研究生教学用书

教育部学位管理与研究生教育司推荐

鲁棒H_∞控制

Robust $\mathcal{H}_\infty$ Control

贾英民 编著

科学出版社

www.sciencep.com

研 究 生 教 学 用 书

教育部学位管理与研究生教育司推荐

鲁棒H_∞控制

Robust H_∞ Control

贾英民　编著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书系统介绍了鲁棒 H_∞ 控制的基本理论和方法。内容包括信号与系统，概念及简化，全信息 H_∞ 控制，输出反馈 H_∞ 控制，鲁棒 H_∞ 控制，H_∞ 控制的 LMI 方法，时滞系统的鲁棒 H_∞ 控制等。全书选择了“界实定理”为主线，先后给出了其六种不同的表达形式并用来设计 H_∞ 控制器，建立了鲁棒 H_∞ 控制的基本理论体系，具有重要的理论和实用价值。

本书可用于“控制理论与控制工程”专业以及控制、机械、通信、交通、计算机、数学、力学等学科相关专业的研究生教材，亦可作为从事鲁棒控制研究的科研、教学和工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

鲁棒 H_∞ 控制/贾英民编著.—北京：科学出版社，2007

ISBN 978-7-03-018501-3

I. 鲁… II. 贾… III. 鲁棒控制 IV. TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007) 第 014375 号

责任编辑：胡 凯／责任校对：纪振红
责任印制：赵德静／封面设计：王 浩

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007 年 4 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2007 年 4 月第一次印刷 印张：18 1/2
印数：1—3 000 字数：345 000

定价：46.00 元

中国科学院科学出版基金资助出版

前　言

鲁棒控制理论是线性系统理论深层次的发展，是控制科学与工程学科以及其他相关学科的科技工作者所需的重要基础知识。鲁棒控制研究的主要内容是系统存在模型不确定性和外界干扰时如何设计控制器使得相应的闭环系统具有期望的性能。目前，鲁棒控制吸引了国内外众多学者参与研究，发展了各具特色的研究方法，诸如参数空间法、多项式方法、H_∞ 方法、QFT 方法等。其中，从理论的系统完整性以及工程应用的成功事例来看，H_∞ 方法从它的诞生之日起就一直在鲁棒控制中占有主流地位。因此，为了在有限的篇幅中突出本书的主题，同时也为了便于组织材料和读者阅读，本书取名为《鲁棒 H_∞ 控制》。作者相信这个书名不仅不会影响读者对其他鲁棒控制方法的兴趣，而且通过本书的学习，除了掌握 H_∞ 方法的基本内容之外，还对精通鲁棒控制其他方法起到抛砖引玉的作用。

G.Zames 在 1981 年发表的著名论文，可以看成是现代鲁棒控制特别是 H_∞ 控制的先驱。它以最优敏感性，即干扰在输出上影响最小作为 H_∞ 控制的基本思想，这实际上是 Wiener-Hopf 理论和二次型最优控制的发展。这种 H_∞ 控制的优化求解实际上可以解决一系列鲁棒控制问题。J.C.Doyle 等四人在 1989 年发表的著名文章是 H_∞ 控制发展中的一个里程碑，他们将 H_∞ 问题的求解归结为解两个 Riccati 方程，从而沟通了二次型最优控制与 H_∞ 控制的本质联系。这一突破性的结果使得 H_∞ 控制的研究获得了新的推动力，使线性 H_∞ 控制的研究在几年里取得了成功并基本趋于完善。随后，Y.Nesterov 等人提出的凸规划内点法极大地推动了 H_∞ 控制理论向应用阶段的发展。1994 年 S.P.Boyd 等人有关线性矩阵不等式 (LMI) 的专著的问世以及 P.Gahinet 等人与美国 The MathWorks 公司合作推出的 Matlab LMI Toolbox 使得 H_∞ 控制理论真正成为一个实用的系统分析与设计方法。人们在享受 LMI 带来的方便实用之中很快又发现这种将 H_∞ 控制方法转换为求解一组 LMI 的方法不仅能克服求解两个联立的 Riccati 方程时第二个 Riccat 方程的求解过程不易收敛的困难，而且还能充分地利用矩阵理论的现有成果解一类特殊的无穷维系统，即时滞系统的控制问题。时滞系统是在现代工业控制及信息传输和通信中经常遇到且目前还没有太多有效可靠的处理方法，而基于 LMI 的 H_∞ 控制方法能够与预测控制相结合获得更高的控制性能，具有广泛的应用前景。目前，基于 LMI 方法的 H_∞ 控制研究仍然是控制领域一个非常活跃的研究方向。

