大学出版社召开的教材会议上，根据大专学校的迫切要求，成立了东北、华中地区教材编写协调委员会，确定编写具有专科特色的工科性质的专科学校教材. 1987年7月在沈阳冶金机械专科学校组织了数学教材编写组，邀请了东北、华中地区部分专科学校有关教师参加，会上决定先编写"高等数学""线性代数""概率与数理统计"等课程的教材，并首次讨论了编写大纲和分工问题.

本书是其中的概率与数理统计课程的教材. 全书较系统地介绍了概率论的基本知识与数理统计中最常用的方法，对书中一些基本概念、公式和定理，力求从具体到一般，在概念的引入与叙述上强调实际背景与现实意义，重视从实际问题抽象出数理模型，不深求理论的细密与严格而侧重于应用. 各章都附有习题，书后附有各种附表和习题答案. 本书还为学过BASIC语言的读者编写了方差分析、回归分析的BASIC程序以供使用.

本书总学时为44～54学时，有"*"号部分，可供不同类型专业选用，如果学时数较少"*"部分可以不讲.

本书概率部分由吕本吉编写，刘智庆编写数理统计部分并统稿. 黄进阳副教授担任本书的主审，林柯、沈恩秀、李守杰同志也参加了本书的审稿工作，在此特表示感谢.

限于编者水平，难免会有不妥和错误，请读者批评指正.

编者

1988年

目 录

第一章　随机事件及其概率

§1.1　随机事件与样本空间

一、随机现象

在客观世界里，存在着各种各样的现象，其中一类是在一定条件下必然出现某种结果的，称这类现象为**确定性现象**. 例如，在标准大气压下，水加热到 100℃必然沸腾；向上抛一个石子一定下落等等. 另一类现象是在一定条件下可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，而且预先不能确定出现哪种结果，这一类现象称为**随机现象**. 例如，一战士在一定条件下向靶子射击，但是命中的环数事先不能确定，一次射击可能命中“0 环”（脱靶），“1 环”，…，“10 环”；向桌面上投掷一枚硬币，可能正面向上，也可能反面向上，在投掷前不能断言哪一面向上；一个火车站在一天内接待旅客的人数预先不能确定，等等.

在一次观察中，随机现象某一结果的出现是偶然的，但是，在相同条件下，对随机现象进行大量重复观察，就会发现它的各种结果的出现具有规律性. 例如，重复投掷一枚均匀的硬币，“正面向上”大致有半数. 概率论与数理统计就是研究随机现象客观规律性的一门数学学科.

二、随机试验与随机事件

我们是通过试验来研究随机现象的. 对在一定条件下发生的现象的观察过程称为**试验**. 条件实现一次就是一次试验. 如果一个试验具有下述特点：

(1) 它可以在相同条件下重复进行；

(2) 每次试验可能出现不同的结果，究竟会出现哪一个结果事先不能预言；

(3) 试验中一切可能的结果是事先已知的.

称该试验为**随机试验**，简称**试验**.

由于随机试验的对象实际上是随机现象，所以，今后把随机现象的结果也称为随机试验的结果.

在随机试验中，可能出现也可能不出现的结果称为**随机事件**，简称**事件**，用大写的英文字母 A，B，…表示. 例如在掷硬币这个随机试验中，由于可能“正面向上”，也可能不“正面向上”，所以“正面向上”是一个随机事件，可以用 A 表示，记为 $A=\{$正面向上$\}$. 又如在向靶射击一次的随机试验中，“命中 7 环以上”也是一个随机事件，记为 $B=\{$命中 7 环以上$\}$. 再如，从含有一定数量次品的一批产品中，任意抽取 3 件是一个随机试验，“次品不超过两件”是该试验的一个随机事件，记为 $C=\{$次品不超过两件$\}$.

在随机试验中，必然出现的结果称为**必然事件**，用字母 Ω 表示；不可能出现的结果称为**不可能事件**，用字母 $\varnothing$ 表示. 例如，向靶射击一次，“命中的环数不超过 10”是必然事件，“命中的环数小于 0”是不可能事件. 实际上，必然事件与不可能事件都没有随机性，但是为了研究方便，也把它们看作特殊的随机事件.

