新世纪高等学校教材

数学及应用数学专业主干课程系列教材

邝荣雨 等 编著

北京师范大学数学科学学院 组编

微积分学讲义

（第一册）

WEIJI FENXUE JIANGYI

$$d\left[\int_a^x f(t)\,dt\right]=f(x)\,dx$$

北京师范大学出版社
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

0172

新世纪高等学校教材

O172
196
:1
2005

数学及应用数学专业主干课程系列教材

（第一册）

北京师范大学数学科学学院 组编

微积分学讲义

WEIJI FENXUE JIANGYI

邝荣雨 薛宗慈 陈平尚 蒋 铎 李有兰 编著

内容提要

本书分四册.第一册是一元与多元微积分初步;第二册是一元微积分的理论与方法;第三册是多元微积分理论与计算.这三册可作为数学系本科数学分析课程教材或教学参考书.最后一册为专册,它包含若干专题,供教学选用或课外参考.

本书是作者在总结最近几年来北京师范大学数学系本科数学分析课程教学改革的经验的基础上写成的.作者将现行数学分析课程的内容分为两个阶段(首先侧重概念、计算,进而侧重理论、方法)进行讲授,教学效果达到预期的目的.

未经同意,不得编写出版本书思考题与习题的解答.

图书在版编目(CIP)数据

微积分学讲义.第1册/邝荣雨,薛宗慈等编著.—2版.北京:北京师范大学出版社,2005.8

新世纪高等学校教材

ISBN 7-303-00417-3

Ⅰ.微... Ⅱ.①邝... ②薛... Ⅲ.微积分－高等学校－教材 Ⅳ.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 093443 号

北京师范大学出版社出版发行

(北京新街口外大街 19 号　邮政编码:100875)

http://www.bnup.com.cn

出版人:赖德胜

北京昌平兴华印刷厂印刷　全国新华书店经销

开本:170 mm×230 mm　印张:20.25　字数:360 千

2005 年 8 月第 2 版　2005 年 8 月第 1 次印刷

印数:1~3 000 册　定价:28.00 元

第二版前言

1915 年北京高等师范学校成立数理部，1922 年成立数学系. 2005 年适逢数理部诞辰 90 周年，也是北京师范大学数学科学学院建院 1 周年. 经过 90 年的风风雨雨，数学科学学院在学科建设、人才培养和教学实践中积累了丰富的经验. 将这些经验落实并贯彻到教材编著中去是大有益处的.

1980 年，北京师范大学出版社成立，给教材的出版提供了一个很好的契机. 我院教师编著的数十种教材已先后在这里出版. 除了北京师范大学现代数学丛书外，就大学教材而言，共有五种版本. 第一种是列出编委会的高等学校教学用书，这是在 20 世纪 80 年代初期，由北京师范大学出版社王文湧先生约请北京师范大学数学与数学教育研究所所长严士健教授等组成编委会，研究编写出版一套数学系本科生教材和非数学专业高等数学教材. 在出版社的大力支持下，这一计划完全实现，满足了当时教学的需要. 第二种是标注高等学校教学用书，但未列编委会的教材. 第三种是(北京师范大学)面向 21 世纪课程教材. 第四种是北京师范大学现代数学课程教材. 第五种是未标注高等学校教学用书，但实际上是高等学校教学用书. 在这些教材中，除再次印刷外，已经有五部教材进行了修订或出版了第二版.

前一段时间，王建华老师和王琦老师分别搜集了我院本科生的所有教材和研究生 12 门基础课教材的使用情况，李仲来教授汇总了我院教师在北京师范大学出版社出版的全部著作，由李仲来教授和北京师范大学理科编辑部王松浦主任进行了沟通和协商，准备对数学科学学院教师目前使用或誊印(出版社已经没有存书的教材)的北京师范大学出版社出版的部分教材进行修订后再版. 计划用几年时间，出版数学和应用数学、数学教育、数学学科硕士研究生三个系列的主要课程教材.

本套教材可供高等师范院校本科生、教育学院数学系、函授(数学专业)和在职中学教师等使用和参考.

