

QINGNIAN
ZIXUE
FUXI
CONG
SHU

北京市海淀区

《青年自学复习丛书》编写组编

青年自学复习丛书

数学

青年自学复习丛书

数 学

北京市海淀区

《青年自学复习丛书》编写组编

陕西科学技术出版社

青年自学复习丛书

数 学

北京市海淀区《青年自学复习丛书》编写组编

陕西科学技术出版社出版

(西安北大街 131 号)

陕西省新华书店发行 国营五二三厂印刷

开本 787×1092毫米 1/32 22.5 印张 651 千字

1987 年 3 月第 1 版 1987 年 3 月第 1 次印刷

ISBN 7-5369-0015-5/G·6

统一书号: 7202·144 定价: 4.10 元

本书编者：

代数	北大附中	周沛耕	张思明
三角	北航附中	王人伟	
立体几何	北京八一中学	魏 琳	
解析几何	北京石油附中	薛文续	

审 定：海淀教师进修学校 赵大梯

前 言

为了满足广大自学青年高考复习的要求，我们组织北京市海淀区教师进修学校及海淀区各中学富有教学经验的教师，根据1986年12月国家教育委员会讨论制定的、1987年春季发行的全日制中学各学科教学大纲（亦即考试大纲）的各项规定和精神，编写了这套复习丛书。丛书体现了现行教学大纲精减内容、减轻负担、明确具体的精神。丛书包括语文、数学、物理、化学、生物、政治、历史、地理等八个学科，各学科的复习内容，都紧紧围绕现行教材，强调了基础知识，安排了一定量的将知识转化为能力的练习，并体现了多层次、多结构的特点。同时，还包括有利于了解掌握和消化知识而编写的自测练习和模拟练习等，附有参考答案，可供读者进行自测。

丛书力争做到内容少而精，重点突出，行文言简意赅，深入浅出。自学的同志使用本丛书时，首先要充分地理解和切实地掌握知识，然后做练习。读者做练习，可根据自己掌握知识的程度有所选择，可多可少，不一定全部做。

丛书编写仓促，如有疏漏或错误之处，欢迎读者批评指正。

编 者

目 录

第一部分 代 数

第一章 幂函数 指数函数和对数函数	(1)
一、集合的基础知识.....	(1)
二、映射 函数概念 逆映射 一一映射 反函数概念.....	(8)
三、函数的单调性和奇偶性概念.....	(19)
四、函数的图象.....	(20)
五、幂函数 指数函数 对数函数.....	(26)
六、与幂函数、指数函数、对数函数有关的 方程和不等式.....	(36)
七、自我检查题 (一)	(38)
第二章 数列与数学归纳法	(40)
一、数列的基础知识.....	(40)
二、等差数列.....	(44)
三、等比数列.....	(49)
四、递推关系.....	(54)
五、数列的求和.....	(61)
六、数学归纳法.....	(63)
七、自我检查题 (二)	(78)
第三章 不等式	(81)
一、基础知识.....	(81)
二、不等式的证明.....	(102)
三、不等式的一些应用.....	(115)
四、自我检查题 (三)	(118)
第四章 复数	(119)

一、基础知识	(119)
二、自我检查题(四)	(152)
第五章 排列、组合、二项式定理	(154)
一、事件、原理和基本思维方式	(154)
二、排列问题	(157)
三、组合问题	(160)
四、综合问题	(168)
五、二项式定理及其推论	(172)
六、自我检查题(五)	(182)
自我检查题答案	(184)

第二部分 三角函数

第一章 三角函数	(200)
一、基本概念	(200)
二、本章小结	(232)
三、自我检查题(一)	(233)
第二章 反三角函数	(235)
一、基本概念	(235)
二、本章小结	(246)
三、自我检查题(二)	(246)
第三章 三角函数的恒等变形	(248)
一、基本概念	(248)
二、本章小结	(273)
三、自我检查题(三)	(274)
第四章 解三角形	(276)
一、基本概念	(276)
二、本章小结	(288)
三、自我检查题(四)	(288)
第五章 解单的三角方程及不等式	(290)
一、基本概念	(290)

二、本章小结	(308)
三、自我检查题 (五)	(309)
自我检查题解答	(312)

第三部分 立体几何

第一章 直线与平面	(320)
------------------------	---------

一、基础知识	(320)
1. 空间图形	(320)
2. 平面公理及其推论	(322)
3. 空间两条直线	(325)
4. 空间直线和平面	(331)
5. 三垂线定理及其逆定理	(340)
6. 空间两个平面	(341)

