

全国高等教育自学考试

高等数学

(一)



全国高等教育自学考试办公室 组编
自学指导服务中心

中国审计出版社

答疑网络

[http://www.](http://www.ssneea.net.cn)

[ssneea.net.cn](http://www.ssneea.net.cn)

答疑丛书

全国高等教育自学考试答疑丛书

高等数学(一)

全国高等教育自学考试办公室
自学指导服务中心 组编

中国审计出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/全国高等教育自学考试指导委员会办公室自学指导
服务中心组编. —北京:中国审计出版社,1999.7

(全国高等教育自学考试答疑丛书)

ISBN 7-80064-794-3

I. 高… I. 全… III. 高等数学-高等教育-自学考试-自学参
考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 35325 号

高等数学(一)

全国高等教育自学考试办公室自学指导服务中心组编

*

中国审计出版社

(北京市海淀区白石桥路甲4号)

北京东晓印刷厂 印刷

新华书店总店科技发行所发行 各地新华书店经销

*

850×1168 毫米 32 开 6.5 印张 150 千字

1999 年 8 月北京第 1 版 1999 年 8 月北京第 1 次印刷

印数:1--11000 册 定价:10 元

ISBN 7-80064-794-3/G·23

愿天下有志者皆成人才

——《高等教育自学考试答疑丛书》总序

教育部高等教育自学考试办公室主任

杨志为

中国独创的高等教育自学考试,既是一种国家考试制度,又是一种个人自学、社会助学、国家考试相结合的教育形式。自20世纪80年代初创立以来,已使许多自学者获得了大专、本科文凭。这一所投资省、适应面广、质量高的没有围墙的“大学”已受到了社会各界的欢迎,引起了世界的瞩目。为了进一步完善它,帮助更多的公民实现求学的理想与成才的追求,全国自考办建立了“全国高等教育自学考试答疑网络”,旨在通过现代化高科技手段为自学者提供权威、实用的帮助。网络开通以来,深受广大自学者的好评。但由于客观条件所限,大部分考生目前还不能上网接受辅导,却又迫切要求答疑网络的辅导。因此,根据它们的要求,我们将答疑网络的教学课件进一步提炼,组织编撰了这套《答疑丛书》。

本套丛书以帮助考生学习为根本宗旨,力图体现下列特征:

一、理清脉络,指导方法。掌握一门学科,最关键的是要弄清其独特的知识体系与结构,从总体上有一个明晰的框架,在此基础上,再“装”入基本事实、基本理论,这样才能“学得通,记得住,用得活”。另外,每门学科内部各章节之间,以及它与相关学科之间都有内在的联系,只有把握了这种纵横联系,才能加深理解,融会贯通。每门学科都有自己独特的学习和研究方法,只有掌握了这些方法,才算找到了打开该学科知识宝库的钥匙,才能收到既掌握知识又培养能力的实效。《答疑丛书》就是基于这种指导思想,把重点放在

指导学习方法和提高自学能力上。

二、突出重点,答疑解惑。人们最初接触一门学科时,往往不易抓住重点、找出难点,而平均使用力量,结果是费了不少力还不得要领。有鉴于此,《答疑丛书》根据各学科特点,不但把重点明确告诉自学者,还围绕这些重点内容归纳出一些自学过程中经常遇到的问题并加以详细解释。由于这些问题大都来自答疑网络的使用者,因而问题带有相当的代表性,其解答对自学者学习肯定大有裨益。

三、学练结合、联系实际。要学好一门课程,必须做一定数量的练习题,用通过自学所掌握的课程知识解决现实生活、生产中的问题。《答疑丛书》按照考试要求精选了许多有代表性的、能举一反三的问题并提供了参考答案,使读者能在做习题的过程中巩固已学的知识,加深理解,并通过这些联系使自学者掌握理论联系实际的具体方法。

为了使考生读得懂、喜欢读、见成效,《答疑丛书》在文字上力求简明扼要,通俗易懂;在行文上生动流畅,不绕弯子;在形式上灵活变化,适合自学者的情趣。通过这些努力,我们期望达到以下目的:

1. 减小难度。在学习新知识时有旧知识的铺垫,有相关的背景知识做向导,有深入浅出的分析。这样,学习者所遇到的困难和压力就相应地得到缓解。

2. 拓展深度。在掌握一门学科时,不至于只知道一些表皮的东西,对一些基本理论、基本概念,要既知其然,又知其所以然;既知其一,又知其二。

3. 实现高度。既能通过国家考试,获得文凭,又学到了知识,培养了能力,实现了个人素质的提高。这才是我们理解的高等教育自学考试,这才是我们助学的终极目标。我们尽了绵薄之力来体现自己的宗旨,但能否如愿,应由广大考生去评定。我们诚恳地欢迎每

