物理学中的数学方法概论

杜志涛 杜君花 宋兴军 著

哈尔滨地图出版社

物理学中的数学方法概论

杜志涛　杜君花　宋兴军　著

哈尔滨地图出版社
·哈尔滨·

图书在版编目(CIP)数据

物理学中的数学方法概论 / 杜志涛，杜君花，宋兴军著. —哈尔滨：哈尔滨地图出版社，2005. 11
ISBN 7－80717－193－6

Ⅰ. 物... Ⅱ. ①杜... ②杜... ③宋... Ⅲ. 物理学—数学方法 Ⅳ. O411

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 139767 号

哈尔滨地图出版社出版、发行
(地址：哈尔滨市南岗区测绘路 2 号　邮政编码：150086)
哈尔滨太平洋彩印有限公司印刷
开本：850 mm×1 168 mm　1/32　印张：7. 812 5　字数：225 千字
2005 年 11 月第 1 版　2005 年 11 月第 1 次印刷
印数：1～1 000　定价：19. 80 元

前　　言

由于理论研究和实践教学的需要，一些理工科学校都不同程度地开设了工程数学、张量分析和变分法的选修科课，但至今尚缺少非数学专业读者阅读的有关教材和参考书。基于此，为适应教学改革和教材改革的需要，我们参考了吴迪光编写的《变分法》、孙志铭编写的《物理学中的张量》、同济大学数学教研室编写的《工程数学》等书，经过认真研究，系统规划，修改整理，并广泛征求物理专业教师的意见，多次讨论，编成此书。以供物理系专业师生及其他科技工作者使用。

本书内容包括：线性代数、概率论、张量及变分法。编写中着重于物理方面的应用，尽量选取结合物理学的例题。在此基础上，力求数学上的系统性，以深入浅出的阐述、说明、验证代替某些繁难的数学推导和证明，使只具备普通微积分知识的读者均可阅读。各章后配有相应的习题，使读者能反复练习，以达到掌握基本原理和熟练应用的目的。

在编写本书的过程中曾得到齐齐哈尔大学物理系孙为民教授的大力帮助，理学院院长堵秀凤、王少华的热情关心，哈尔滨工业大学数学系李龙锁教授、哈尔滨商业大学数学系吴刚教授的多次指导，在此一并表示感谢。

由于我们水平有限，经验不足，书中一定有不少缺点和错误，恳切希望读者批评指正。

编者

2005 年 11 月

目　录

第一章　行　列　式

本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质及其计算方法，此外还介绍了用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克拉默法则.

第一节　全排列及其逆序数

先看一个例子.

引例　用1,2,3三个数字，可以组成多少个没有重复数字的三位数？

解　（这个问题相当于说，把三个数字分别放在百位、十位与个位上，有几种不同的放法）

百位　　3种放法

十位　　2种放法

个位　　1种放法

因此共有 $3\times2\times1=6$ 种放法.

对于 n 个不同的元素，也可提出类似的问题：把 n 个不同的元素排成一列，共有几种不同的排法？

定义1　把 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的全排列（或排列）.

n 个不同的元素的所有排列的种数，通常用 P_n 表示.

由引例　　$P_3=3\cdot2\cdot1=6.$

同理　　$P_n=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1=n!.$

我们规定各元素之间有一个标准次序，n 个不同的自然数，规定由小到大为标准次序.

定义2　在一个排列 $(i_1i_2\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n)$ 中，若数 $i_t>i_s$ 则称这两个数组成一个逆序.

定义3　一个排列中所有逆序的总数称为此排列的逆序数.

逆序数为奇数的排列称为奇排列;逆序数为偶数的排列称为偶排列.

例 1 求排列 32514 的逆序数.

解 在排列 32514 中:

3 排在首位,逆序数为 0;

2 的前面比 2 大的数有一个(3),故逆序数为 1;

5 是最大数,逆序数为 0;

1 的前面比 1 大的数有三个(3,2,5),故逆序数为 3;

4 的前面比 4 大的数有一个(5),故逆序数为 1;

于是这个排列的逆序数为 $t=0+1+0+3+1=5$.

第二节 n 阶行列式的定义

定义 4 由 n^2 个数排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix},$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个元素的乘积,并冠以符号 $(-1)^t$,得到形如 $(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的项,其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,t 为这个排列的逆序数. 由于这样的排列共有 $n!$ 个,因而,形如 $(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的项,共有 $n!$ 项. 所有这 $n!$ 项的代数和 $\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 称为 n 阶行列式.

