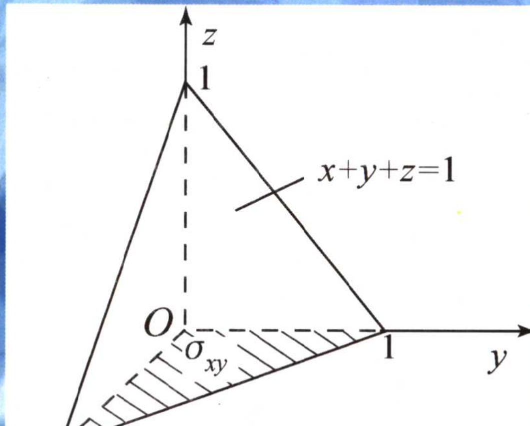
高等学校理工科基础课教材

向量分析与场论

（第二版）

杨永发　徐　勇　编著



南開大學出版社
NANKAI UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

向量分析与场论 / 杨永发,徐勇编著. —2 版. —天津:南开大学出版社,2006.9

高等学校理工科基础课教材

ISBN 7-310-01157-0

Ⅰ. 向… Ⅱ. 杨… Ⅲ. ①向量分析—高等学校—教材②场论—高等学校—教材 Ⅳ. ①O183.1②O412.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 102270 号

南开大学出版社出版发行

出版人:肖占鹏

地址:天津市南开区卫津路 94 号　邮政编码:300071

营销部电话:(022)23508339　23500755

营销部传真:(022)23508542　邮购部电话:(022)23502200

*

天津市蓟县宏图印务有限公司印刷

全国各地新华书店经销

*

2006 年 9 月第 1 版　2006 年 9 月第 1 次印刷

880×1230 毫米　32 开本　5.375 印张　150 千字

定价:15.00 元

如遇图书印装质量问题,请与本社营销部联系调换,电话:(022)23507125

内容提要

本书是为工科大学“向量分析与场论”课程编写的教材，内容包含向量的运算与向量值函数分析，数量场的方向导数与梯度，向量场的通量与散度、环量与旋度，保守场，管形场，调和场，平面向量场，正交曲线坐标系等. 各节中均含有适量的练习题，章末附有习题，可分别供读者掌握基本知识、基本计算方法和拓宽知识面使用，书末附有练习题、习题参考答案、哈密尔顿算子和正交曲线坐标系中基向量的导数公式三部分内容作为附录，供有兴趣的读者和工程技术人员参阅使用.

本书内容丰富，选材适当，重视与物理学、电学、力学等学科的联系，便于教学使用，可作为高等工科院校基础课教材，适合机、电类及物理类专业使用，也可供工程技术人员参考阅读.

第一版前言

本书是根据国家教委1987年批准印发的高等工业学校《数学课程教学基本要求》编写的向量分析与场论课程教材，通过对内容作适当取舍，也可供各类成人高等工业院校及高等教育自学考试作为教材使用，并可供工程技术人员参考.

本书第一章为向量函数分析部分，第二章至第六章为场论部分，两部分内容相对独立，读者可根据需要学习其中一部分或全部.第七章为选学内容，供有关专业选用.各章中加“*”号的内容为超出大纲部分，初学者可跳过不学.教学安排上，第一章约需4学时，第二章至第六章约需12学时，完成全书教学需20学时左右.

本书由杨永发主编，杨永发、籍明文、李景和编写，于慎根教授、刘国欣教授仔细审阅了原稿，提出了许多很好的建议.本书在编写过程中，还得到河北工业大学工程数学教研室同志们的大力支持和帮助，作者在此一并致以谢意.

对于书中的缺点和不足之处，作者热忱希望使用本书的教师和同学批评指正，以便再版时修正.

编者

1997年7月

第二版前言

本书第一版于1997年出版. 2003年，经过较大规模的修订，我们将本书内容与复变函数论、积分变换等内容，一起并入《工程数学基础》一书. 作为工科大学机、电和物理类专业的教材，仍由南开大学出版社出版. 自出版以来，本书一直被河北工业大学等多所院校选作教材，在读者中产生了很好的影响，对教学工作起到了积极的推动作用. 在广泛征求使用本书的教师和学生意见的基础上，结合课程改革的新要求，我们对本书进行了再次修订.

