高等学校教材

Electronics

电子信息系列

# 信号与线性系统

（第2版）

XINHAO YU XIANXING XITONG

范世贵 李辉 编著

西北工业大学出版社

高等学校教材

# 信号与线性系统

## （第2版）

范世贵　李　辉　编著

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书是根据教育部颁布的高等工业学校“信号与系统课程教学基本要求”编写的。全书内容共九章：信号与系统的基本概念；连续系统时域分析；连续信号频域分析；连续系统频域分析；连续系统 $s$ 域分析；$s$ 域系统函数与系统 $s$ 域模拟；离散信号与系统时域分析；离散信号与系统 $z$ 域分析；状态变量法。每章后有习题。书后有两个附录。

本书可作为高等工业学校电子、通信、自动化、自控、计算机、信号检测、电力等专业的本科、高职、大专学生信号与系统课程的教材，也可供其他专业选用和工程技术人员参考。

**图书在版编目（CIP）数据**

信号与线性系统/范世贵，李辉编著．—2 版．—西安：西北工业大学出版社，2006.7
ISBN 7-5612-1461-8

Ⅰ．信…　Ⅱ．①范…②李…　Ⅲ．①信号理论—高等学校：技术学校—教材②线性系统—高等学校：技术学校—教材　Ⅳ．TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 014114 号

**出版发行：**西北工业大学出版社
**通信地址：**西安市友谊西路 127 号　　**邮编：**710072
**电　　话：**（029）88493844　88491757
**网　　址：**www.nwpup.com
**印 刷 者：**陕西丰源印务有限公司
**开　　本：**787 mm×1 092 mm　1/16
**印　　张：**22.125
**字　　数：**540 千字
**版　　次：**2006 年 7 月第 2 版　　2006 年 7 月第 1 次印刷
**定　　价：**29.00 元

# 前　言

信号与系统课程是电子、通信、计算机、自控、信息处理等专业的重要技术基础课之一。它主要研究信号与系统分析的基本理论与方法，在教学计划中起着承前启后的作用。本课程以工程数学和电路分析为基础，同时又是后续的技术基础课和专业课的基础，是学生合理知识结构中的重要组成部分，在发展智力、培养能力和良好的非智力素质方面，均起着极为重要的作用。

本书在编写中考虑了以下的原则和特点：

讲究教学法，遵循学生接受知识的规律，深入浅出，循序渐进。教材的宏观体系是，先连续，后离散；先信号，后系统；先时域，后变换域；先输入-输出法，后状态变量法；并自始至终贯彻辩证思维的思想方法，不搞烦琐哲学与形而上学。

注意了坚持传授知识、发展智力与培养能力相统一的教学原则。在培养能力方面，着重培养学生的科学思维能力，创新思维能力，分析问题、解决问题的能力，研究问题的方法论。另外，还注意培养学生良好的非智力素质，严谨的治学态度和科学工作作风，激励学生的学习精神。

内容结构上适合于学生自学，也适合于教师施教。在微观结构上努力做到主题突出，思路清晰，理论与实践结合，精选典型例题，以掌握基本理论、基本概念、基本方法和学会应用为目标。

注意了与工程数学、电路基础、数字信号处理、通信原理、自动控制理论等课程的分工与协作，既体现了信号与系统课程自身的“相对独立性”，也体现了其“相对服务性”。

适合于不同层次的学校使用。三类、二类学校的本科可以使用，一类学校的本科也可使用；在筛选一些内容后，高职、大专院校也可使用。在使用的过程中，不会给教师的施教和学生的学习造成困难，而且被删减和不讲授的内容，还可为学有余力的学生通过自学掌握，以满足这些学生的个人发展。

努力做到：物理描述与数学描述并重；信号分析与系统分析并重；输入-输出法与状态变量法并重；时域分析法与变域分析法并重；连续时间系统与离散时间系统并重；学理论、做习题与做实验并重。