一个考生提出意见和建议,从而进一步改进我们的工作,使每一个考生都能得到更切合实际,更有成效的指导与帮助。

作为一名高等教育自学考试的工作者,我有义务不厌其烦地告诫参加自考的朋友们:一定要在钻研大纲、教材的基础上使用《答疑丛书》。那种平时不在大纲、教材上下功夫,只寄希望于突击背诵辅导材料以应付考试的办法是不足取的,它已使不少人走了弯路。“以大纲为纲”是我们自学者应遵循的基本原则。

人类的知识是无穷无尽的,自学之路也因之曲折而漫长。愿我们的工作能助自学者一臂之力,愿天下有志者皆成人才。

一九九九年夏于北京

前 言

为了进一步完善高等教育自学考试的教育形式,加强助学环节在考生自学过程中的重要作用,促进高等教育自学考试的发展,根据全国考办的工作部署,我们依据“高等教育自学考试答疑网络”的相关课件,组织、编印了这套《高等教育自学考试自学答疑丛书》。

《答疑丛书》以全国自考委公布的课程自学考试大纲为依据,参照全国自学考试统编教材,约请相关专家、学者担任各册辅导书的主编和主审,从指导学生的学习方法入手,侧重答疑和练习,旨在帮助自学者达到学习目标,顺利通过国家考试。

《答疑丛书》是全国高等教育自学考试答疑网络的重要组成部分,我们将在全国考办和各专业委员会的指导帮助下,根据专业的开考计划和考生的实际需要,陆续组织编写,由此构成与大纲、教材相配套的、完整的学习体系。

本书由姚孟臣编写。

全国高等教育自学考试办公室
自 学 指 导 服 务 中 心

1999 年 8 月

目 录

高等数学学习方法浅谈(一).....	(1)
高等数学学习方法浅谈(二).....	(8)
第一章 函数及其图形	(14)
一、基本要求	(14)
二、知识点	(14)
三、练习题	(14)
第二章 极限与连续	(29)
一、基本要求	(29)
二、知识点	(29)
三、练习题	(29)
第三章 导数与微分	(50)
一、基本要求	(50)
二、知识点	(50)
三、练习题	(50)
第四章 中值定理与导数的应用	(70)
一、基本要求	(70)
二、知识点	(70)
三、练习题	(70)
第五章 积分	(79)
一、基本要求	(79)
二、知识点	(79)
三、练习题	(80)
第六章 无穷级数	(95)

一、基本要求	(95)
二、知识点	(95)
三、练习题	(95)
第七章 微分方程初步	(121)
一、基本要求	(121)
二、知识点	(121)
三、练习题	(121)

高等数学学习方法浅谈(一)

前 言

高等数学(一)是经济管理专业的一门基础课. 高等数学在经济科学、管理科学中有着广泛的应用, 如著名的边际分析和弹性分析就是以微积分为基础的, 因此, 学好这一门课程不仅对于学习后续课程是必不可少的, 而且对于掌握现代经济管理的理论并应用于实际也是十分必要的.

高等数学(一)即微积分所包括的内容是高等数学中的最基础的知识, 大致可分为一元函数微积分、多元函数微积分、无穷级数和常微分方程四个部分. 一元函数和多元函数是微积分研究的对象, 而极限理论是它的最重要的基础, 可以说几乎微积分的所有概念都是建立在极限基础上的. 掌握有关的初等数学知识是学习这门课程必不可少的前提. 根据高等数学(一)的上述特点, 在学习这门课程时, 一是要有明确的学习目的, 二是要有适合自己特点的学习方法. 在高等数学(一)的学习中应注意以下几个方面的问题.

一、基本概念要弄清

在高等数学(一)中几乎每一章都有不少的概念需要弄清楚、理解确切并且记住. 其中最重要的有: 函数、极限、连续、导数、微分、原函数与不定积分、定积分、偏导数与全微分、重积分、无穷级数、常微分方程等. 怎样才能把概念弄清楚呢? 一般来说应从以下三个方面着手:

1. 先弄清这个概念是怎么提出来的, 它的背景是什么?
2. 这个概念的确切内容是什么? 它与其他概念有什么内在的

联系?