此次再版，保留了原书的风格和主要内容，对部分内容进行了改写，体例也有所改动. 主要包括：进一步规范了全书的符号，添加了数量场沿曲线方向导数、向量场应用举例等内容，加强了哈密尔顿算子的使用；去掉了“微分形式的外微分及其应用”一章，添写了“平面向量场”一章和附录“正交曲线坐标系中基向量的导数公式”等内容. 对全书的内容、语言进行了推敲，使之叙述更严谨，语言更流畅、简洁、易懂. 在各节中穿插安排了反映教学基本内容和基本计算方法的练习题，并对各章末的习题进行了补充、改写.

第二版由杨永发、徐勇编写，于慎根教授对此次修订提出许多具体的建议，南开大学出版社李正明编审对本书的出版作了大量的工作，作者在此对二位先生表示感谢. 同时作者还感谢使用本书第一版的教师和学生，是他们的支持促成了本书的再次修订出版.

由于学识所限，书中尚有许多不足之处，恳请各位读者批评指正.

作者

2006年6月

目 录

第一章　向量与向量函数

向量与向量函数是研究物理场问题的重要工具. 这一章我们讨论向量与向量函数分析的一般结果.

§1.1　几何向量及其运算

1.1.1　几何向量

设 R^3 表示 3 维欧氏空间，R^3 中的向量称为**几何向量**. 设 $\boldsymbol{P}$ 为 R^3 中一点，以原点 $\boldsymbol{O}$ 为起点、$\boldsymbol{P}$ 为终点的向量称为 $\boldsymbol{P}$ 点的**向径向量**，记为 $\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{r}$ 也叫 $\boldsymbol{P}$ 点的**位置向量**(Position vector)(图 1.1). 设 $\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$ 是 R^3 中任意两点，$\boldsymbol{r}_1$ 记 $\boldsymbol{P}_1$ 点的位置向量，$\boldsymbol{r}_2$ 记 $\boldsymbol{P}_2$ 点的位置向量，则

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$$

表示以 $\boldsymbol{P}_1$ 为起点，$\boldsymbol{P}_2$ 为终点的向量(图 1.2).

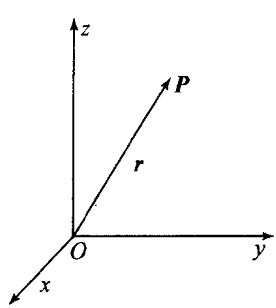


图 1.1

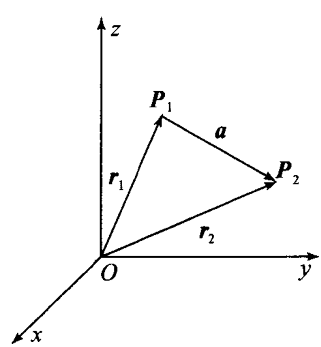


图 1.2

在空间 R^3 中，任取一点作为原点，建立一空间直角坐标系，以 $\boldsymbol{i}$，

$\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 记 Ox,Oy,Oz 轴上的单位向量，设点 $\boldsymbol{P}$ 的坐标为(x,y,z)，则 $\boldsymbol{P}$ 的向径向量

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}. \tag{1.1}$$

设 $\boldsymbol{P}_1$、$\boldsymbol{P}_2$ 的坐标分别为(x_1,y_1,z_1)，(x_2,y_2,z_2)，记

$$a_x=x_2-x_1,\quad a_y=y_2-y_1,\quad a_z=z_2-z_1,$$

则向量

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}. \tag{1.2}$$

a_x,a_y,a_z 叫向量 $\boldsymbol{a}$ 的**坐标**. 也常将向量 $\boldsymbol{a}$ 表示为

$$\boldsymbol{a}=[a_x,a_y,a_z]^T=\begin{bmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{bmatrix}, \tag{1.3}$$

式(1.3)叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的**坐标表示**. 由式(1.1)，点 $\boldsymbol{P}$ 的向径向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标表示为

$$\boldsymbol{r}=[x,y,z]^T=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}. \tag{1.4}$$

向量 $\boldsymbol{a}$ 的长度称为向量的**模**，记为$|\boldsymbol{a}|$或 a，由式(1.2)，

$$a=|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}. \tag{1.5}$$

向径向量 $\boldsymbol{r}$ 的模为

$$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{1.6}$$

记 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$，$\boldsymbol{a}^0$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的**单位向量**，

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^0|\boldsymbol{a}|. \tag{1.7}$$

设向量 $\boldsymbol{a}$ 和 Ox,Oy,Oz 轴的夹角分别为 α,β,γ，称 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**. $\boldsymbol{a}$ 的方向用方向余弦来表示. $\boldsymbol{a}$ 的单位向量 $\boldsymbol{a}^0$ 可以表示为

$$\boldsymbol{a}^0=[\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma]^T. \tag{1.8}$$

练习 1.1　求点 $\boldsymbol{P}(3,-2,3)$的向径向量 $\boldsymbol{r}$，写出 $\boldsymbol{r}$ 的模和方向余弦，求 $\boldsymbol{r}$ 和三个坐标轴的夹角.

