QINGNIAN
ZIXUE
FUXI
CONG
SHU

北京市海淀区
《青年自学复习丛书》编写组编

青年自学复习丛书

数学

青年自学复习丛书

数　学

北京市海淀区
《青年自学复习丛书》编写组编

陕西科学技术出版社

青年自学复习丛书
数　学
北京市海淀区《青年自学复习丛书》编写组编
陕西科学技术出版社出版
（西安北大街131号）
陕西省新华书店发行　　国营五二三厂印刷
开本787×1092毫米　1/32　22.5印张　551千字
1987年3月第1版　　1987年3月第1次印刷
ISBN　7-5369-0015-5/G·6
统一书号：7202·144　定价：4.10元

本书编者：

代数	北大附中	周沛耕　张思明
三角	北航附中	王人伟
立体几何	北京八一中学	魏　琳
解析几何	北京石油附中	薛文续

审　　定：海淀教师进修学校　赵大悌

前　言

为了满足广大自学青年高考复习的要求，我们组织北京市海淀区教师进修学校及海淀区各中学富有教学经验的教师，根据1986年12月国家教育委员会讨论制定的、1987年春季发行的全日制中学各学科教学大纲（亦即考试大纲）的各项规定和精神，编写了这套复习丛书。丛书体现了现行教学大纲精减内容、减轻负担、明确具体的精神。丛书包括语文、数学、物理、化学、生物、政治、历史、地理等八个学科，各学科的复习内容，都紧紧围绕现行教材，强调了基础知识，安排了一定量的将知识转化为能力的练习，并体现了多层次、多结构的特点。同时，还包括有利于了解掌握和消化知识而编写的自测练习和模拟练习等，附有参考答案，可供读者进行自测。

丛书力争做到内容少而精，重点突出，行文言简意赅，深入浅出。自学的同志使用本丛书时，首先要充分地理解和切实地掌握知识，然后做练习。读者做练习，可根据自己掌握知识的程度有所选择，可多可少，不一定全部做。

丛书编写仓促，如有疏漏或错误之处，欢迎读者批评指正。

编　者

目　　录

第一部分　代　　数

第二部分　三角函数

第三部分　立体几何

第四部分 解析几何

第一部分 代　　数

第一章 幂函数 指数函数和对数函数

一 集合的基础知识

集合是数学研究的基本对象之一，按一定规律或一定限定条件给出的一些点、一些曲线、一些数、一些代数式以及一些事物就形成各种集合。集合中包括的对象叫集合的元素。一个集合，如果给出了它的全部元素或给出了该集合中任一元素所具备的特性，我们就说这个集合给定了。对任一给定的集合而言，我们总有办法鉴定一个对象是否为该集合的元素。

一般常用大写拉丁字母表示集合，小写拉丁字母表示某集合的元素。元素与集合间是从属关系。大写拉丁字母中，有些字母习惯上表示某些特殊的集合。例如R表示实数集，Z表示整数集，N表示自然数集，Q表示有理数集，C表示复数集等。其中R，Q在它们右上方加上一定正、负号后形成的R^+、Q^-等表示正实数集、负有理数集等。

集合与元素间的关系符号有两种：

$a\in B$：表示a是集合B的元素，读作"a属于B"；

$a\notin B$：表示a不是集合B的元素，读作"a不属于B"。例如：$\lg 7\in R^+$，$\pi\notin Q$，若$x^2+1=0$，则$x\notin R$等。

集合的表达方式依赖于集合的给定方式，通常有列举式、描述式。

列举式要求把集合的元素一一列出。元素间用“，”隔开，有规律的较多元素的集合用列举式时，允许用省略符“……”。例如：自然数中不超过13的质数集合是{2，3，5，7，11，13}，方程组 $\begin{cases}x^2+y^2=5,\\ y^2-4x=0\end{cases}$ 的解集是 {(1，2)，(1，-2)}；前100个自然数的平方的集合是{1，4，9，…，9801，10000}。