北京师范大学数学科学学院

2005 年 8 月 8 日

第一版编者的话

本讲义分四册出版，第一册是一元与多元微积分初步；第二册是一元微积分理论与方法；第三册是多元微积分理论与计算.这三册内容可作为数学系本科数学分析课程教材或教学参考书.最后一册为专册，它包含若干专题，供教学选用或课外参考.

编写本书最主要的想法是尝试把现行数学分析课程的内容分两阶段进行讲授，以期达到下述目的：

1. 使学生的学习由易到难，首先侧重概念、计算，进而侧重理论、方法.例如第一册侧重极限、连续等概念和微分、积分的计算；第二册侧重实数域、级数、微积分理论和综合运用微积分方法.

2. 便于相对集中内容与时间，强化训练，按不同要求提高学生单项和综合解题能力.例如把微分学、积分学分为两段讲授，前段（第一册）着重训练学生的计算能力和初步解应用题的能力；后段（第二册）综合运用微积分的理论、方法着重训练学生的论证和估值能力.

通过教学实践我们认为以上安排是可行的，我们还要继续完善它.

本书的内容安排次序，教材处理以及某些定理所采用的证明方法与目前国内通用的数学分析教材不尽相同.例如一元微分学部分的前段（第一册）就不讲微分中值定理，直接利用连续函数性质证明函数单调性判别法，并利用它解决导数的应用问题，到后段（第二册）才出现中值定理及其在理论、估值等各方面的应用.

本书配有较多的练习题，它们有一定的广度和深度.做一定数量并且具有一定难度的习题，是数学分析能力培养的重要一环.本书除练习题外还增设了思考题，其中不少题是教学经验的积累，它们对于深入理解某些概念和定理可能会有好处.

本书在内容、例题与习题的安排和选取上都有一定的“弹性”，以便适应读者的不同需要，对此我们在相应的地方都作了说明，请读者自己选择.

编写本书，做了些尝试，深感难度很大，自觉力不从心，错误和缺点必然存

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

在，切望得到批评指正.

编写本书，参考了很多兄弟院校的教材和习题，受益匪浅，谨致谢意.

本书的前身是北京师范大学数学系 82 级、86 级学生使用的讲义，邝荣雨、薛宗慈在这两届学生中试用过该讲义.赵慈庚老师、董延闿老师曾提出了许多有指导性的修改意见，并亲自参与了部分章节的修改.孙永生老师经常鼓励和支持编者大胆进行试验.陈公宁及参与试用过程的许多同志对原讲义提出了许多宝贵意见.分析教研室不少同志都参与过对原讲义的讨论并提出了很多中肯的意见和看法.在此我们谨向关心、帮助我们的老师和同事们表示感谢.

编　者
北京师范大学数学系
1988 年 3 月

第二版编者的话

参加本次修订的人员有:邝荣雨,薛宗慈,陈平尚,李有兰.

本次修订,时间仓促,只好先抓紧时间,进行大大小小的各种勘误,然后,在时间允许下,在不改变原书结构、体系的情况下,对原书内容作了一些修订、增补.例如,在函数一节中,对中学函数的公式法给出了较确切的含义,对函数之间的各种关系提高到函数空间中给予了定义等,在极限一节中,将原书的"再谈极限"中的内容,一部分放到"极限概念"中,一部分放到"极限性质"中,再适当删去关于"函数的阶"的内容,这就使得整节内容更精炼、更简捷;对书中某些定理与例题的证法与解法做了一些删繁就简的变动.如带拉格朗日余项的泰勒公式的证明等;在级数、广义积分与极限计算中,突出并强调阶的估计法的运用等.另外,对个别练习题与例题作了一些变动,适当增加了一些现在社会与经济方面的练习题.并对全书的思考题进行了一次仔细的审阅,适当增加了一些思考题,相信它们对提高读者的钻研能力会有较大的帮助.

任何对本书的错误与不妥之处的批评指正都是对本书的最大支持!

非常感谢北京师范大学数学科学学院郑学安教授,王昆扬教授,他们将使用原书时所发现的错误与不妥之处提供给编者,我们已在修订中加以采纳.

非常感谢北京师范大学数学科学学院的领导对本次修订工作的鼓励与支持!

非常感谢北京师范大学出版社的支持!