书中标有“＊”号的内容不计在计划学时之内，为选学内容，供学有余力

或有不同专业要求的学生自学，以拓宽知识面。

西北工业大学出版社出版的《信号与系统导教·导学·导考》一书，是与本书配套的教学与学习参考用书，此参考书对本书中的习题全部做了解答。

本书的编写与出版，得到了西北工业大学明德学院和西北工业大学出版社的支持和帮助；在编写中参阅了大量的国、内外书籍、资料及试题库试题，编者在此一并谨致诚挚的谢意。

**编　者**

2006 年 3 月

# 目 录

# 第一章　信号与系统的基本概念

**内容提要**

本章讲述信号与系统的基本概念。信号的定义与分类，基本的连续信号及其时域特性，信号的时域变换，信号的时域运算，信号的时域分解。系统的定义与分类，线性时不变系统的性质，线性系统分析概论。

## 1.1　信号的定义与分类

### 一、信号的定义

广义地说，信号就是随时间和空间变化的某种物理量或物理现象。例如在通信工程中，一般将语言、文字、图像、数据等统称为消息，在消息中包含着一定的信息。通信就是从一方向另一方传送消息，给对方以信息。但传送消息必须借助于一定形式的信号（光信号、电信号等）才能传送和进行各种处理。因而，信号是消息的载体，是消息的表现形式，是通信的客观对象，而消息则是信号的内容。

若信号表现为电压、电流、电荷、磁链，则称为电信号，它是现代科学技术中应用最广泛的信号。本书将只涉及电信号。

信号通常是时间变量 $t$ 的函数。信号随时间变量 $t$ 变化的函数曲线称为信号的波形。

应当注意，信号与函数在概念的内涵与外延上是有区别的。信号一般是时间变量 $t$ 的函数，但函数并不一定都是信号，信号是实际的物理量或物理现象，而函数则可能只是一种抽象的数学定义。

本书对信号与函数两个概念混用，不予区分。例如正弦信号也说成正弦函数，或者相反；凡提到函数，指的均是信号。

信号的特性可从两方面来描述，即时域特性与频域特性。信号的时域特性指的是信号的波形，出现时间的先后，持续时间的长短，随时间变化的快慢和大小，重复周期的大小等。信号时域特性的这些表现，反映了信号中所包含的信息内容。信号频域特性的内涵，我们将在第三章中阐述。信号的特性还有它的功率和能量。

### 二、信号的分类

按不同的分类原则，信号可分为：

(1) 确定信号与随机信号。按信号随时间变化的规律来分，信号可分为确定信号与随机信号。

确定信号是指能够表示为确定的时间函数的信号。当给定某一时间值时，信号有确定的对应数值，其所含信息量的不同是体现在其分布值随时间或空间的变化规律上。电路基础课程中研究的正弦信号、指数信号、各种周期信号等都是确定信号的例子。

随机信号不是时间 $t$ 的确定函数，它在每一个确定时刻的分布值是不确定的，只能通过大量试验测出它在某些确定时刻上取某些值的可能性的分布(概率分布)。空中的噪音，电路元件中的热噪声电流等，都是随机信号的例子。

实际传输的信号几乎都是随机信号。因为若传输的是确定信号，则对接收者来说，就不可能由它得知任何新的信息，从而失去了传送消息的本意。但是，在一定条件下，随机信号也会表现出某种确定性，例如在一个较长的时间内随时间变化的规律比较确定，即可近似地看成是确定信号。

随机信号是统计无线电理论研究的对象。本书中只研究确定信号。

(2) 连续时间信号与离散时间信号。按自变量 $t$ 取值的连续与否来分，信号有连续时间信号与离散时间信号之分，分别简称为连续信号与离散信号。

连续信号自变量 $t$ 的取值是连续的，电路基础课程中所引入的信号都是连续信号。离散信号自变量 $t$ 的取值不是连续而是离散的，其定义与内涵，在本书第七、八两章中介绍。