记作
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

简记为 $\det(a_{ij})$. 数 a_{ij} 称为行列式 $\det(a_{ij})$ 的元素.

即 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$.

按此定义可知：

1. n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和；

2. n 阶行列式的每项都是位于不同行、不同列的 n 个元素的乘积；

3. 每项符号由下标排列的逆序数决定.

当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a|=a$，注意不要与绝对值记号相混淆.

例 2 证明对角行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n;$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & ⋰ & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

其中未写出的元素都是 0.

证明 第一式左端称为对角行列式，其结果是显然的，下面证第二式.

若记 $\lambda_i=a_{i,n-i+1}$，则依行列式定义

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & ⋰ & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & ⋰ & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{t[n(n-1)\cdots 21]}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

主对角线以下(上)的元素都为0的行列式叫<u>上(下)三角形行列式</u>,它的值与对角行列式一样.

第三节 对　　换

为了研究 n 阶行列式的性质,先来讨论对换及它与奇偶性的关系.

定义 5 在排列中,将任意两个元素对调,其余元素不动,这种作出新排列的手续叫做对换.将相邻两个元素对调,叫做相邻对换.

定理 1 一个排列中的任意两个元素对换,排列改变奇偶性.

证明 先证相邻对换的情形.

设排列为 $$a_1\cdots a_l ab\ b_1\cdots b_m.$$

$a_1\cdots a_l ab\ b_1\cdots b_m \xrightarrow{\text{对换 } a \text{ 与 } b} a_1\cdots a_l ba\ b_1\cdots b_m$ 除 a,b 外,其它元素的逆序数不改变.

当 $a<b$ 时,经对换后 a 的逆序数增加 1,b 的逆序数不变;

当 $a>b$ 时,经对换后 a 的逆序数不变,b 的逆序数减少 1.

因此对换相邻两个元素,排列改变奇偶性.

再证一般对换的情形.

设排列为 $$a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n.$$

把它作 m 次相邻对换,变成 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$,再作 $m+1$ 次相邻对换,变成 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$,总之,经过 $2m+1$ 次相邻对换,排列 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$ 变成排列 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$,所以这两个排列奇偶性相反.

综上,一个排列中的任意两个元素对换,排列改变奇偶性.

推论 奇排列调成标准排列的对换次数为奇数,偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

证明 由定理 1 知对换的次数就是排列奇偶性的变化次数,可知推论成立.

定理 2 n 阶行列式也可定义为

$$D = \sum (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}.$$

其中 t 为行标排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的逆序数.

证明 按行列式定义有

$$D = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}.$$

记
$$D_1 = \sum (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}.$$

对于 D 中任意一项 $(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$，总有且仅有 D_1 中的某一项，$(-1)^s a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}$ 与之对应并相等；反之，对于 D_1 中任意一项，$(-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$ 也总有且仅有 D 中的某一项，$(-1)^s a_{1q_1} a_{2q_2} \cdots a_{nq_n}$ 与之对应并相等，于是 D 与 D_1 中的项可以一一对应并相等，从而 $D = D_1$.

定理 3 n 阶行列式也可定义为

$$D = \sum (-1)^t a_{p_1 q_1} a_{p_2 q_2} \cdots a_{p_n q_n}.$$

其中 $p_1 p_2 \cdots p_n$，$q_1 q_2 \cdots q_n$ 是两个 n 级排列，t 为行标排列逆序数与列标排列逆序数的和.

第四节 行列式的性质

记 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，$D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，

行列式 D^T 称为行列式 D 的转置行列式.

性质 1 行列式与它的转置行列式相等.

证明 记 $D = \det(a_{ij})$ 的转置行列式 $D^T = \det(b_{ij})$，即 $b_{ij} = a_{ij}(i,j = 1, 2, \cdots, n)$，按定义 $D^T = \sum (-1)^t b_{1p_1} b_{2p_2} \cdots b_{np_n} = \sum (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$. 又因为行列式 D 可表示为 $D = \sum (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$，故 $D = D^T$.

由此可知，行列式中行与列具有同等的地位，因此行列式的性质

凡是对行成立的对列也同样成立. 反之亦然.

性质 2 互换行列式的两行(列),行列式变号.

证明

设行列式 $D_1 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$,是由行列式 $D = \det(a_{ij})$ 变换 i,j 两行得到的,即:

当 $k \neq i,j$ 时,$b_{kp} = a_{kp}$;当 $k = i,j$ 时,$b_{ip} = a_{jp} = a_{ip}$.

$$
\begin{aligned}
\text{于是}\quad D_1 &= \sum (-1)^t b_{b_1p_1} \cdots b_{ip_i} \cdots b_{jp_j} \cdots b_{np_n} \\
&= \sum (-1)^t a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n} \\
&= \sum (-1)^t a_{1p_1} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{np_n},
\end{aligned}
$$

其中 $1 \cdots i \cdots j \cdots n$ 为自然排列,t 为排列 $p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n$ 的逆序数.