本书第二版编者

北京师范大学数学科学学院

2005 年 8 月

出版说明

北京师范大学是一所具有 80 多年历史的老学校，在学科建设和教学实践中积累了一定的经验，将它贯彻到教材中去无疑是有益的．为了加强教材建设．加强与兄弟院校的交流，我社约请北京师范大学数学和数学教育研究所所长严士健教授等组成教材编委会，研究编写出版一套教材．编委会在研究当前教学改革的新情况和过去的教学经验的基础上，同时参照原教育部 1984 年颁发的中学教师进修大纲，对教材的编写宗旨和要求进行认真地讨论．组织数学系有教学经验的教师进行编写，并且由编委等分工负责对书稿进行审订．

这套教材包括数学分析、解析几何、高等代数、概率论与数理统计、常微分方程、复变函数论、抽象代数基础、高等几何、微分几何、实变函数论与泛函分析、计算方法、理论力学以及高等数学（物理、天文、无线电等专业用）等．

这套教材文字通俗易懂．内容由浅入深、循序渐进，便于自学，科学系统性较强．每章有小结，每节（或几节）后配有习题．每章有总复习题，习题安排由易而难，层次清楚．书后附有习题答案或提示，以利于读者自学时检查自己的作业．

为了适应不同层次学校和人员的需要，书中有些内容加了“＊”号，它相对独立，如因学时较少，可以删去．

这套教材可供高等师范院校本科生（或专科）、教育学院数学系、函授（数学专业）、在职中学教师进修等使用．

北京师范大学出版社

1984 年

目 录

—1— 函数与极限 ………………………………………………………… (1)

§1 函数 ………………………………………………………… (1)

1.1 预备知识与记号 ………………………………………… (2)

1.2 函数、复合函数与反函数概念 ………………………… (4)

Ⅰ. 函数概念 ………………………………………… (4)

Ⅱ. 复合函数概念 …………………………………… (7)

Ⅲ. 反函数概念 ……………………………………… (9)

1.3 函数的初等性质 ……………………………………… (11)

思考题 …………………………………………………… (17)

练习题 …………………………………………………… (18)

函数小结 ………………………………………………… (20)

§2 极限 ………………………………………………………… (21)

2.1 极限概念 ……………………………………………… (23)

Ⅰ. 数列极限 ………………………………………… (23)

Ⅱ. 函数极限 ………………………………………… (31)

Ⅲ. 无穷小量与无穷大量 …………………………… (43)

思考题 …………………………………………………… (51)

练习题 …………………………………………………… (53)

2.2 极限性质 ……………………………………………… (55)

思考题 …………………………………………………… (62)

练习题 …………………………………………………… (63)

2.3 两个重要极限 ………………………………………… (65)

Ⅰ. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ ………………………………………… (65)

Ⅱ. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ ……………………………………… (68)

练习题 …………………………………………………… (74)
综合练习题 ……………………………………………… (75)
极限小结 ………………………………………………… (77)
§3 连续……………………………………………………… (78)
3.1 连续与间断 ……………………………………………… (78)
思考题 …………………………………………………… (84)
练习题 …………………………………………………… (85)
3.2 连续函数的性质 ………………………………………… (86)
思考题 …………………………………………………… (91)
练习题 …………………………………………………… (91)
连续小结 ………………………………………………… (92)
复习参考题 ……………………………………………… (93)
—2— 一元微积分初步 ………………………………………… (96)
§1 导数……………………………………………………… (98)
1.1 导数与微分概念 ………………………………………… (98)
Ⅰ. 导数,高阶导数 ……………………………………… (98)
Ⅱ. 微分 ………………………………………………… (106)
思考题…………………………………………………… (110)
练习题…………………………………………………… (111)
1.2 微分法则…………………………………………………… (113)
思考题…………………………………………………… (128)
练习题…………………………………………………… (128)
1.3 导数的应用………………………………………………… (132)
Ⅰ. 函数的单调性 ……………………………………… (132)
Ⅱ. 函数的极值与最值 ………………………………… (135)
Ⅲ. 函数作图 …………………………………………… (142)
思考题…………………………………………………… (146)
练习题…………………………………………………… (147)
导数小结………………………………………………… (149)
§2 不定积分 ………………………………………………… (150)
2.1 不定积分概念……………………………………………… (150)
思考题…………………………………………………… (153)
练习题…………………………………………………… (153)