(3) 周期信号与非周期信号。设信号 $f(t)$，$t \in \mathbf{R}$，若存在一个常数 $T$，使得

$$f(t-nT)=f(t) \qquad n \in \mathbf{Z} \tag{1-1}$$

则称 $f(t)$ 是以 $T$ 为周期的周期信号。从此定义看出，周期信号有三个特点：

1) 周期信号必须在时间上是无始无终的，即自变量时间 $t$ 的定义域为 $t \in \mathbf{R}$。

2) 随时间变化的规律必须具有周期性，其周期为 $T$。

3) 在各周期内信号的波形完全一样。

不满足式(1-1)关系与上述条件的信号即为非周期信号。

(4) 正弦信号与非正弦信号。

(5) 功率信号与能量信号。

(6) 一维信号、二维信号与多维信号。电视图像是二维信号的例子。

本书主要讨论的时间信号是一维信号，用 $f(t)$ 表示。表示 $f(t)$ 的曲线，称为信号的波形。

## 三、有关信号的几个名词

以下用 $f(t)$ 表示信号。

### 1. 有时限信号与无时限信号

若在有限时间区间($t_1 < t < t_2$) 内信号 $f(t)$ 存在，而在此时间区间以外，信号 $f(t)=0$，则此信号即为有时限信号，简称时限信号，否则即为无时限信号。

### 2. 有始信号与有终信号

设 $t_1$ 为实常数。若当 $t<t_1$ 时 $f(t)=0$，当 $t>t_1$ 时 $f(t)\neq 0$，则 $f(t)$ 即为有始信号，其起始时刻为 $t_1$。设 $t_2$ 为实常数。若当 $t>t_2$ 时 $f(t)=0$，当 $t<t_2$ 时 $f(t)\neq 0$，则 $f(t)$ 即为有终信号。其终止时刻为 $t_2$。

3. 因果信号与反因果信号

若当 $t<0$ 时 $f(t)=0$，当 $t>0$ 时 $f(t)\neq 0$，则 $f(t)$ 为因果信号，可用 $f(t)U(t)$ 表示。其中 $U(t)$ 为单位阶跃信号。因果信号为有始信号的特例。若当 $t>0$ 时 $f(t)=0$，当 $t<0$ 时 $f(t)\neq 0$，则 $f(t)$ 为反因果信号，可用 $f(t)U(-t)$ 表示。反因果信号为有终信号的特例。

# 1.2　基本的连续信号及其时域特性

所谓基本信号，是指在工程实际与理论研究中经常用到的信号。这些信号的波形及其时间函数表达式都十分简洁，用这些信号还可以组成一些比较复杂波形的信号。本节中仅介绍基本的连续信号，离散信号将在第七章中介绍。

## 一、直流信号

直流信号的函数定义式为

$$f(t)=A \qquad t\in \mathbf{R}$$

式中，$A$ 为实常数，其波形如图 1-2-1 所示。若 $A=1$，则称为单位直流信号。直流信号也称常量信号。

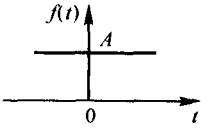



图　1-2-1

## 二、正弦信号

正弦信号的函数定义式为

$$f(t)=A\cos(\omega t+\psi) \qquad t\in \mathbf{R}$$

式中，$A$，$\omega$，$\psi$ 分别称为正弦信号的振幅、角频率、初相角，均为实常数。

正弦信号有如下性质：

(1) 是无时限信号。

(2) 是周期信号，其周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$。

(3) 其微分仍然是正弦信号，即

$$f'(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[A\cos(\omega t+\psi)]=\omega A\cos\left(\omega t+\psi+\frac{\pi}{2}\right)$$