二、习题课	(349)
1. 反证法和同一法	(349)
2. 异面直线	(352)
3. 射影	(356)
4. 二面角	(358)
5. 三个平面的位置关系	(362)
6. 共面、共线、共点的判定	(366)
7. 应用题	(368)

三、自我检查题 (一)	(370)
-------------------	---------

第二章 多面体	(372)
----------------------	---------

一、基础知识	(372)
1. 多面体	(372)
2. 棱柱	(372)
3. 棱锥和棱台	(377)
4. 拟柱体	(382)
5. 多面体直观图的画法	(383)
6. 多面体的表面积	(385)

7. 多面体的体积	(387)
二、习题课	(396)
1. 一条侧棱和底面垂直的三棱锥	(396)
2. 四面体	(400)
3. 正方体和长方体	(405)
4. 一般多面体	(408)
5. 多面体的截面	(412)
6. 应用题	(416)
三、自我检查题 (二)	(417)
第三章 旋转体	(419)
一、基础知识	(419)
1. 圆柱、圆锥、圆台、球	(419)
2. 圆柱、圆锥、圆台、球的直观图的画法	(421)
3. 旋转体的基本性质	(421)
4. 旋转体的表面积	(429)
5. 旋转体的体积	(436)
二、习题课	(440)
1. 圆柱、圆锥、圆台	(440)
2. 球	(444)
3. 旋转体的面积与体积	(445)
4. 几何体的接、切问题	(447)
5. 应用题	(452)
三、自我检查题 (三)	(456)
复习题	(458)
自我检查题答案	(460)

第四部分 解析几何

第一章 坐标法	(469)
一、基础知识	(469)

1. 有向线段和平面直角坐标系	(469)
2. 用坐标法研究两点间距离、线段的定比分 点及三角形面积	(472)
3. 曲线和方程	(482)
二、习题课	(493)
1. 解析法	(493)
2. 曲线和方程	(496)
三、自我检查题 (附答案)	(499)
第二章 直线	(504)
一、基础知识	(504)
1. 直线的倾斜角和斜率	(504)
2. 直线方程的几种形式	(510)
3. 两直线的位置关系	(516)
二、习题课	(529)
1. 求直线方程	(529)
2. 利用直线方程研究几何图形的性质	(535)
三、自我检查题 (附答案)	(541)
第三章 圆锥曲线	(547)
一、圆	(547)
1. 圆的标准方程	(547)
2. 圆的确定	(550)
3. 圆和直线的关系	(551)
4. 圆系	(554)
5. 习题课	(555)
二、椭圆	(563)
1. 椭圆的定义	(563)
2. 椭圆的标准方程	(564)
3. 椭圆的几何性质	(566)
4. 习题课	(573)
三、双曲线	(580)

1. 双曲线的定义和标准方程	(580)
2. 双曲线的几何性质	(582)
3. 习题课	(586)
四、抛物线	(594)
1. 抛物线的定义及方程	(594)
2. 抛物线的几何性质	(596)
3. 习题课	(598)
五、自我检查题(附答案)	(606)
第四章 坐标变换	(611)
一、坐标轴的平移和旋转	(611)
1. 坐标轴的平移	(611)
2. 坐标轴的旋转	(619)
二、自我检查题(附答案)	(631)
第五章 参数方程	(636)
一、参数方程	(636)
1. 参数方程的概念	(636)
2. 参数方程化普通方程	(637)
3. 求曲线的参数方程	(638)
4. 普通方程化参数方程	(642)
5. 圆的渐开线和摆线	(644)
二、习题课	(646)
1. 参数方程化普通方程	(646)
2. 直线参数方程的应用	(649)
3. 圆、椭圆、双曲线参数方程的应用	(654)
4. 抛物线参数方程的应用	(659)
5. 求曲线的参数方程	(663)
三、自我检查题(附答案)	(667)
第六章 极坐标系	(675)
一、基础知识	(675)
1. 极坐标系	(675)

2. 曲线的极坐标方程	(677)
3. 三种圆锥曲线的统一极坐标方程	(680)
4. 极坐标与直角坐标的关系	(681)
5. 极坐标方程的图形	(683)
二、习题课	(686)
1. 由曲线求极坐标方程	(686)
2. 由方程研究曲线的性质	(691)
三、自我检查题 (附答案)	(701)

第一部分 代 数

第一章 幂函数 指数函数 和对数函数

一 集合的基础知识

集合是数学研究的基本对象之一，按一定规律或一定限定条件给出的一些点、一些曲线、一些数、一些代数式以及一些事物就形成各种集合。集合中包括的对象叫集合的元素。一个集合，如果给出了它的全部元素或给出了该集合中任一元素所具备的特性，我们就说这个集合给定了。对任一给定的集合而言，我们总有办法鉴定一个对象是否为该集合的元素。