H_∞ 控制的发展历史和现状决定了本书的选材和组织依据，其基本内容应包括一般理论，LMI 方法以及时滞系统 H_∞ 控制等。本书内容包括三部分，第一部

分包括第一至第五章，详细介绍 H_∞ 控制的基本原理以及在各种鲁棒控制中的应用。其中，第一章是数学基础知识以及从信号与系统的观点介绍 H_∞ 范数的意义及其对线性定常系统如何计算 H_∞ 范数。第二章主要介绍 H_∞ 控制的标准描述，特别是如何获得后面章节所研究的简化模型。读者所熟悉的线性系统课程中没有详细介绍或涉及的现代控制中的重要概念，如内稳定性、线性分式变换、控制器的参数化、连接内稳定性和 H_∞ 范数之间关系的 Redheffer 定理等都将在本章中详细介绍。第三章是全信息反馈 H_∞ 控制。在这里问题被归结为一个 Riccati 方程的求解，从而为最后求解一般情况下的 H_∞ 控制问题打下了基础。第四章介绍输出反馈 H_∞ 控制问题。通过将 H_∞ 滤波问题转化为对偶的全信息控制问题，一般 H_∞ 控制问题可最终归结为两个 Riccati 方程的求解问题。至此，H_∞ 控制问题得到了彻底的解决。第五章主要是将确定系统的 H_∞ 控制结果扩展到不确定系统，进而形成对既含有外部干扰又含有内部模型不确定性系统的鲁棒 H_∞ 控制。在大多数情况下，一个含有模型不确定性系统的 H_∞ 控制可以转化为另一个系统的标准 H_∞ 控制问题来求解。本书的第二部分是第六章，主要介绍 LMI 的基本理论和方法并以此导出第四章 H_∞ 控制结果的 LMI 表示，特别还给出了一种改进系统 H_∞ 控制对凸多面体不确定性保守性的预测方法。Schur 补引理在本章中扮演了一个非常活跃的角色。第三部分是第七章，主要介绍时滞系统的鲁棒 H_∞ 控制。它基本上把读者带到了研究的前沿，读者既可将本章作为 H_∞ 控制理论的一部分，又可视为 LMI 方法在时滞系统中的应用。显然，本书的第二部分介绍的 LMI 理论和方法起到了连接第一部分和第三部分的桥梁作用。本书附录给出了鲁棒控制的一些经典结果以方便读者参考和了解这一方向的发展历史。

本书是在作者多年从事鲁棒控制理论及应用研究的基础上写成，其初稿是作者为北京航空航天大学控制理论与控制工程专业研究生课程“鲁棒控制”所写的讲义。鉴于作者在教学中对讲授难点以及学生所提问题的理解和体会，同时也参照国内外同类著作和教材的组织方法，本书在突出物理概念、注重逻辑推理、强调理论严谨方面作了很大的努力。为此，本书一方面选择界实定理作为贯穿全书的主线，从第一章到第七章，先后介绍了界实定理的六种形式及其在 H_∞ 控制中的应用。另一方面，还重视书稿内容体系完整的重要性，书中没有追求全面介绍鲁棒控制众多研究方向上的最新成果，也放弃了作者个人一些成果的介绍，所有内容的选择都服从建立鲁棒 H_∞ 控制基本理论和方法体系的需要。尽管这种思路给本书的写作带来许多的困难，但作者坚信这样做对读者是有利的，并最终形成了本书如下的几个特色：

1. 注重衔接，循序渐进。在标准 H_∞ 问题被解决以后，许多人认为 H_∞ 控制理论需要较深的数学基础，问题求解繁琐困难，即使对有一定鲁棒控制基础的读者也并非不费时间就能容易地理解 J.C.Doyle 等四人解决标准 H_∞ 问题的著名论文。