可见其微分信号 $f'(t)$ 与原信号 $f(t)$ 相比仍是正弦信号，仅是振幅变为 $\omega A$，初相角增加了 $\frac{\pi}{2}$。

(4) 满足如下形式的二阶微分方程，即

$$f''(t)+\omega^2 f(t)=0$$

## 三、单位阶跃信号

单位阶跃信号一般用 $U(t)$* 表示，其函数定义式为

$$U(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$

也可定义为

* 有的书上也用 $\varepsilon(t)$ 表示单位阶跃信号。

$$U(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \dfrac{1}{2} & t=0\\ 1 & t>0\end{cases}$$

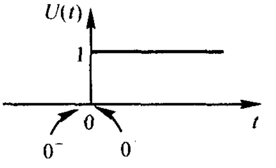



图 1-2-2

其波形如图 1-2-2 所示。

可见,$U(t)$ 在 $t=0$ 时刻发生了阶跃,从 $U(0^-)=0$ 阶跃到 $U(0^+)=1$,阶跃的幅度为 1。

单位阶跃信号 $U(t)$ 具有使任意非因果信号 $f(t)$ 变为因果信号的功能,即将 $f(t)$ 乘以 $U(t)$,所得 $f(t)U(t)$ 即成为因果信号,如图 1-2-3 所示。

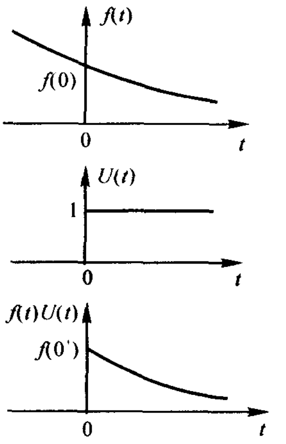



图 1-2-3

*例 1-2-1** 试画出下列函数的波形。

(1) $f(t)=U(t^2+3t+2)$

(2) $f(t)=U(\sin\pi t)$

**解** (1) $f(t)=U(t^2+3t+2)=$

$$\begin{cases}0 & t^2+3t+2<0\\ 1 & t^2+3t+2>0\end{cases}=$$

$$\begin{cases}0 & -2<t<-1\\ 1 & t<-2,\ t>-1\end{cases}$$

$f(t)$ 的波形如图 1-2-4 所示。

(2) $$f(t)=U(\sin\pi t)=\begin{cases}1 & \sin\pi t>0\\ 0 & \sin\pi t<0\end{cases}$$

$f(t)=U(\sin\pi t)$ 的波形如图 1-2-5 所示。可见,$f(t)$ 为一周期信号,其周期 $T=2$。

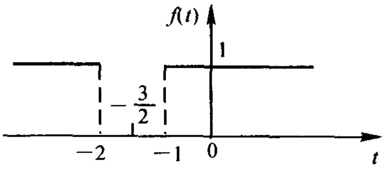



图 1-2-4

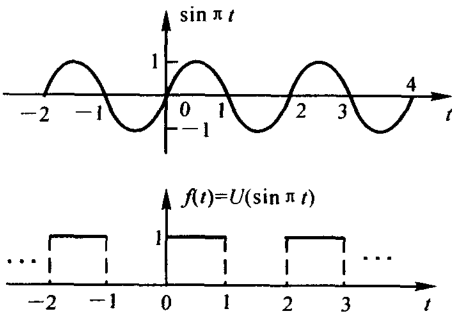


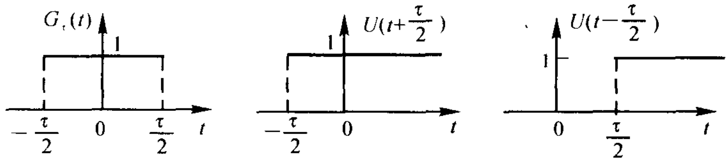

图 1-2-5

## 四、单位门信号

门宽为 $\tau$、门高为 1 的单位门信号常用符号 $G_\tau(t)$ 表示,其函数定义式为

$$G_\tau(t)=\begin{cases}1 & -\dfrac{\tau}{2}<t<\dfrac{\tau}{2}\\ 0 & t>\dfrac{\tau}{2},\ t<-\dfrac{\tau}{2}\end{cases}$$