三、样本空间

随机试验中，每一个可能出现的最简单（不能再分）的结果，称为**基本事件**. 全体基本事件的集合称为**样本空间**，用 Ω 表示.

例 1 某战士向靶射击一次，观察命中的环数. 若用 ω_i 表示命中第 i 环（$i=0,1,2,\cdots,10$），且把 ω_i 作为基本事件，则该试验的样本空间为

$$\Omega_1=\{\omega_0,\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{10}\}.$$

例 2 有 4 件产品，其中 3 件正品（记作 a_1,a_2,a_3），1 件次品（记作 b）. 从中任取两件，观察次品出现的情况. 具体取出两件产品是一个试验，可以将任意取出的两件产品的组合作为基本事件，该试验的样本空间为

$$\Omega_3=\{(a_1,a_2),(a_1,a_3),(a_1,b),(a_2,a_3),(a_2,b),(a_3,b)\}.$$

例 3 观察某电话交换台一分钟内接到的呼唤次数. 把每一个可能的呼唤次数作为一个基本事件，由于难于确定呼唤次数的上界，所以认为每一个非负整数都是一个基本事件，故该试验的样本空间为

$$\Omega_4=\{0,1,2,\cdots\}.$$

这是一个无穷样本空间（即有无穷多个基本事件，并且这些基本事件可以按照某种次序排列起来）.

研究具体的随机试验，应根据试验的条件和观察的目的，明确什么是最简单结果，即什么是基本事件，从而确定样本空间.

由于样本空间是全体基本事件的集合，于是可以用集合的理论来研究随机事件，这样作会带来很多方便.

任一事件都可以用基本事件的集合来表示. 例如，在例 1 中，考虑事件 $A=\{$命中 3 至 5 环$\}$，仅当试验中三个基本事件

$\omega_3, \omega_4, \omega_5$ 中某一个出现时 A 才发生，于是可以认为 A 是由基本事件 $\omega_3, \omega_4, \omega_5$ 组成的集合，即 $A=\{\omega_3, \omega_4, \omega_5\}$.

定义 样本空间的子集称为随机事件.

一个随机事件当且仅当它所包含的某个基本事件出现时它才发生. 例如，在例 2 中，若事件 $C=\{$两件都是正品$\}$，则 $C=\{(a_1,a_2),(a_1,a_3),(a_2,a_3)\}$是 Ω_3 的子集；若事件 $D=\{$恰有一件正品$\}$，则 $D=\{(a_1,b),(a_2,b),(a_3,b)\}$也是 Ω_3 的子集. 在例 3 中，事件 $C=\{$呼唤次数不超过 20$\}$，则 $C=\{n \mid 0 \leqslant n \leqslant 20, n \in N\}$ 是 Ω_4 的子集.

样本空间 Ω 本身也是一个事件，且为必然事件，这是因为 Ω 包含了全部基本事件，故每次试验 Ω 必然发生. 由于空集不包含任何基本事件，因而，在每次试验中它都不能发生，故空集作为事件是不可能事件$\varnothing$.

§1.2 随机事件的概率

一、概率的统计定义

在一次试验中，虽然不能预言某一随机事件能否发生，但是，可以知道它发生可能性的大小. 在相同条件下作大量重复的试验，就会发现有的事件发生的次数多，而有的事件发生的次数少. 有理由认为，发生次数多的事件在一次试验中发生的可能性大，而发生次数少的事件在一次试验中发生的可能性小. 例如，在相同条件下，甲、乙两名射手分别向同一目标射击 100 次，他们分别命中 80 次和 30 次. 显然，在一次射击中，甲命中目标的可能性比乙大. 那么如何度量一随机事件在一次试验中发生可能性的大小呢？这正是概率论的根本任务.

设事件 A 在 n 次试验中发生了 m 次，则 m 叫做 A 的**频数**，

比值 m/n 称为 n 次试验中事件 A 发生的**频率**，记作 $W(A)$，即

$$W(A)=\frac{m}{n}.$$

例如，在 100 次射击中，事件 $A=\{$甲命中目标$\}$的频数 $m_1=80$，A 发生的频率 $W(A)=0.8$. 同理，事件 $B=\{$乙命中目标$\}$的频数 $m_2=30$，频率 $W(B)=0.3$.