2.2 基本积分方法……………………………………………………（154）
Ⅰ. 基本积分表与简单积分法 ……………………………………（154）
练习题……………………………………………………………（157）
Ⅱ. 换元积分法 ……………………………………………………（158）
练习题……………………………………………………………（163）
Ⅲ. 分部积分法 ……………………………………………………（166）
思考题……………………………………………………………（169）
练习题……………………………………………………………（170）
2.3 某些特殊类型函数的积分方法…………………………………（171）
Ⅰ. 有理函数积分法 ………………………………………………（171）
Ⅱ. 三角函数有理式积分法 ………………………………………（175）
Ⅲ. 某些根式的有理式积分法 ……………………………………（178）
练习题……………………………………………………………（183）
综合练习题………………………………………………………（183）
不定积分小结……………………………………………………（185）
§3 黎曼积分 ………………………………………………………（186）
3.1 定积分概念与性质………………………………………………（186）
思考题……………………………………………………………（198）
练习题……………………………………………………………（198）
3.2 微积分基本定理…………………………………………………（200）
思考题……………………………………………………………（207）
练习题……………………………………………………………（209）
3.3 定积分的计算方法………………………………………………（210）
思考题……………………………………………………………（216）
练习题……………………………………………………………（217）
3.4 定积分的应用……………………………………………………（218）
Ⅰ. 定积分在几何上的应用 ………………………………………（218）
Ⅱ. 定积分在其他方面的应用 ……………………………………（221）
思考题……………………………………………………………（227）
练习题……………………………………………………………（228）
3.5 广义积分及计算…………………………………………………（229）
思考题……………………………………………………………（237）
练习题……………………………………………………………（237）

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

3.6 定积分的数值计算…………………………………………………… (238)
Ⅰ. 梯形公式 ………………………………………………………… (239)
Ⅱ. 抛物线公式 ……………………………………………………… (240)
练习题………………………………………………………………… (243)
黎曼积分小结………………………………………………………… (243)
复习参考题…………………………………………………………… (244)
—3— 多元微积分初步 ……………………………………………………… (248)
§1 偏导数 ……………………………………………………………… (248)
1.1 多元(数值)函数…………………………………………………… (248)
1.2 可微性与偏导数…………………………………………………… (252)
1.3 复合函数微分法…………………………………………………… (259)
练习题………………………………………………………………… (264)
§2 重积分 ……………………………………………………………… (267)
2.1 二重积分…………………………………………………………… (267)
2.2 三重积分…………………………………………………………… (277)
2.3 重积分的应用……………………………………………………… (284)
Ⅰ. 质量与重心 ……………………………………………………… (284)
Ⅱ. 转动惯量 ………………………………………………………… (285)
Ⅲ. 引力 ……………………………………………………………… (286)
练习题………………………………………………………………… (287)
多元微积分小结……………………………………………………… (289)
部分习题答案或简单提示……………………………………………… (290)
索引……………………………………………………………………… (308)

—1— 函数与极限

§1 函　　数

17 世纪是生产、技术、科学大发展的光辉年代. 天文学对行星、地球轨道的研究；航海业对经纬度的研究；弹道学对抛射体的研究；机械制造对螺线、旋轮线、摆线的研究等都促使数学必须研究运动. 当时，人们把曲线理解为运动的几何形象，把变量之间的关系 —— 函数理解为运动的数量形式. 深通自然科学和数学的法国哲学家笛卡儿(Descartes. 1596—1650) 从经纬制出发引入了坐标系，创立了用代数方法研究几何的崭新学科 —— 解析几何，它美妙而和谐地把运动、曲线、函数融合在一起，给 17 世纪以来数学的巨大进展奠定了基础. 恩格斯对笛卡儿的革新思想给予了很高的评价，他说："数学中的转折点是笛卡儿的变数. 有了变数，运动进入了数学；有了变数，辩证法进入了数学，……".

在 17，18 两个世纪的漫长岁月中，函数概念几乎占据了当时所有科学研究工作的中心位置，运动与曲线赋予函数的新鲜活力使它结下了累累果实，然而，透过披在它身上生动、直觉的外衣去认识它的本质在历史上却经过了一个相当艰苦的历程.