其波形如图 1-2-6(a) 所示。




(a)　(b)　(c)

图　1-2-6

单位门信号可用两个分别在 $t=-\frac{\tau}{2}$ 和 $t=\frac{\tau}{2}$ 出现的单位阶跃信号之差表示，如图 1-2-6(b)，(c) 所示。即

$$G_\tau(t)=U\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-U\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$$

### 五、单位冲激信号

1. 定义

单位冲激信号用 $\delta(t)$ 表示，其函数定义式为

$$\delta(t)=\begin{cases}\infty & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}$$

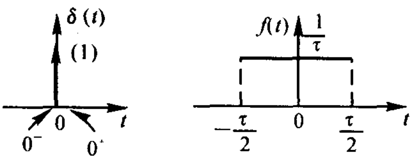
且面积

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)\mathrm{d}t=1$$

其图形如图 1-2-7(a) 所示，即用一粗箭头表示，箭头旁标以(1)，表示 $\delta(t)$ 图形下的面积为 1，称为冲激函数的强度，简称冲激强度。

单位冲激信号可理解为门宽为 $\tau$、门高为 $\frac{1}{\tau}$ 的门函数 $f(t)$（见图 1-2-7(b)）在 $\tau\to 0$ 时的极限，即

$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}f(t)=\begin{cases}\infty & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}$$




(a)　(b)

图　1-2-7

且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{\tau\to 0}f(t)\mathrm{d}t=\lim_{\tau\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t=1$$

**推广**

(1) 设 $t_0$ 为正实常数，则有

$$\delta(t-t_0)=\begin{cases}\infty & t=t_0\\ 0 & t\neq t_0\end{cases}$$

且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=\int_{t_0^-}^{t_0^+}\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=1$$

其图形如图 1-2-8(a) 所示，即 $\delta(t)$ 在时间上延迟了 $t_0$。

(2) 若冲激函数图形下的面积为 $A$,则可写为

$$A\delta(t-t_0)=\begin{cases}\infty & t=t_0\\ 0 & t\neq t_0\end{cases}$$

且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}A\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=A\int_{t_0^-}^{t_0^+}\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=A$$

即冲激强度为 $A$,其图形如图 1-2-8(b) 所示,箭头旁标以($A$)。

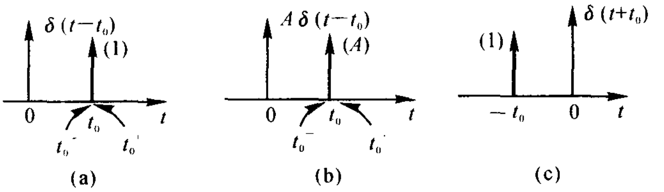



图 1-2-8

(3) 若 $\delta(t)$ 在时间上超前了 $t_0$,则应写为 $\delta(t+t_0)$,其图形如图 1-2-8(c) 所示。

2. 性质

(1) 设 $f(t)$ 为任意有界函数,且在 $t=0$ 与 $t=t_0$ 时刻连续,其函数值分别为 $f(0)$ 和 $f(t_0)$,则有

$$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$$

$$f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)$$

即时间函数 $f(t)$ 与单位冲激函数相乘,就等于单位冲激函数出现时刻,$f(t)$ 的函数值 $f(t_0)$ 与单位冲激函数 $\delta(t-t_0)$ 相乘,亦即使冲激函数的强度变为 $f(t_0)$,如图 1-2-9 所示。