练习 1.2　设 $\boldsymbol{P}_1(1,1,3)$，$\boldsymbol{P}_2(2,3,1)$，求以 $\boldsymbol{P}_1$ 为起点，以 $\boldsymbol{P}_2$ 为终

点的向量 $\boldsymbol{a}$，并求出 $\boldsymbol{a}$ 的模及 $\boldsymbol{a}$ 的一个单位向量.

1.1.2 向量的运算

利用向量的坐标表示式，可以得到向量运算的坐标表示式.

(1)**加法** 设向量 $\boldsymbol{a}=[a_x,a_y,a_z]^T$，$\boldsymbol{b}=[b_x,b_y,b_z]^T$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的加法为

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=[a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z]^T. \tag{1.9}$$

几何上，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 表示以向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的对角线向量(图 1.3).

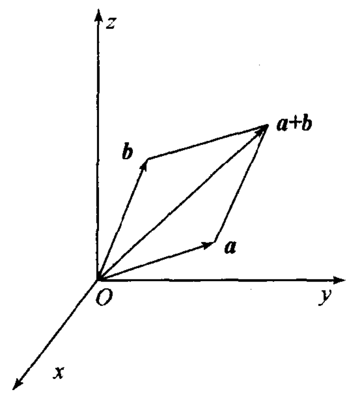


图 1.3

(2)**数乘** 设向量 $\boldsymbol{a}=[a_x,a_y,a_z]^T$，$k$ 为常数，则数 k 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积为

$$k\boldsymbol{a}=[ka_x,ka_y,ka_z]^T. \tag{1.10}$$

几何上，$k\boldsymbol{a}$ 表示一个与 $\boldsymbol{a}$ 平行的向量. 当 $k>0$ 时，$k\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 $k<0$ 时，$k\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向.

(3)**数量积**(dot product) 设 $\boldsymbol{a}=[a_x,a_y,a_z]^T$，$\boldsymbol{b}=[b_x,b_y,b_z]^T$，两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积表示为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \tag{1.11}$$

两向量的数量积是一个数. 利用数量积，向量 $\boldsymbol{a}$ 的模表示为

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.$$

可以证明，向量的数量积满足如下的柯西不等式(Cauchy inequality)

$$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|,$$

于是可定义

$$\theta(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\cos^{-1}\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|} \tag{1.12}$$

为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

当 $\theta(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{\pi}{2}$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 时，称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 正交.

利用式(1.12)，可将 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的数量积表示为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}). \tag{1.13}$$

其中 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 称为向量 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的**投影**(图 1.4).

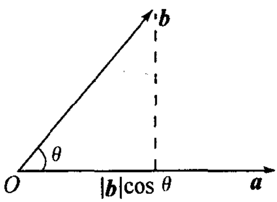


图 1.4

(4) **向量积**　设向量 $\boldsymbol{a}=[a_x,a_y,a_z]^T$，$\boldsymbol{b}=[b_x,b_y,b_z]^T$，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积表示为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}. \tag{1.14}$$

$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积是一个向量. 由式(1.14)可以得到，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 和向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都正交，因此 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 所确定的平面. 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行时

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}.$$

交换两向量的顺序，向量积差一个符号，$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

(5) **混合积**(parallelopipedal product)　设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是三个向量，乘积

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$$

称为三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的混和积，记为 $[\boldsymbol{abc}]$，即

$$[\boldsymbol{abc}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}\,. \tag{1.15}$$

设向量 $\boldsymbol{a}=[a_x,a_y,a_z]^T$，$\boldsymbol{b}=[b_x,b_y,b_z]^T$，$\boldsymbol{c}=[c_x,c_y,c_z]^T$，则由式(1.11)和(1.14)，可以得到

$$[\boldsymbol{abc}]=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix} \tag{1.16}$$

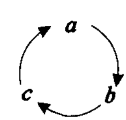


图 1.5

由行列式的性质，可以看到，三个向量的混和积具有循环轮换性，即

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} \tag{1.17}$$

或记为(图 1.5)

$$[\boldsymbol{abc}]=[\boldsymbol{bca}]=[\boldsymbol{cab}].$$

式(1.17)可以由式(1.16)利用行列式的性质得到.