一般常用大写拉丁字母表示集合，小写拉丁字母表示某集合的元素。元素与集合间是从属关系。大写拉丁字母中，有些字母习惯上表示某些特殊的集合。例如 R 表示实数集， Z 表示整数集， N 表示自然数集， Q 表示有理数集， C 表示复数集等。其中 R ， Q 在它们右上方加上一定正、负号后形成的 R^+ 、 Q^- 等表示正实数集、负有理数集等。

集合与元素间的关系符号有两种：

$a \in B$ ：表示 a 是集合 B 的元素，读作“ a 属于 B ”，

$a \notin B$ ：表示 a 不是集合 B 的元素，读作“ a 不属于 B ”。例如： $\lg 7 \in R^+$ ， $\pi \notin Q$ ，若 $x^2 + 1 = 0$ ，则 $x \notin R$ 等。

集合的表达方式依赖于集合的给定方式，通常有列举式、描述式。

列举式要求把集合的元素一一列出。元素间用“，”隔开，有规律的较多元素的集合用列举式时，允许用省略符“……”。例如：自然数中不超过13的质数集合是{2, 3, 5, 7, 11, 13}；方程组 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ y^2 - 4x = 0 \end{cases}$ 的解集是 $\{(1, 2), (1, -2)\}$ ；前100个自然数的平方的集合是{1, 4, 9, ..., 9801, 10000}。

描述式须在{ }内的左部写出该集合中元素的代表符号或代表式，在右部说明该集合中元素的特性。说明时允许多层次描述。例如：不等式 $x^2 + 5x + 6 \leq 0$ 的解集是 $\{x | -3 \leq x \leq -2\}$ ；绝对值大于2的非整数的有理数集是 $\{x | |x| > 2, x \in \mathbb{Q}, x \notin \mathbb{Z}\}$ ；XOY平面中，坐标轴上的点集是 $\{(x, y) | x \cdot y = 0, x, y \in \mathbb{R}\}$ 等。

在不至于引起误解的前提下，也可以把列举式与描述式结合起来。例如 $\{2k+1, k \in \mathbb{Z}\}$, $\left\{\left(m, \frac{1}{m}\right), m \in \mathbb{N}\right\}$ 等。

表示数轴上某连通区域的实数集合常用区间表示。区间的种类分开区间、闭区间、半开半闭区间以及含参数的区间四种。例如集合 $\{x | -1 < x < 2\}$ 可写为 $(-1, 2)$ ；集合 $\{x | 3 \leq x \leq 4\}$ 可写为 $[3, 4]$ ；集合 $\{x | x \leq 0\}$ 可写成 $(-\infty, 0]$ ； $\left[k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{3}\right] (k \in \mathbb{Z})$ 表示 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right], \left[\frac{7}{6}\pi, \frac{4\pi}{3}\right], \left[-\frac{5\pi}{6}, -\frac{2\pi}{3}\right], \dots$ 这样无限多个具有一定共性的区间等。

例1 用适当方法表达出 XOY 平面内，在坐标轴上但不是原点的点集。

分析 坐标轴上点的特性可以用 $x \cdot y = 0$ 这种简洁形式描述，在这个基础上去掉原点。原点坐标的特性是 $x = y = 0$ 。因此“ x, y 不全为0”就是原点之外的点的坐标条件。

这样就有表达法一: $\{(x, y) | x \cdot y = 0, x, y \text{ 不全为 } 0\}$.
 这种表达法中的“ x, y 不全为 0”用较简洁的解析式 $x^2 + y^2 \neq 0$ 替代, 则成为另一种表达方法:

$$\{(x, y) | x \cdot y = 0, x^2 + y^2 \neq 0\}$$

如果进一步把描述部分的内容合并, 充分发挥代数式蕴含的运算意义和逻辑意义, 又可写为:

$$\{(x, y) | \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0\}.$$

例 2 把集合 $\{-3, -1, 1, 3, 5, \dots, 99, 101\}$ 用另一种方式表达出来.