3. 多举一些具体的例子来帮助理解抽象的概念,特别是举一些几何上的例子,这样会比较直观、形象.

下面以“微分”这个概念为例来说明:首先要弄清楚微分这个概念是从“当 $|\Delta x|$ 很小时,怎样计算函数的增量 Δy 之值”提出来的,特别是 Δy 的表达式很复杂时,有没有一种比较简单的办法解决这个问题?当掌握了求函数导数的各种法则之后,自然想到用导数来表示函数的增量.于是从导数的定义出发得到了问题的答案,并引入了微分的概念.在很多课本中都举了实际的例子来说明,并给出了微分的一般定义:设函数 $y=f(x)$ 在点 x 处有导数 $f'(x)$,自变量 x 的增量为 Δx ,则称 $f'(x)\Delta x$ 为函数 $f(x)$ 在点 x 处的微分,记作

$$dy = f'(x)dx.$$

微分这个概念的确切内容到底是什么呢?是否要建立在导数的基础上呢?从实际例子可以看出,讨论函数的增量的这种分解是很重要的.通过讨论可以给出这样的定义:“……,如果存在着这样一个常数 A ,使得

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \rightarrow 0),$$

那么就称 $A \cdot \Delta x$ 为函数 $f(x)$ 在点 x 处的微分,……”,由此可见,在 $\Delta x \rightarrow 0$ 的过程中, Δy 、 Δx 、 dy 都是无穷小量,又称 Δy 是 Δy 的线性主要部分,简称为线性主部.它们之间的关系是:

$$\Delta y = dy + o(\Delta x) \quad (\Delta x \rightarrow 0).$$

由微分的上述定义,可以证明:一元函数 $y=f(x)$ 在一点处,“可导”与“可微”是等价的,进一步来说,“导数”与“微分”除了表达形式上不同,还可以从物理上来加以区分:如果说“导数”是物体作变速直线运动中,由平均速度转化为瞬时速度的结果;那么“微分”则是描述了这个转化的全过程.

也可以从几何上来理解微分这个抽象的概念(图略),即微分

的几何意义:当 Δy 是曲线 $y=f(x)$ 对应于点 x 的函数的增量时, dy 就是过该点切线的纵坐标的增量,需要指出的是,当通过几何意义来理解抽象的概念时,不要忽视概念或忘记了概念本身的含义. 如有的考生认为“导数就是切线的斜率”,“定积分就是平面图形的面积”等都是不确切的甚至是错误的.

为了更好地把握住这些基本概念,在学习中还应多通过一些具体的例子去深入体会.

二、基本公式要牢记

对于高等数学(一)中的所有基本公式都应该把它们记住,注意,这里说的是“记”,而不是“背”. 所谓记忆,是指在对有关的概念理解的基础上,通过逐步推导和反复运用将公式记住,例如,在讲导数时我们要求考生将导数的所有基本公式记住. 有的需要由导数定义直接推出,如 $y=C$, $y=\ln x$, $y=\sin x$, $y=x^2$ 等函数的导数;有的需要由导数的四则运算得到,如 $y=\tan x$, $y=\log_a x$ 等函数的导数;还有的需要用隐函数求导法则来导出,如 $y=\arcsin x$, $y=\arctan x$, $y=a^x$, $y=x^a$ 等函数的导数. 特别在利用公式解题时,千万不能一边查公式一边来解题,如果某个公式想不起来了,不妨按照上面所讲的方法把它推导一次,这样长期坚持下去就能够把基本公式牢牢记住. 有的教师要求考生“对于导数的基本公式,要象小九九一样的背熟”. 对于这种说法,我们是不能同意的. 在我的教学过程中,经常发现大一的学生将三角中的和差化积等公式全都忘记了,难道他们在高中时没有“象小九九一样地背熟”这些公式吗? 不是的,其原因就是当时他们只是“背”,而不是“记”.

公式的记忆还要研究一点方法,例如,在使用三角函数和反三角函数的导数公式时,有时会记错它们的正负号;有时还错把三角函数的导数公式记成了反三角函数的导数公式. 如果这样来记忆:凡是“正”的三角函数(即正弦、正切、正割)和反三角函数(即反正弦、反正切、反正割)的导数都是正的,其“余”的三角函数(即余弦、

余切、余割)和反三角函数(即反余弦、反余切、反余割)的导数都是负的;三角函数的导数仍是三角函数,反三角函数的导数不是反三角函数,记住了这样两句话,就不会再犯这样的错误了.