描述式须在{　　}内的左部写出该集合中元素的代表符号或代表式，在右部说明该集合中元素的特性。说明时允许多层次描述。例如：不等式 $x^2+5x+6\leqslant0$ 的解集是 $\{x\mid -3\leqslant x\leqslant -2\}$；绝对值大于2的非整数的有理数集是 $\{x\mid |x|>2,\ x\in Q,\ x\notin Z\}$；$XOY$ 平面中，坐标轴上的点集是 $\{(x,y)\mid x\cdot y=0,\ x,\ y\in R\}$ 等。

在不至于引起误解的前提下，也可以把列举式与描述式结合起来。例如 $\{2k+1,\ k\in Z\}$，$\left\{\left(m,\ \frac{1}{m}\right),\ m\in N\right\}$ 等。

表示数轴上某连通区域的实数集合常用区间表示。区间的种类分开区间、闭区间、半开半闭区间以及含参数的区间四种。例如集合 $\{x\mid -1<x<2\}$ 可写为 $(-1,\ 2)$；集合 $\{x\mid 3\leqslant x\leqslant 4\}$ 可写为 $[3,\ 4]$；集合 $\{x\mid x\leqslant 0\}$ 可写成 $(-\infty,\ 0]$；$\left[k\pi+\frac{\pi}{6},\ k\pi+\frac{\pi}{3}\right]$ $(k\in Z)$ 表示 $\left[\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3}\right]$，$\left[\frac{7}{6}\pi,\ \frac{4\pi}{3}\right]$，$\left[-\frac{5\pi}{6},\ -\frac{2\pi}{3}\right]$，…这样无限多个具有一定共性的区间等。

例 1　用适当方法表述出 XOY 平面内，在坐标轴上但不是原点的点集。

分析　坐标轴上点的特性可以用 $x\cdot y=0$ 这种简洁形式描述，在这个基础上去掉原点。原点坐标的特性是 $x=y=0$。因此“x，y 不全为 0”就是原点之外的点的坐标条件。

这样就有表达法一：$\{(x,y)\mid x\cdot y=0,\ x,\ y$不全为$0\}$。
这种表达法中的“x，y不全为0”用较简洁的解析式$x^2+y^2\neq 0$替代，则成为另一种表达方法：

$$\{(x,y)\mid x\cdot y=0, x^2+y^2\neq 0\}$$

如果进一步把描述部分的内容合并，充分发挥代数式蕴含的运算意义和逻辑意义，又可写为：

$$\left\{(x,\ y)\,\middle|\,\frac{xy}{x^2+y^2}=0\right\}.$$

例 2 把集合$\{-3,\ -1,\ 1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ 99,\ 101\}$用另一种方式表达出来。

分析 这是一些奇数的集合。采用描述方式时，必须确定“$2k-1$”中的整数k的范围。设$-3=2k_1-1$，$101=2k_2-1$，可得$k_1=-1$，$k_2=51$。于是可把集合表达为

$$\{t\mid t=2k-1, -1\leqslant k\leqslant 51,\ k\in \mathbf{Z}\}.$$

如果把奇数写成$2n-5$的形式，那么本题条件下$n=1,\ 2,\ \cdots,\ 53$。这样又可以把集合写为：

$$\{2n-5,\ n\leqslant 53,\ n\in N\}.$$

注意到$-3,\ -1,\ \cdots,\ 101$共有53个奇数。按由小到大的顺序算起的第27个数是49，它是“中间位置数”的特点，那么该集合中的元素都可写成“$|t-49|=2k$”的形式，其中$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 26$。把$k$换成从1开始取值的参数，又有另一种表达：

$$\{t\mid |t-49|+2=2n,\ n\leqslant 27,\ n\in N\}.$$

我们看到，这些不同的表达方法是各有特色的。

例 3 设集合 $A=\left\{\alpha\mid \alpha=\dfrac{9m+1}{3}, m\in Z\right\}$，

$$B=\left\{\beta\mid \beta=\frac{9n-2}{3},\ n\in Z\right\},$$

$$C=\left\{\gamma\mid \gamma=\frac{9k+4}{3},\ k\in Z\right\}.$$

用适当方式表达由 A 的元素或由 B 的元素或由 C 的元素形成的集合。

分析 一种容易想到的办法是

$$\left\{x \mid x=\frac{9m+1}{3}\text{或 } x=\frac{9n-2}{3}\text{或 } x=\frac{9k+4}{3}, k, n, m\in Z\right\}.$$