因此，为了使读者能对标准 H_∞ 控制理论的完整证明过程有一个清楚的了解，本书采用了 M.Green 等人提出的一种基于最优化概念的 Max-Min 方法进行介绍，它仅需要线性系统理论的基本知识，从而实现了 H_∞ 控制与最优控制的较好衔接，易于接受。同时，该方法还能处理线性时变系统，这是目前已有的求解标准 H_∞ 控制问题方法中唯一能处理时变系统的方法。

2. 最小假设，恰当组织。求解标准 H_∞ 控制问题有一组标准的假设条件，不同的求解方法往往需要不同的形式。例如，在 J.C.Doyle 的分步求解法中，所需条件按讨论问题的不同形式和步骤分别给出。在许多情况下，这些条件并不是求解 H_∞ 控制问题的最小条件集。这样，一旦为简化而删减，就不易清楚解释每个假设条件的理由。在本书中，我们用一章 (第二章) 专门讨论问题的概念与简化，保证了在正式对问题讨论之前给出的假设条件集合是最小的。作者认为这种先提出最小假设条件和简化模型的做法，特别适合使用 Max-Min 方法讨论 H_∞ 控制理论的基本内容。关于这一点，已有的专著和教材似乎还没有给予太多的注意。

3. 一种问题，多种处理。本书除了在第一章至第四章用 Max-Min 优化方法给出了 H_∞ 控制最基础的证明之外，第六章还讨论了 H_∞ 控制问题的 LMI 方法。通过阅读本书，读者能够掌握求解 H_∞ 控制的两种基本方法。事实上，如果读者有兴趣完成那些带有 $*$ 号的习题，还可以了解 B.A.Francis 的频域求解方法。这些利用不同数学工具和方法研究 H_∞ 控制的结果从不同的角度揭示了问题的特征，无疑对加深读者的理解是大有帮助的。特别需要指出的是，这种处理方法不是讲授上的刻意重复，实为尊重不同方法的发展历史和相互之间的内在联系，也是真正解决实际问题所必需的。

4. 内容精炼，推导完整。鲁棒控制的迅速发展已使得大量的专著和论文得以发表，这促使本书一方面要精选内容，另一方面还要重视通过本书的学习能够逼近 H_∞ 控制这一研究方向的前沿。本书所有结果都给出了自包含的严格证明，读者不必再去查找有关参考书，适合于自学。在有限的篇幅中从浩瀚无穷的文献中挑选出其精华加以整理并非易事，但作者坚持这样做了。

到目前为止，作者还未见到与本书具有相同或类似体系的专著或教材。事实上，来自各方的力作对本书的构思和组织起到了重要的启发作用。这里特别要提到的是黄琳院士和 M.Green *et al.* 的专著，书中对 H_∞ 控制理论的叙述既考虑到理论的完整又兼顾了时变与定常两种情形的关联与区别，这些在本书中得到了充分的体现；申铁龙的专著在处理鲁棒 H_∞ 控制方面具有特色，而 R.E.Skelton *et al.*, G.E.Dullerud *et al.* 和俞立的专著则把 LMI 作为一个统一的控制系统设计方法加以阐明，给出了许多线性系统设计问题的 LMI 条件，书中关于这两方面的内容主要参考它们。关于时滞系统的鲁棒控制，J.H.Lee *et al.* 和 C.E.de Souza *et al.* 分别于 1994 年发表在 IEEE AC 上和 1999 年发表在 AUTOMATICA 上的论文是这一

问题的标志性进展，在书中也有相应的介绍。然而，作为一本可用作教材的专著，没有也不可能给出较全面的参考文献，本书中所列出的参考文献是为了说明历史及进一步研究，读者可以从中找到其他需要的文献。一些重要的文章及贡献大的作者书中没有全部列出，敬请鉴谅。

在完成本书过程中，先后得到了国家杰出青年科学基金 (69625506)、国家自然科学基金 (60334030, 60374001)、教育部高校博士点基金 (1999000602, 20030006003)，以及国防基础研究 (K1205060332, A2120061303) 等项目的资助。作者在此对国家自然科学基金委员会、教育部以及国防科工委的支持深表谢意。也特别感谢科学出版基金给予的支持使作者有机会能够把自己的想法和成果加以系统、归纳和总结出版。北京航空航天大学第七研究室主任霍伟教授与北京大学系统与控制中心黄琳院士、王龙教授分别对本书的写作提出了许多有价值的建议，在此一并向他们表示衷心的感谢。此外，作者近年来先后在德国宇航院资助下访问慕尼黑机器人与系统动力学研究所 J.Ackermann 教授，在德国洪堡基金会资助下访问汉堡工业大学 J.Lunze 教授以及在日本学术振兴会资助下访问大阪府立大学 H.Kokame 教授，与他们的交流使作者受益匪浅。他们的观点在书中也得到了一定的反映，特致感谢。最后，我衷心地感谢我的导师高为炳院士把我引入鲁棒控制领域并一直工作至今。