混和积的几何意义是以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积，且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 按右手系排列时，$[\boldsymbol{abc}]$ 为正；$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 按左手系排列时，$[\boldsymbol{abc}]$ 为负(图 1.6).

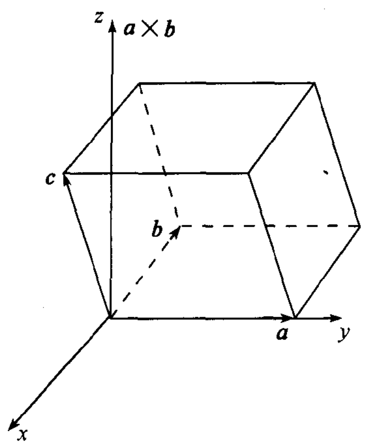


图 1.6

(6)**三重向量积**(triple vector product)　设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是三个向量，乘积

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} \tag{1.18}$$

称作三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的**三重向量积**.

由向量积的定义，$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ 垂直于向量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，故 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ 位于向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 所确定的平面上.

定理 1.1　三重向量积 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ 可以表示为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的线性组合

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}. \tag{1.19}$$

证　设 $\boldsymbol{a}=[a_x,a_y,a_z]^T,\boldsymbol{b}=[b_x,b_y,b_z]^T,\boldsymbol{c}=[c_x,c_y,c_z]^T$，则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k},$$

故

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

$$=\left\{c_z\begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}-c_y\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}+a_xb_xc_x-a_xb_xc_x\right\}\boldsymbol{i}$$

$$+\left\{c_x\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}-c_z\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}+a_yb_yc_y-a_yb_yc_y\right\}\boldsymbol{j}$$

$$+\left\{c_y\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}-c_x\begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}+a_zb_zc_z-a_zb_zc_z\right\}\boldsymbol{k},$$

展开整理,得

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}&=(c_xa_x+c_ya_y+c_za_z)(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&\quad-(c_xb_x+c_yb_y+c_zb_z)(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\\&=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}.\end{aligned}$$

利用定理 1.1,因为

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}, \tag{1.20}$$

故三重向量积分不满足结合律.

例 1.1 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ 是 4 个向量,证明

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}).$$

证 记 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}$,由式(1.17),得

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{p}=(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}.$$

又由式(1.19),

$$\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})\times\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{d}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})\boldsymbol{c},$$

于是得到

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})&=[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{d}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})\boldsymbol{c}]\cdot\boldsymbol{b}\\&=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}).\end{aligned}$$

例 1.2 设电流 I 沿半径为 R 的圆柱体轴线通过,电流密度 $\delta=\frac{I}{\pi R^2}$为常数.根据物理学中的定律,电流 I 形成的磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 的模为

$$|\boldsymbol{H}|=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\delta r, & \text{当 } r\leqslant R;\\ \dfrac{1}{2}\delta R^2\dfrac{1}{r}, & \text{当 } r>R.\end{cases}$$

其中 r 为磁场中任一点 M 到圆柱体轴线的距离，$r=\sqrt{x^2+y^2}$. 求磁场强度 $\boldsymbol{H}$.

解 选取坐标系 $Oxyz$，使 Oz 轴与圆柱体轴线方向一致，指向电流 I 的方向(图 1.7). 设 $M(x,y,z)$ 为磁场中一点，取 $\boldsymbol{r}$ 为由圆柱体轴线指向 M 点的向量，$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$，因磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 与电流 I 的方向按右手定则确定，故 $\boldsymbol{H}$ 与向量

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 0 & 0 & 1\\ x & y & 0\end{vmatrix}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}$$

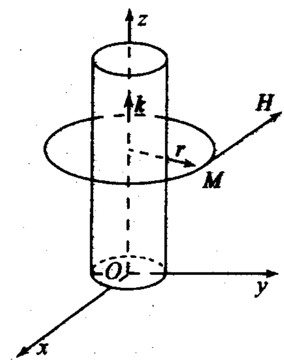


图 1.7

方向一致，故

$$\boldsymbol{H}^0=\frac{\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}|}=\frac{1}{r}(-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}).$$

于是

$$\boldsymbol{H}=|\boldsymbol{H}|\boldsymbol{H}^0=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\delta(-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}), & \text{当 } r\leqslant R;\\ \dfrac{1}{2}\delta R^2\dfrac{1}{r^2}(-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}), & \text{当 } r>R.\end{cases}$$

练习 1.3 设 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=8\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-11\boldsymbol{k}$，(1)计算 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；(2)设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的起点在同一点，证明它们的终点在同一个平面上.