1673 年，莱布尼兹(Leibniz. 1646—1716) 在一篇手稿中第一次用"函数"一词表示任何一个随着曲线上点的变动而变动的量，例如切线、法线、次切线的长度及纵坐标等，同时他又引进了"常量"、"变量"和"参变量"等概念.

被拉普拉斯(Laplace. 1749—1827) 誉为 18 世纪后半叶全体数学家共同导师的欧拉(Euler. 1707—1783) 对函数概念的描述也不能超越历史. 他在 1748 年《无穷小分析引论》(这是世界上第一部以函数为基础的微积分教科书) 一书中写道："变量的函数是一个解析表达式，它是由这个变量和一些常量以任何方式组成的". 同时他又说函数就是"在 xOy 平面上徒手画出来的曲线所表示的 y 与 x 之间的关系". 到了 1775 年，他在《微分学》中又写道："如果某些变量以这样一种方式依赖于另一些变量，即当后面这些变量变化时，前面的变量便随之变化，则称前面的变量为后面变量的函数". 欧拉用生动、直观然而是狭隘的语言描述的函数概念对后世的影响是深远的，尤其是他在 1734 年引进的函数记号 $f(x)$ 一直沿用至今.

1797 年，拉格朗日(Lagrange. 1736—1813) 说："凡是能用幂级数表示的关系就称

为函数".

1807 年,傅里叶(Fourier, 1768—1830)又说:"任何函数都可以表示成三角级数".

总之,他们都把函数的数量表现形式当作了函数概念的本质.

直到 1834 年,罗巴契夫斯基(Лобачевский, 1792—1856)才稍微接触到了函数的实质. 他认为函数"这个一般概念,要求把那个对于每个 x 而给予的并随着 x 而逐渐变动的数称为 x 的函数. 函数值则可能由解析表达式给出,也可能由一个条件给出,这个条件给出检验全部数并从其中选出一个数的方法. 最后,函数的依赖关系可以存在但依然是未知的".

到了 1837 年,狄利克雷(Dirichlet, 1805—1859)用更明确简练的语言指出:"对于在某区间上的每一个确定的 x 值,y 都有一个或多个确定的值,那么,y 叫做 x 的函数". 这才真正抓住了函数概念的本质是"对应规律"这个核心. 因而这个定义直到目前仍然被有些教科书采用.

19 世纪 70 年代,康托(Cantor, 1845—1918)创立了集合论. 数学的抽象化、严格化程度逐渐提高,常常需要把具有某种共性的一堆东西当作一个整体看待,并且研究它的共性和结构. 数学研究的这种趋势使得集合论成为现代数学的基础,并构成了它的通用语言.

1914 年,豪斯多夫(Hausdorff)用序对(序偶)(a,b) 构成的笛卡儿乘积集 $A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$ 较严格地刻画了函数,使得原来概念中未经定义的"对应规律"有了集合论的基础. 但它却用到了"序"的概念. 直到 1921 年,库拉托夫斯基(Kuratowski)用一种仅含两个元素的特殊形式的集合 $\{\{a\},\{a,b\}\}$ 来定义序对 (a,b),这才使得函数概念真正建立在集合论的基础之上了.

1859 年(清朝咸丰年间),在李善兰与维利叶(Wylie)合译的我国第一部微积分汉译本《代微积拾级》中,第一次将"function"译成"函数",一直沿用到今天.

1.1 预备知识与记号

本书将使用一些术语与符号,用以精练我们的叙述.

任何学科都有它的理论体系,数学分析的理论体系的基石是**实数域**,记作 $\mathbf{R}$,并且约定:实数域中每个实数与数轴上的每个点有一一对应关系. 因而也称 $\mathbf{R}$ 为**实直线**,其中元素既可称为**数**也可称为**点**. 我们分别用符号 $\mathbf{N},\mathbf{N}_+,\mathbf{Z},\mathbf{Z}_+,\mathbf{Q}$ 表示实数域的重要子集:自然数集,排除数 0 的自然数集,整数集,排除数 0 的整数集,有理数集.

首先介绍实数域中常用的一些术语.