由于作者水平有限，加之写作仓促，难免有疏漏和不当之处，恳请读者批评指教。

2006 年 1 月

于北京航空航天大学

目　　录

第一章　信号与系统

1.1 数学基础

本节主要介绍今后将要用到的一些基本数学概念和事实。

1.1.1 度量空间

度量空间是直线 R 上距离概念在一般抽象集合上的推广。

定义 1(度量)　设 X 为一非空集合，它的一个度量 d 是指定义在 $X \times X$ 上的一个函数，且对任意的 $x, y, z \in X$ 满足

1. d 是有限的非负实数。
2. $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$。
3. $d(x, y) = d(y, x)$。
4. $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$。

我们称定义了上述度量的集合为度量空间，通常记为 (X, d)。显然，在同一集合上可定义不同的度量，从而构成不同的度量空间。

例 1　Euclid 空间 R^n 和酉空间 C^n。它们分别由所有 n 个实数和复数的有序组 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，或 $y = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ 等组成的集合，其 Euclid 度量定义为

$$d(x, y) = \sqrt{|\xi_1 - \eta_1|^2 + \cdots + |\xi_n - \eta_n|^2}$$

可以验证 $d(x, y)$ 满足定义 1 中的度量条件，因此 R^n 和 C^n 都是度量空间。　□

例 2　有界数列空间 l^∞。考虑所有有界的复数列组成的集合 X，任取 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots) \in X$，存在一个实数 C_x 使得

$$|\xi_j| \leqslant C_x,\ j = 1, 2, \cdots$$

记另一复数列 $y = (\eta_1, \eta_2, \cdots) \in X$。定义

$$d(x, y) = \sup_{j \in \underline{N}} |\xi_j - \eta_j|$$

其中，$\underline{N}$ 表示自然数集合 $\underline{N} = (1, 2, \cdots)$，则容易验证 $l^\infty = (X, d)$ 是度量空间。　□

例 3　可和数列空间 $l^p(\geqslant 1)$。显然，对每个 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^p$，有

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^p<\infty$$

任取复数列 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^p$, $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)\in l^p$ 且定义

$$d(x,y)=\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j-\eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

容易验证 $l^p=(X,d)$ 是度量空间。 □

1.1.2　收敛、Cauchy 序列、完备性

在一个度量空间 (X,d) 中，借助度量可以定义序列的极限。

定义 2(收敛与极限)　设 $\{x_n\}$ 是度量空间 (X,d) 中的序列，若存在 $x\in X$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}d(x_n,x)=0$$

则称序列 $\{x_n\}$ 收敛到极限 x 并记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$。否则 $\{x_n\}$ 不收敛，称为发散。

定义 3(Cauchy 列与完备性)　设 (X,d) 是度量空间，$\{x_n\}$ 是 X 中的序列。如果对任意小的正数 $\epsilon>0$ 存在 $N(\epsilon)>0$ 使得当 $m,n>N$ 时有

$$d(x_m,x_n)<\epsilon$$

则称 $\{x_n\}$ 为一 Cauchy 序列。进一步，如果 X 中的每个 Cauchy 序列都在 X 中收敛，即其极限 x 包含在 X 中，则称 X 为完备的。

实直线 R 和复平面 C 是完备的度量空间。去掉实直线 R 上的一个点 a 便得到不完备的空间 $R-\{a\}$。不难证明前面提到的 Euclid 空间 R^n 及酉空间 C^n，有界数列空间 l^∞，可和数列空间 $l^p(\geqslant 1)$ 都是完备的。任一非完备空间均可使其完备化。

1.1.3　赋范空间、Banach 空间

为了使度量空间中的度量与线性空间中的代数运算结合起来，我们可在线性空间上建立向量的范数，它是向量模概念的推广。

定义 4(赋范空间)　记 X 为复数域 C 上的线性空间，在 X 上的一个范数是指一个从 X 到实数域 R 的函数：$x\mapsto\|x\|$ 且满足下列条件：