我们知道不定积分是作为微分的逆运算而引入的,因此,不定积分中的所有基本公式的记忆,都应该建立在导数公式的基础上.可见导数公式及求导法则在微积分中是十分重要的,我们应该在理解的基础上,通过逐步推导和反复运用将它们记住.不能设想一个连微分法都不懂的考生能够正确地进行积分运算.

三、反复学、勤思考

反复学、勤思考的目的在于牢固地掌握有关的知识.所谓“反复”,决不是简单的重复.通过反复学习来真正掌握一门课程的基本内容,需要经过由厚变薄和由薄变厚这样两个过程,所谓“由薄变厚”就是对书中的骨干部分,用自己的语言做科学的延伸和展开.特别是当读一本高等数学书的时候,决不能满足对字面的理解,而要“一个字一个字”地边读边思考.在学习某一部分的过程中,首先要通读全文,了解这一部分讲了哪几个主要的概念、主要的定理和公式是什么;然后逐个弄清这些主要概念是怎么提出来的,它的背景是什么;找出每个定理和公式的条件和结论,弄懂是怎么证明和推导的,有关的例子是什么;最后总结这几个主要的概念之间的区别与联系,并记下主要的定理和公式.通过对有关例题的分析和独立地完成练习,逐步地掌握有关的知识,用自己的语言总结出这一部分内容.

由厚变薄的过程中所做的各种总结,可以作为我们由简到繁、由薄变厚的思考问题的线索和提纲.在由薄变厚的这个转变过程中,切忌照本抄书,而应把原书的精神吃透,抓住核心,按照线索和提纲用自己的语言,由简到繁、由浅入深地写下去.通过这样一个由厚变薄和由薄变厚的过程,对于所掌握的知识水平,将会有有一个很大的提高.下面仅就“极限方法”问题怎样按照这样一个由薄变

厚的思路去展开,进行简单讨论.

这里的“极限方法”,不是通常所说的计算极限的各种办法,而是微积分中研究函数的一种最基本的方法,也是分析和解决实际问题的一个十分有效的方法.极限方法通过考察变量在某一过程中的变化趋势,来解决常量数学所不能解决的问题.在第三章第一节有关导数概念的几个实例中,我们采用的“求增量—作比值—取极限”方法解决了如“瞬时速度”、“切线斜率”等问题;在第五章有关的实例中,我们采用的“分割—代替—求和—取极限”方法解决了“平面图形的面积”等问题;在第六章第一节有关级数的概念中,也可以使用“无限逼近”的方法解决“圆的面积”等问题.这里所采用的方法都是“极限方法”.于是,关于极限方法我们可以给出这样一个总结:“为了确定一个不能用初等数学的方法来解决的量,可以首先找出它的一串越来越精确的近似值,然后考虑一个变化过程,如果在这一个变化过程中,这串近似值越来越趋向于某一常数,那么就把它这一常数定义为这个量”这样,就可以把学过的“导数”和“定积分”概念简单的记忆为“比值的极限”和“一种特殊的和的极限”;而“级数”则是“部分和数列的极限”.

学习高等数学跟学习任何一门数学一样,必须适当地多做一些习题.仅满足于能够把书(包括例题)看懂,公式、定理记住,而自己不去动手做题,那是学不好数学的.只有通过做题,才能加深对概念、定理的理解,才能学到一些具体的方法.在做习题时,一定要肯动脑、勤思考,不要輕易地翻习题解答,只有当想了很久确实想不出来时,再去翻一下习题解答,稍微看一、两眼,得到一点提示后,自己再继续做.只有亲自动手做出来的题才是真正会了,否则很快就会忘记.做完题后还要注意小结,看看这样一类问题应当如何入手、想想通过做这几个题目有些什么收获、学到什么方法.这样日积月累,就会不断学到一些新的方法,而分析问题、解决问题的能力自然就会逐步提高.

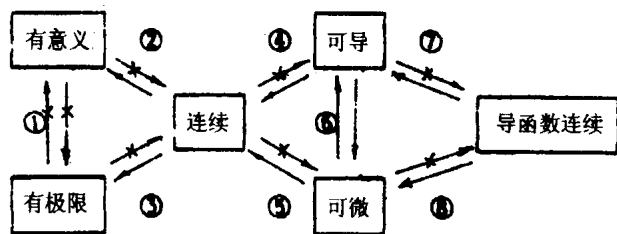
四、要善于总结

高等数学课对学习用书及学习内容都有明确的规定,不少单位还编印了各种辅导材料,这些材料对学习用书的内容进行了全面的概述和小结,并有典型例题解法的分析,它对于加深理解所学内容起了良好的作用.但是,这些东西再好毕竟是别人的,要变成自己的知识还要有个过程,这就要求考生要善于总结.