设 E 是实数域 $\mathbf{R}$ 的子集,即 $E\subset\mathbf{R}$,如果存在一个实数 b(实数 a),对一切 $x\in E$,有 $x\leqslant b$ $(a\leqslant x)$ 成立,则称实数 b(实数 a)是 E 的一个**上界**(**下界**). 如果集合 E 既有上界又有下界,则称 E 为**有界集**.

设 $a,\delta>0$ 为实数,称集合

$$U(a;\delta)=\{x\in\mathbf{R}\mid |x-a|<\delta\}$$

为点 a 的δ- **邻域**. 如果不特别注明半径 δ,可简记作 $U(a)$,并简称为点 a 的**邻域**. 如果在点 a 的 δ- 邻域中除掉 a 点,所得的集合

$$\mathring{U}(a;\delta) = U(a;\delta)\setminus\{a\} = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 < |x-a| < \delta\}$$

称为点 a 的 δ- **空心邻域**,简称为点 a 的**空心邻域**.

实数域 $\mathbf{R}$ 中最基本最常见的一类子集就是所谓**区间**,对于区间有下面一些术语.

设 $a,b \in \mathbf{R}$.

称集合

$$[a,b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

为**有界闭区间**,简称为**闭区间**;

称集合

$$(a,b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$$

为**有界开区间**,简称为**开区间**;

称集合

$$(a,b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leqslant b\} \text{ 与 } [a,b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leqslant x < b\}$$

为**有界半开区间**. 单点集 $\{a\}$ 也称为区间. 以上五种集合统称为**有界区间**.

称集合

$$[a,+\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geqslant a\} \text{ 与 } (-\infty,a] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leqslant a\}$$

为**无界闭区间**;

称集合

$$(a,+\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x > a\} \text{ 与 } (-\infty,a) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < a\}$$

为**无界开区间**;又记 $\mathbf{R} = (-\infty,+\infty)$. 以上五种集合统称为**无界区间**. 以上十种有界与无界区间统称为**区间**. 实数 a,b 称为区间的**端点**.

如果区间 I 包含端点,那么,去掉端点后余下的集合称为 I 的**内部**,记作 I°. 例如,$[a,b]$,$[a,b)$,$(a,b]$ 的内部都是 (a,b);如果区间 I 不含端点,那么,I 的内部 I° 就是 I 本身,即 $I^\circ = I$. 例如 $(a,+\infty)$ 的内部是 $(a,+\infty)$,$\mathbf{R}^\circ = \mathbf{R}$.

其次介绍一些数理逻辑的符号,但并不用来作逻辑运算,而是用来代替一部分语言叙述,使得书写更简练.

逻辑符号分为两类. 一类是所谓连接词符号,如符号"$\Rightarrow$"表示:"若……则……",即 $A \Rightarrow B$ 表示:若命题 A 成立,则命题 B 成立,此时也称 A 是 B 的充分条件,B 是 A 的必要条件. 又如符号"$\Leftrightarrow$"表示"当且仅当"或"充分必要". 例如

$$|x-a| < \delta \Leftrightarrow -\delta < x-a < \delta \Leftrightarrow a-\delta < x < a+\delta,$$

于是

$$U(a;\delta) = (a-\delta,a+\delta).$$

另一类是所谓量词符号,即"$\forall$"和"$\exists$".其中"$\forall x$"表示"所有 x"或"任何 x";而"$\exists x$"表示"存在 x"或"有 x".在本书中,我们并不严格按照数理逻辑的要求使用它们,只是把它们当作一部分语言的代用物,和普通语言混合起来使用,以使读者获得鲜明简捷、重点突出的印象.

1.2 函数、复合函数与反函数概念

Ⅰ. 函数概念

读者对函数已有一定了解,但因它是数学分析的**研究对象**,我们仍将对其略述一二,并略作提高.

【定义】 设 $D\subset\mathbf{R}$,如果存在一个对应关系 f,对于每个实数 $x\in D$,都有唯一的实数 $y\in\mathbf{R}$ 与之对应,则称 **f 是从 D 到 $\mathbf{R}$ 的(一元数值)函数(映射)** 记作

$$f:\ \mathbf{R}\supset D\to\mathbf{R},\ x\mapsto y.$$

对应于 x 的实数 y 称为函数 f 在 x 的**值**,记作 $y=f(x)$,也称为 x 的**像**,实数集 D 称为函数 f 的**定义域**,实数集 $f(D)=\{f(x)\mid x\in D\}$ 称为函数 f 的**值域**,也称为集 D 的**像**.