1. $\|x\|\geqslant 0$。

2. $||x|| = 0$ 当且仅当 $x = 0$。
3. $||cx|| = |c|||x||$, $c \in C$。
4. $||x+y|| \leqslant ||x|| + ||y||$。

定义了范数的空间称为赋范空间并记为 $(X, ||\cdot||)$ 。

借助范数，可诱导向量空间上的度量。记 $x, y \in X$，则诱导度量可以表示为

$$d(x,y) = ||x-y||$$

若在该度量下 X 是完备的，则称 X 为 Banach 空间。记 S 为 Banach 空间 X 的子集，如果 $x, y \in S$ 暗示 $x+y \in S$ 且 $x \in S, c \in C$ 暗示 $cx \in S$，则称 S 为 X 的一子空间。进一步，如果 S 中的每个在 X 中是收敛的序列在 S 中有极限的话，那么 S 被称为 X 中闭的子空间。一般说来，一个子空间不必是闭的。但如果 X 是有限维空间，则其每个子空间都是闭的。

定义 5(等价范数) 设 X 是线性空间，$||\cdot||_1$ 和 $||\cdot||_2$ 是定义在 X 上的两个不同的范数。如果存在正数 a 和 b 使得对所有 $x \in X$ 满足

$$a||x||_2 \leqslant ||x||_1 \leqslant b||x||_2$$

则称范数 $||\cdot||_1$ 与 $||\cdot||_2$ 等价。在有限维线性空间 X 上，任何两个范数都是等价的。

考虑例 1 中讨论的 Euclid 空间 R^n 和酉空间 C^n。对 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，定义

$$||x|| = \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \cdots + |\xi_n|^2}$$

可以验证它满足范数定义中的 4 个条件。由此诱导出的度量为

$$d(x,y) = ||x-y|| = \sqrt{|\xi_1 - \eta_1|^2 + \cdots + |\xi_n - \eta_n|^2}$$

其中，$y = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$。从例 1 可知，在此度量下 R^n 空间和 C^n 空间都是完备的。因此，二者都是 Banach 空间。类似地，可以证明在例 2 和例 3 中讨论的 $l^\infty, l^p (p \geqslant 1)$ 空间也可以通过范数诱导度量使之成为 Banach 空间。此外，所有 $n \times m$ 复矩阵所组成的线性空间 $C^{n\times m}$ 在范数 $||A|| = \bar{\sigma}(A) = \sqrt[2]{\rho(A^*A)}$ 下也构成 Banach 空间。这里，$\rho(\cdot)$ 表示最大特征值，$\bar{\sigma}(\cdot)$ 表示最大奇异值。有关奇异值的严格定义和性质可参阅黄琳 (1984)。

1.1.4 内积空间、Hilbert 空间

内积空间是 Euclid 空间 R^n 的自然推广，其核心概念是正交。

定义 6(内积空间) 线性空间 X 上的一个内积是一个从 $X \times X$ 到复数域 C 上的函数: $(x,y) \mapsto \langle x, y \rangle$ 且满足下列条件:

1. $\langle x, x\rangle \geqslant 0$ (实数)。
2. $\langle x, x\rangle = 0$ 当且仅当 $x = 0$。
3. $\langle x, y\rangle$ 在 C 上对 y 是线性的。
4. $\overline{\langle x, y\rangle} = \langle y, x\rangle$。

定义了内积的线性空间称为内积空间并记为 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$。

在内积空间中，有著名的 Schwarz 不等式成立，即，任给 $x, y \in X$，有

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leqslant \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

借助内积, 可诱导线性空间上的范数 $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$，$x \in X$。由 Schwarz 不等式可容易验证它满足范数的 4 个条件。因此，内积空间必是赋范空间。同时，由内积诱导的范数满足平行四边形法则，即，$\forall x, y \in X$，总有 $||x+y||^2+||x-y||^2 = 2||x||^2+2||y||^2$。考虑内积空间上由诱导范数诱导的度量

$$d(x, y) = ||x - y|| = \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle}$$