这里的三个参数 m，n，k 取值范围相同，可以用一个代替。上面的表达方法可改进为

$$\left\{x \mid x=\frac{9m+1}{3}\text{或 } x=\frac{9m-2}{3}\text{或 } x=\frac{9m+4}{3}, m\in Z\right\}.$$

注意到 $\frac{9m+1}{3}=3m+\frac{1}{3}$，$\frac{9m-2}{3}=3m-\frac{2}{3}=(3m-1)+\frac{1}{3}$，$\frac{9m+4}{3}=3m+\frac{4}{3}=(3m+1)+\frac{1}{3}$，而 $3m$，$3m-1$，$3m+1$ 是一种完备的整数分类方式的特点，就可以把 $3m$ 或 $3m-1$ 或 $3m+1$ 合并写为 $k(k\in Z)$。这样，所求的表达方式成为

$$\left\{x \mid x=k+\frac{1}{3}, k\in Z\right\}.$$

或者简记为

$$\left\{k+\frac{1}{3}, k\in Z\right\}.$$

这几种表达方式的繁简程度的差别是很大的。

一般说来，越简洁的表达，越能准确地反映出集合的本来面目。

上面的几种表达方式都用到了一定的参数。使用参数时，应当力求缩减参数的数量，同时要明确说明参数的取值范围。本题除用参数进行描述外，还可以用 $\{x \mid x\in A$ 或 $x\in B$

或 $x\in C\}$或者用 $A\cup B\cup C$ 来表达。

两个（或多个）给定的集合。它们的元素的从属关系有两种情形：一种是存在这样的元素，这些元素同时属于两个集合；另一种是不存在同时属于两个集合的元素。

由两个集合 A, B 的公共元素组成的集合叫 A 与 B 的交集。记为 $A\cap B$。即是说：

$A\cap B=\{x\mid x\in A$, 且 $x\in B\}$。

类似地可以定义 n 个集合的交集：

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\{x\mid x\in A_1,\ x\in A_2,\ \cdots,\ x\in A_n\}. \quad (n\in N)$$

如果集合 A 的任意一个元素都是集合 B 的元素，即 $A\cap B=A$. 这时 A 称为 B 的子集。记为 $A\subseteq B$。当 $A\subseteq B$ 时，若存在元素 $x\in B$, $x\notin A$, 则称 A 是 B 的真子集。记为 $A\subset B$。

如果集合 A 中的元素与集合 B 中的元素完全相同，就表明 $A\subseteq B$, 且 $B\subseteq A$。这时我们说 A 与 B 是相等的。记为 $A=B$。

由 A 中的元素或 B 中的元素形成的集合叫 A 与 B 的并集，记为 $A\cup B$。即是说：

$A\cup B=\{x\mid x\in A$或 $x\in B\}$。

类似地可以定义 n 个集合的并集：

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\{x\mid x\in A_1 \text{ 或 } x\in A_2\cdots\text{或 } x\in A_n\}. \quad (n\in N)$$

下列基本关系是显而易见的。

$A\subseteq A$；

$A\cap A=A$; $A\cup A=A$;

若 $A\subseteq B$, $B\subseteq C$, 则 $A\subseteq C$;

$A\cap B\subseteq A$, $A\cap B\subseteq B$; $A\subseteq A\cup B$, $B\subseteq A\cup B$; $A\cap B\subseteq A\cup B$;

$A\cap B=B\cap A$; $A\cup B=B\cup A$;