我们常常把函数简记作

$$y=f(x),\quad x\in D$$

并习惯地称 x 为**自变量**,y 为**因变量**.

【定义】 从数集 $\mathbf{N}_+$ 到实数域 $\mathbf{R}$ 的函数称为**数列**,记作 $\{x_n\}$,即

$$\{x_n\}:\mathbf{N}_+\to\mathbf{R},n\mapsto x_n.$$

对应于自变量 $n\in\mathbf{N}_+$ 的函数值 x_n 称为数列的**通项**.

通常我们习惯地把数列 $\{x_n\}$ 值域中的数按自然数 n 的递增次序排成一列

$$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$$

并用它来表示数列,一般函数的数值是不可能做到这一点的.

我们在中学时,已经知道**图示法**是一种重要的函数表示方法,但那时对函数图象的概念并没有确切叙述过,现在我们来做这个工作.

设函数 $f(x)$ 定义在 $\mathbf{R}$ 的子集 D 上,当平面上建立直角坐标系以后,自变量 x 与因变量 $f(x)$ 组成有序数对 $(x,f(x))$,就表示平面上一点,因此,很自然地把上述序对(序偶)即点的集合

$$G(f)=\{(x,f(x))\mid x\in D\subset\mathbf{R}\}$$

称为函数 f 的**图象(图形)**.

利用序对集的概念,可以较严格地定义函数.

任意给定两个集合 A,B,我们称集合

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$$

为**笛卡儿乘积集**,简称为**卡氏集**.

设 D 是 $\mathbf{R}$ 的子集,f 是卡氏集

$$D \times \mathbf{R} = \{(x,y) \mid x \in D \subset \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$$

的子集,即 $f \subset D \times \mathbf{R}$,如果对每个 $x \in D$,存在唯一的 $y \in \mathbf{R}$,使得 $(x,y) \in f$,则称 f 是从 D 到 $\mathbf{R}$ 的(一元数值)**函数**.用卡氏集定义函数,避免了原来定义中"对应关系"一词的不确切性,并且使函数与它的图象统一起来了.

将定义在数集 D 上的所有函数组成集合,即所谓**函数族** $\mathscr{F}(D)$,亦称为**函数空间**.下面我们要对函数空间元素之间的关系给出确切的描述.

【定义】 若函数 f 与 g 的定义域相同且对应规律也相同,则称**函数 f 与 g 相等**,记作 $f = g$.

例如,函数

$$y = x^2, \quad x \in \mathbf{R} \quad 与 \quad y = x^2, \quad x \in [0, +\infty)$$

是两个不同的函数.

注意:函数 f 与函数值 $f(x)$ 是不同的.本书充分注意到这种差别,尤其在多元微积分部分更是如此.不过,在不引起混淆的情况下,有时为方便,也常说:"函数 $f(x)$","y 是 x 的函数","数列 x_n" 等.

【定义】 设函数 f,g 在 $\mathbf{R}$ 的子集 D 上有定义,

(1) 若对 $\forall x \in D$,通过 $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \neq 0)$ 有唯一的值与之对应,则这些对应规律分别称为**函数 f 与 g 的和,差,积,商**.分别记作

$$f+g, f-g, fg, \frac{f}{g}.$$

(2) 若对 $\forall x \in D$,有 $f(x) \leqslant g(x)$,则称**函数 f 小于或等于函数 g**,记作

$$f \leqslant g.$$

我们还知道**公式法**也是一种重要的函数表示方法(其确切含义即将叙述).它们之中起着基础作用的是下面的函数.

【定义】 称常值函数($y = c$),幂函数($y = x^a$),指数函数($y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$),对数函数($y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$),三角函数($y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x$ 等),反三角函数($y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x$ 等)为**基本初等函数**.

这六种基本初等函数是函数大厦的基石.牢记它们的性质将终身受益匪浅!

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com