X 可以是完备的，也可能是不完备的。如果一个定义了内积的线性空间在其诱导度量下是完备的则称之为 Hilbert 空间。显然，一个 Hilbert 空间也是一个 Banach 空间。对 Hilbert 空间中的任两个元 x, y，如果满足 $\langle x, y\rangle = 0$, 则称之为正交的，记为 $x \perp y$。若 $x \perp y$，则有 $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$。一般地，如果 S 是 X 的一个子集，则 X 中所有与 S 中每个元都正交的元组成的集合用 $S^{\perp}$ 表示。对任何子集 S，它的 $S^{\perp}$ 都是闭的。如果 S 是闭的，则 $S^{\perp}$ 称其为正交补。这样

$$X = S \oplus S^{\perp}$$

即表明任何 X 中的元都可唯一地表示成 S 中某元和 $S^{\perp}$ 某元的正交直和。

常见的 Hilbert 空间有：Euclid 空间 R^n 和酉空间 C^n 在内积 $\langle x, y\rangle = x^* y$ 下构成的 Hilbert 空间，这里 * 表示复共轭转置。复数矩阵空间 $C^{n\times m}$ 在内积

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^* B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \bar{a}_{ij} b_{ij};\quad \forall A, B \in C^{n\times m}$$

下构成 Hilbert 空间。区间 $[a, b]$ 上所有连续函数组成的空间 $C[a, b]$ 在内积

$$\langle x, y\rangle = \int_a^b x^*(t) y(t) \mathrm{d}t$$

下也可构成 Hilbert 空间。

1.1.5　线性算子及其范数

定义 7(线性算子)　设 X, Y 是同一数域 K 上的两个向量空间，T 是一个从 X 到 Y 的映射。如果 T 的定义域 $D(T)$ 是 X 的向量子空间，T 的值域 $R(T)$ 包含在

Y 中且对所有 $x,y\in D(T)$ 和任意的 $\alpha,\beta\in K$ 有

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty \tag{1.1}$$

成立，则称 T 是线性算子。

定义 8(线性有界算子) 设 X,Y 是同一数域 K 上的两个赋范空间，$T:X\mapsto Y$ 是一线性算子。如果存在常数 $c>0$，使得对任意 $x\in D(T)$，有

$$||Tx||_Y\leqslant c||x||_X \tag{1.2}$$

成立，则称 T 是有界算子。否则，称 T 是无界算子。在下面，为简单起见，我们通常省去上式中用来指明范数计算空间的下标而简记为 $||Tx||\leqslant c||x||$。

有界线性算子的定义与微积分中函数有界的定义是不一样的。有界函数是指值域有界。而有界算子是指 $D(T)$ 中的有界集在值域空间 Y 中的像集也为有界集。例如，$f(x)=x$ 是 R 到 R 的有界线性算子，但不是 R 上的有界函数。另一方面，式 (1.2) 表明

$$\frac{||Tx||}{||x||}\leqslant c,\quad \forall x\neq 0\in X$$

因此，对所有 $x\neq 0\in D(T)$，与上式左边所对应的数集必有上确界 (Supremum, 简记 sup)。从而，算子 T 的范数 (或增益) 可以定义为

$$||T||=\sup_{x\neq 0}\frac{||Tx||}{||x||} \tag{1.3}$$

显然，由定义 (1.3) 可得

$$\frac{||Tx||}{||x||}\leqslant ||T||\leqslant c,\quad x\neq 0\in D(T)$$

等价地

$$||Tx||\leqslant ||T||||x||\leqslant c||x||,\quad x\in D(T)$$

另一方面，对任意 $x,y\in D(T)$，有

$$\begin{aligned}||T||&=\sup_{x\neq 0}\tfrac{||Tx||}{||x||}\geqslant \sup_{x\neq 0,||x||\leqslant 1}\tfrac{||Tx||}{||x||}\geqslant \sup_{||x||\leqslant 1}||Tx||\\&\geqslant \sup_{||x||=1}||Tx||=\sup_{y\neq 0}||T\frac{y}{||y||}||=\sup_{y\neq 0}\frac{||Ty||}{||y||}=||T||\end{aligned}$$

因此

$$||T||=\sup_{x\neq 0}\frac{||Tx||}{||x||}=\sup_{||x||\leqslant 1}||Tx||=\sup_{||x||=1}||Tx|| \tag{1.4}$$