分析 这是一些奇数的集合. 采用描述方式时, 必须确定“ $2k-1$ ”中的整数 k 的范围. 设 $-3 = 2k_1 - 1$, $101 = 2k_2 - 1$, 可得 $k_1 = -1$, $k_2 = 51$. 于是可把集合表达为

$$\{t | t = 2k - 1, -1 \leq k \leq 51, k \in \mathbb{Z}\}.$$

如果把奇数写成 $2n-5$ 的形式, 那么本题条件下 $n=1, 2, \dots, 53$. 这样又可以把集合写为:

$$\{2n-5, n \leq 53, n \in \mathbb{N}\}.$$

注意到 $-3, -1, \dots, 101$ 共有 53 个奇数. 按由小到大的顺序算起的第 27 个数是 49, 它是“中间位置数”的特点, 那么该集合中的元素都可写成“ $|t-49|=2k$ ”的形式, 其中 $k=0, 1, 2, \dots, 26$. 把 k 换成从 1 开始取值的参数, 又有另一种表达:

$$\{t | |t-49|+2=2n, n \leq 27, n \in \mathbb{N}\}.$$

我们看到, 这些不同的表达方法是各有特色的.

例 3 设集合 $A = \left\{ \alpha | \alpha = \frac{9m+1}{3}, m \in \mathbb{Z} \right\},$

$$B = \left\{ \beta | \beta = \frac{9n-2}{3}, n \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$C = \left\{ \gamma | \gamma = \frac{9k+4}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

用适当方式表达由 A 的元素或由 B 的元素或由 C 的元素形成的集合。

分析 一种容易想到的办法是

$$\left\{x \mid x = \frac{9m+1}{3} \text{ 或 } x = \frac{9n-2}{3} \text{ 或 } x = \frac{9k+4}{3}, k, n, m \in \mathbb{Z}\right\}.$$

这里的三个参数 m, n, k 取值范围相同, 可以用一个代替。上面的表达方法可改进为

$$\left\{x \mid x = \frac{9m+1}{3} \text{ 或 } x = \frac{9m-2}{3} \text{ 或 } x = \frac{9m+4}{3}, m \in \mathbb{Z}\right\}.$$

注意到 $\frac{9m+1}{3} = 3m + \frac{1}{3}$, $\frac{9m-2}{3} = 3m - \frac{2}{3} = (3m-1) + \frac{1}{3}$, $\frac{9m+4}{3} = 3m + \frac{4}{3} = (3m+1) + \frac{1}{3}$, 而 $3m, 3m-1, 3m+1$ 是一种完备的整数分类方式的特点, 就可以把 $3m$ 或 $3m-1$ 或 $3m+1$ 合并写为 $k (k \in \mathbb{Z})$ 。这样, 所求的表达方式成为

$$\left\{x \mid x = k + \frac{1}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

或者简记为

$$\left\{k + \frac{1}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

这几种表达方式的繁简程度的差别是很大的。

一般说来, 越简洁的表达, 越能准确地反映出集合的本来面目。

上面的几种表达方式都用到了了一定的参数。使用参数时, 应当力求缩减参数的数量, 同时要明确说明参数的取值范围。本题除用参数进行描述外, 还可以用 $\{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B$

或 $x \in C$ 或者用 $A \cup B \cup C$ 来表达。

两个（或多个）给定的集合。它们的元素的从属关系有两种情形：一种是存在这样的元素，这些元素同时属于两个集合；另一种是不存在同时属于两个集合的元素。

由两个集合 A, B 的公共元素组成的集合叫 A 与 B 的交集。记为 $A \cap B$ 。即是说：

$$A \cap B = \{x | x \in A, \text{ 且 } x \in B\}.$$

类似地可以定义 n 个集合的交集：

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \{x | x \in A_1, x \in A_2, \cdots, x \in A_n\}.$$

($n \in \mathbb{N}$)

如果集合 A 的任意一个元素都是集合 B 的元素，即 $A \cap B = A$ 。这时 A 称为 B 的子集。记为 $A \subseteq B$ 。当 $A \subseteq B$ 时，若存在元素 $x \in B, x \notin A$ ，则称 A 是 B 的真子集。记为 $A \subset B$ 。

如果集合 A 中的元素与集合 B 中的元素完全相同，就表明 $A \subseteq B$ ，且 $B \subseteq A$ 。这时我们说 A 与 B 是相等的。记为 $A = B$ 。

由 A 中的元素或 B 中的元素形成的集合叫 A 与 B 的并集。记为 $A \cup B$ 。即是说：

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

类似地可以定义 n 个集合的并集：

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{x | x \in A_1 \text{ 或 } x \in A_2 \cdots \text{ 或 } x \in A_n\}.$$

($n \in \mathbb{N}$)

下列基本关系是显而易见的。

$$A \subseteq A,$$

$$A \cap A = A, A \cup A = A,$$

$$\text{若 } A \subseteq B, B \subseteq C, \text{ 则 } A \subseteq C,$$

$$A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B, A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B,$$

$$A \cap B \subseteq A \cup B,$$

$$A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A,$$