练习 1.4 证明向量 $\boldsymbol{a}=\left[3,-\dfrac{1}{3},2\right]^T$ 与 $\boldsymbol{b}=[4,6,-5]^T$ 正交.

练习 1.5 证明向量 $\boldsymbol{a}=[4,10,6]^T$ 与 $\boldsymbol{b}=[8,20,12]^T$ 平行.

练习 1.6 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{k}$，试计算

(1)$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$.

(2) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$.

练习 1.7　设有 3 个力：$\boldsymbol{F}_1=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}$，起点为 $(2,1,-1)$；$\boldsymbol{F}_2=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，起点在 $(0,0,0)$；$\boldsymbol{F}_3=\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$，起点在点 $(1,1,1)$. 求 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3$ 关于点 $(3,2,1)$ 的力矩的和.

§1.2　向量值函数的概念

以 R^n 表示 n 维欧氏空间（简称为 n 维空间），我们考虑定义域在 n 维空间内，值域在 m 维空间的函数.

1.2.1　向量值函数的定义

定义 1.1　设 D 是 n 维空间 R^n 的一个子集，若对于 D 中任一个向量 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T$，依据某一个法则 f，有 m 维空间 R^m 中唯一的一个向量 $\boldsymbol{y}=[y_1,y_2,\cdots,y_m]^T$ 与之对应，则称 f 是定义在 D 上的一个**向量值函数**(vector-valued function)，记作

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}:D&\to R^m,\\ \boldsymbol{x}_1&\mapsto \boldsymbol{y}.\end{aligned}\tag{1.21}$$

D 称为函数 $\boldsymbol{f}$ 的定义域，$\boldsymbol{y}$ 称为 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 点的函数值.

为方便起见，上述向量值函数也常简记作

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x}\in D,\ \boldsymbol{y}\in R^m.\tag{1.22}$$

向量值函数(1.21)式的每个分量是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一个 n 元数量函数

$$f_i(\boldsymbol{x})=f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n),i=1,2,\cdots,m,$$

而式(1.21)对应于 m 个 n 元数量值函数：

$$\begin{cases}y_1=f_1(\boldsymbol{x})=f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),\\ y_2=f_2(\boldsymbol{x})=f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n),\\ \cdots\cdots\\ y_m=f_m(\boldsymbol{x})=f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n).\end{cases}$$

为了运算方便，常把 R^n 与 R^m 中的向量写成列向量. 这时，记 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T$，则式(1.21)可表示为

$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ f_2(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_m(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n) \end{pmatrix}.$$

特别当 $m=1$ 时,函数值 y 是一个数量,这时

$$y=f(\boldsymbol{x})=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

是一个**数量函数**.

例 1.3 设 $I=\{t\,|\,t_0\leqslant t\leqslant T\}$,则函数

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}: I &\to R^3, \\ t &\mapsto (x,y,z) \end{aligned} \tag{1.23}$$

是以实变量 t 为自变量的向量值函数,其图形是一条空间曲线,记为 l. 若将式(1.23)展开表示为

$$\boldsymbol{f}:\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \quad t\in[t_0,T], \\ z=z(t), \end{cases} \tag{1.24}$$

式(1.24)也常称为曲线 l 的**参数方程**.

例 1.4 设 $E\subset R^2$ 是一个平面区域,定义在 E 上的函数

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}: E &\to R^3, \\ (u,v) &\mapsto (x,y,z) \end{aligned} \tag{1.25}$$

表示一个空间曲面 S,写为参数式方程,S 也表示为

$$S:\begin{cases} x=x(u,v), \\ y=y(u,v), \quad (u,v)\in E. \\ z=z(u,v), \end{cases} \tag{1.26}$$

例 1.5 物理中的三维向量场常表示为函数

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}: R^3 &\to R^3, \\ (x,y,z) &\mapsto (P,Q,R). \end{aligned} \tag{1.27}$$

在后面的讨论中,也常将函数 $F(x,y,z)$ 表示为分向量形式

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}. \tag{1.28}$$

在向量值函数中,有一类函数值得特别注意,这就是线性函数.

例 1.6 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$是一个 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T\in$