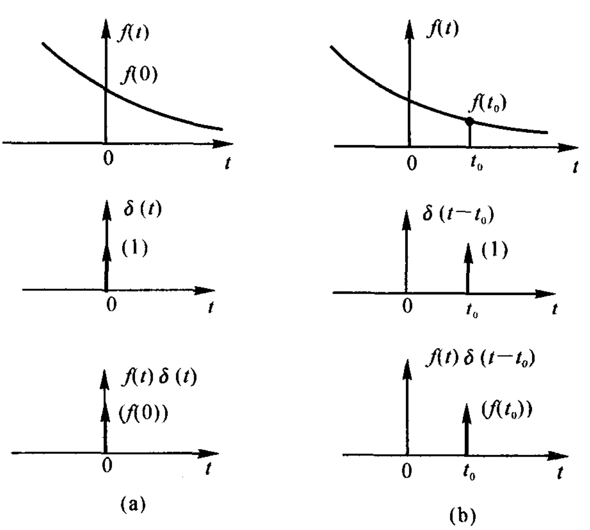



图 1-2-9

(2) 抽样性(筛选性)。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}f(0)\delta(t)\mathrm{d}t=f(0)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_0)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t = f(t_0)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)\mathrm{d}t = f(t_0)$$

即任意有界时间函数 $f(t)$ 与 $\delta(t)$ 或 $\delta(t-t_0)$ 相乘后，在无穷区间 $(t\in\mathbf{R})$ 的积分值，等于单位冲激函数出现时刻 $f(t)$ 的函数值 $f(t_0)$。此即为冲激函数的抽样性，也称筛选性，$f(0)$ 或 $f(t_0)$ 即为 $f(t)$ 在抽样时刻的抽样值，$f(t)$ 为被抽样的函数。

(3) $\delta(t)$ 为偶函数，即有

$$\delta(-t) = \delta(t)$$

**证明** 给上式等号两端同乘以 $f(t)$ 并进行积分，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(-t)f(t)\mathrm{d}t = \int_{\infty}^{-\infty}\delta(t')f(-t')\mathrm{d}(-t') = \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t')f(-t')\mathrm{d}t' =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t')f(0)\mathrm{d}t' = f(0)$$

又有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\mathrm{d}t = f(0)$$

故得

$$\delta(-t) = \delta(t) \qquad \text{（证毕）}$$

**推广**

$$\delta(t-t_0) = \delta[-(t-t_0)]$$

(4) $\delta(at) = \dfrac{1}{a}\delta(t)$ （$a$ 为大于零的实常数）

**证明** 设 $t' = at$，则 $t = \dfrac{1}{a}t'$，$\mathrm{d}t = \dfrac{1}{a}\mathrm{d}t'$；且当 $t\to-\infty$ 时，$t'\to-\infty$；当 $t\to\infty$ 时，$t'\to\infty$。故

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(at)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t')\,\frac{1}{a}\mathrm{d}t' = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t')\mathrm{d}t' = \frac{1}{a}$$

又

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a}\delta(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{a}$$

故得

$$\delta(at) = \frac{1}{a}\delta(t) \qquad \text{（证毕）}$$

**推广**

① $\delta(at-t_0) = \delta\left[a\left(t-\dfrac{t_0}{a}\right)\right] = \dfrac{1}{a}\delta\left(t-\dfrac{t_0}{a}\right)$

② $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(at)\mathrm{d}t = \frac{1}{a}f(0)$

③ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(at-t_0)\mathrm{d}t = \frac{1}{a}f\left(\frac{t_0}{a}\right)$

3. $\delta(t)$ 与 $U(t)$ 的关系

$\delta(t)$ 与 $U(t)$ 互为微分与积分的关系，即

$$U(t) = \int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau, \quad \delta(t) = \frac{\mathrm{d}U(t)}{\mathrm{d}t}$$

现证明前一式：当 $t<0$ 时有 $\delta(t)=0$，故有

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t}0\times\mathrm{d}\tau=0$$

当 $t>0$ 时有

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{0}0\times\mathrm{d}\tau+\int_{0^-}^{0^+}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{0^+}^{t}0\times\mathrm{d}\tau=0+1+0=1$$