可见，随机事件的频率近似地反映了该事件在一次试验中发生可能性的大小．

显然，在 n 次试验中，任一事件的频数介于 0 与 n 之间，必然事件的频数为 n，不可能事件的频数为 0，所以频率有下列性质：

(1) $0\leqslant W(A)\leqslant 1$;

(2) $W(\Omega)=1$;

(3) $W(\varnothing)=0$.

为了揭示隐藏在随机现象中的规律性，有人做过重复投掷硬币的试验，其结果记录如表 1-1：

表 1-1

实验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	m	W	m	W	m	W
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

其中 n 为试验的次数，m 为事件 $A=\{$正面向上$\}$的频数，W 为 A 的频率.

从表中可以看出，在 n 次重复试验中，事件 A 的频率虽然不尽相同，但是，它们却在一个固定的常数 p（本例为 0.5）附近摆动，随着试验次数 n 的增加，摆动的幅度越来越小，即频率稳定于常数 p. 人类大量的科学研究和生产实践反复证明，并为大数定律[参看（4-22）式]严格证明，该常数 p 是客观存在的，它科学地反映了随机事件发生可能性的大小.

概率的统计定义　在相同条件下进行的大量重复试验中，如果随着试验次数的增加，事件 A 的频率 $W(A)$稳定于某常数 p，则称数 p 为事件 A 的**概率**，记为 $P(A)$，即 $P(A)=p$.

因为概率是频率的稳定值，故由频率的性质可得概率的性质：

(1) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2) $P(\Omega)=1$；

(3) $P(\varnothing)=0$.

二、古典概型

现在来研究一类既简单又常见的随机试验. 例如，一枚硬币掷一次，样本空间 $\Omega=\{+,-\}$ 只有两个基本事件. 由于硬币是匀称的，所以“正面向上”与“反面向上”这两个基本事件出现的可能性相同. 满足下列两个条件的随机试验称为**古典概型**：

(1) 试验的样本空间只有有限个基本事件；

(2) 各基本事件出现的可能性相同.

概率的古典定义　设 Ω 为一古典概型的样本空间，其基本事件总数为 n，事件 A 包含 m 个基本事件，则定义 A 的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}=\frac{m}{n}. \qquad (1\text{-}1)$$

例 4 从编有号码 1,2,…,10 的十个球中任取一个球,求下列事件的概率:

$$A=\{\text{取得的球号码为偶数}\};$$

$$B=\{\text{取得的球号码大于 } 6\}.$$

解 若将取得第 i 个球记为 ω_i,则该试验的样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{10}\}$,基本事件总数 $n=10$,且每个球被取到的可能性相同,故该试验属于古典概型. 事件 $A=\{\omega_2,\omega_4,\cdots,\omega_{10}\}$包含 $m_1=5$ 个基本事件,由概率的古典定义得

$$P(A)=\frac{m_1}{n}=\frac{5}{10}=0.5.$$

事件 $B=\{\omega_7,\omega_8,\omega_9,\omega_{10}\}$包含 $m_2=4$ 个基本事件,故

$$P(B)=\frac{4}{10}=0.4.$$

实验证明,由古典定义得到的事件的概率,正是频率的稳定值,因此,概率的古典定义与统计定义是一致的. 由古典定义同样可以推出概率的三个性质. 事实上,设基本事件总数为 n,事件 A 包含 m 个基本事件,显然,$0\leqslant m\leqslant n$. 又必然事件 Ω 包含了所有基本事件,不可能事件$\varnothing$不包含任何基本事件,所以,概率的三个性质都成立.

例 5 设 10 件产品中有 6 件正品 4 件次品,从中任取 5 件,求其中有两件次品的概率.

解 设事件 $A=\{\text{所取产品中有两件次品}\}$. 将任意取出的 5 件产品的一个组合作为一个基本事件,显然,基本事件总数为 $n=C_{10}^5$. 由于每件产品被取出的可能性相同,因此,每个这样的组合出现的可能性也相同,故该试验为古典概型. A 包含的基本