例如:教材中指出“在使用分部积分时,应将积分表达式化为 udv (或者 $uv'dx$).”又说“在多数场合,积分表达式中如何选取 u 和 dv (或者 v'),在分部积分计算中十分讲究.”通过书中的例题已经看出:当被积函数属于两类不同的函数乘积形式 $f(x)g(x)$ 时,先把哪个选为 v' 是很重要的.有时会因选取不当,使得积分表达式变得很复杂,甚至积不出来.一般来说,根据被积函数所属类型的不同,是按照以下的顺序: $e^x, a^x, \sin x, \cos x, x^a$ 依次考虑选为 v' , 而 $\arctan x, \arcsin x, \ln x$ 等是不能选为 v' 的.例如,被积函数为 $x \sin x$ 时,选 $v' = \sin x$; 被积函数为 $x e^x$ 时,选 $v' = e^x$; 被积函数为 $x \ln x$ 时,只能选 $v' = x$. 当被积函数属于一类函数的形式 $f(x)$ 时,即 $f(x)$ 为 $\ln x, \arctan x, \arcsin x, \sqrt{x^2+a^2}$ 等时也常使用分部积分法,这时只要把 dx 看成 dv 即可,这样的小结对于考生在使用分部积分法时是很有帮助的.

又如:当学完一元函数微分学以后,可以将其中的基本概念之间的关系加以总结.下面用一张框图来表示.

设一元函数 $y=f(x)$ 在点 x 处:



其中“ $A \rightarrow B$ ”表示由 A 推出 B ；“ $C \nrightarrow D$ ”表示由 C 不能推出 D 。

如果我们能够在各个概念之间加上一两个例子进行说明，这样就会加深对概念的理解，有助于进一步地学习其他知识，例如，在图中④处（即“可导必连续，反之不真”）为了说明“连续不一定可导”，可以选择函数 $y = |x|$ ，显然它在 $x = 0$ 处是连续的，但是，它的左导数（等于 -1 ）和右导数（等于 $+1$ ）不等，因而是不可导的。又如，在①处（即“有定义”与“有极限”是无关的）可以选择函数 $y = 1$ ($x \neq 0$)，可见它在点 $x = 0$ 处是没有定义的，但是它在点 $x = 0$ 处的左极限（等于 1 ）和右极限（等于 1 ）是相等的，因而在点 $x = 0$ 处是有极限的，说明一个函数在一点有极限而可以没有定义，即极限是函数在一点附近的变化趋势而与该点是否有定义是无关的。

可见，根据高等数学（一）的特点，在学习到一个阶段以后，便可以根据本人的具体情况，在各章节小结的基础上，做个阶段总结是十分有益的。

高等数学学习方法浅谈(二)

前 言

目前自学考试《高等数学(一)》中的试题是由单项选择题、计算题(一)、计算题(二)、应用题及证明题五大题,四种题型组成.所包括的内容是高等数学中的最基础的知识,大致可分为一元函数微积分、多元函数微积分、无穷级数和常微分方程四个部分.我们在学习这门课程时,一是要有明确的学习目的,二是要有适合自己的学习方法.除此以外,培养自身的解题应试能力也是非常重要的.这就是说,我们要求考生不仅有一定的数学基础知识,必要的运算和推理能力,还要有一定的知识之间灵活转化的能力,准确地选择解题方法的能力,以及处理问题的机敏性和遇事不慌的稳定的心理素质.

鉴于1996年—1997年《中国考试》的高教自学考试增刊中,杭州大学两位老师已经分别发表了“《高等数学(一)》单项选择题的解答方法”、“谈谈《高等数学(一)》中的应用题”,本文结合1998年《高等数学(一)》的试卷,仅就计算题的题型分析与解题技巧谈一点看法,供广大考生参考.

一、题型分析

数学试题除了基础题(选择题、填空题)之外,还有考查的重点放在灵活和综合运用数学知识能力上的解答题,其中包括计算题、应用题和证明题等.解答题属于主观性测试题,它要求考生根据题设条件逐步写出解答过程,然后根据解答过程的正确程度分步骤给分.在设计自学考试的解答题时,我们很重视解答题与前面的基