设排列 $p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n$ 的逆序数为 t_1,则有 $(-1)^t = -(-1)^{t_1}$,

故 $\quad D_1 = -\sum (-1)^{t_1} a_{1p_1} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{np_n} = -D.$

推论 如果行列式有两行(列)完全相同,则此行列式为零.

证明 互换相同的两行,有 $D = -D$,故 $D = 0$.

性质 3 行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k,等于用数 k 乘此行列式.

推论 行列式的某一行(列)中所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

性质 4 行列式中如果有两行(列)元素成比例,则此行列式为零.

性质 5 若行列式的某一列(行)的元素都是两数之和.

例如

$$
D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i} + a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i} + a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni} + a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.
$$

则 D 等于下列两个行列式之和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1i} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a'_{2i} & \cdots a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a'_{ni} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 6 把行列式的某一列(行)的各元素乘以同一数然后加到另一列(行)对应的元素上去，行列式不变.

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nj} \end{vmatrix} \overset{c_i+kc_j}{=\!=\!=}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (a_{1i}+ka_{1j}) & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & (a_{2i}+ka_{2j}) & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & (a_{ni}+ka_{nj}) & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nj} \end{vmatrix} \quad (i\neq j).$$

计算行列式常用方法：利用运算 r_i+kr_j 把行列式化为上三角形行列式，从而算得行列式的值.

例 3 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

解 将第 2,3,…,n 都加到第一列得

$$D=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix}1 & b & b & \cdots & b\\ 1 & a & b & \cdots & b\\ 1 & b & a & \cdots & b\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & b & b & \cdots & a\end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix}1 & b & b & \cdots & b\\ & a-b & & 0 & \\ & & a-b & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & a-b\end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

第五节 行列式按行(列)展开

一般说来,低阶行列式的计算比高阶行列式的计算要简便,我们自然地考虑用低阶行列式来表示高阶行列式的问题.为此,先引进余子式与代数余子式的概念.

在 n 阶行列式中,把元素 a_{ij}所在的第 i 行和第 j 列划去后,留下来的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 a_{ij}的余子式,记作 M_{ij},记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$,叫做元素 a_{ij}的代数余子式.

行列式的每个元素分别对应着一个余子式和一个代数余子式.

引理 一个 n 阶行列式,如果其中第 i 行所有元素除 a_{ij}外都为零,那么此行列式等于 a_{ij}与它的代数余子式的乘积,即 $D=a_{ij}A_{ij}$.

证 先证当 a_{ij}位于第一行第一列时

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix},$$

即有 $D=a_{11}M_{11}$. 又 $A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=M_{11}$,从而 $D=a_{11}A_{11}$.

再证一般情形，此时

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

把 D 的第 i 行依次与第 $i-1$ 行、第 $i-2$ 行、第 1 行对调，得

$$D=(-1)^{i-1}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

再把 D 的第 j 列依次与第 $j-1$ 列、第 $j-2$ 列、第 1 列对调，得

$$D=(-1)^{i-1}\cdot(-1)^{j-1}\begin{vmatrix} a_{ij} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,j-1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & \cdots & a_{n,j-1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{i+j-2}\begin{vmatrix} a_{ij} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,j-1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & \cdots & a_{n,j-1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{i+j}\begin{vmatrix} a_{ij} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,j-1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & \cdots & a_{n,j-1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

元素 a_{ij} 在行列式 $\begin{vmatrix} a_{ij} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,j-1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & \cdots & a_{n,j-1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 中的余子式

仍然是 a_{ij} 在

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{中的余子式 } M_{ij}.$$

于是有

$$\begin{vmatrix} a_{ij} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,j-1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & \cdots & a_{n,j-1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

故得

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} a_{ij} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,j-1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & \cdots & a_{n,j-1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = a_{ij} A_{ij}. \end{aligned}$$

定理 4 行列式等于它的任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \qquad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

这个定理叫做行列式按行(列)展开法则.

证

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

类似可证 $D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(j=1,2,\cdots,n)$.

例 4 计算 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

解 $$D\xlongequal[c_4+c_3]{c_1+(-2)c_3}\begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}\xlongequal{r_2+r_1}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -8 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}=40.$$