故得

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=\begin{Bmatrix}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{Bmatrix}=U(t)$$ （证毕）

式 $\delta(t)=\dfrac{\mathrm{d}U(t)}{\mathrm{d}t}$ 的成立是不言而喻的，无须证明。

**推广**

$$U(t-t_0)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau-t_0)\mathrm{d}\tau$$

$$\delta(t-t_0)=\frac{\mathrm{d}U(t-t_0)}{\mathrm{d}t}$$

**例 1-2-2** 试画出 $f(t)=\delta[\sin\pi t](t\geqslant 0)$ 的波形。

**解** $f(t)=\delta[\sin\pi t]=\begin{cases}\infty & \sin\pi t=0\\ 0 & \sin\pi t\neq 0\end{cases}$

其波形如图 1-2-10 所示。

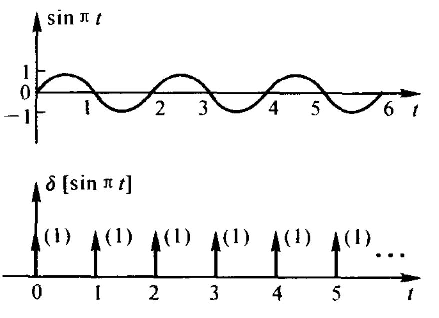



图 1-2-10

**例 1-2-3** 求下列积分。

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}(t^2+2t+3)\delta(-2t)\mathrm{d}t$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}(t^2+2t+3)\delta(1-2t)\mathrm{d}t$

**解** (1) 原式 $=\int_{-\infty}^{+\infty}(t^2+2t+3)\times\frac{1}{2}\delta(t)\mathrm{d}t=$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(0^2+2\times 0+3)\times\frac{1}{2}\delta(t)\mathrm{d}t=1.5$$

(2) 原式 $=\int_{-\infty}^{-\infty}(t^2+2t+3)\delta\left[-2\left(t-\frac{1}{2}\right)\right]\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}(t^2+2t+3)\delta\left[2\left(t-\frac{1}{2}\right)\right]\mathrm{d}t=$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(t^2+2t+3)\times\frac{1}{2}\delta\left(t-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\times\frac{1}{2}+3\right]\times\frac{1}{2}\delta\left(t-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t=\frac{17}{8}$$

## 六、单位冲激偶信号

### 1. 定义

$\delta(t)$ 函数的一阶导数 $\delta'(t)$ 称为单位冲激偶信号，即

$$\delta'(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta(t)$$

单位冲激偶信号 $\delta'(t)$ 可理解为门宽为 $\tau$、门高为 $\frac{1}{\tau}$ 的门函数的一阶导数在 $\tau\to 0$ 时的极

限。设门宽为 $\tau$，门高为 $\frac{1}{\tau}$ 的门函数为

$$f(t)=\frac{1}{\tau}\left[U\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-U\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]$$

其波形如图 1-2-11(a) 所示。故有

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}=f'(t)=\frac{1}{\tau}\delta\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-\frac{1}{\tau}\delta\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$$

$f'(t)$ 的波形如图 1-2-11(b) 所示。可见 $f'(t)$ 是位于 $t=\pm\frac{\tau}{2}$ 时刻的强度分别为 $\pm\frac{1}{\tau}$ 的两个冲激信号。又因有

$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}f(t)$$

故

$$\delta'(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\lim_{\tau\to 0}f(t)\right]=\lim_{\tau\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)=\lim_{\tau\to 0}f'(t)$$

$\delta'(t)$ 的波形如图 1-2-11(c) 所示。可见 $\delta'(t)$ 是在 $t=0$ 时刻出现的方向相反的强度分别为 $\pm\infty$ 的一对冲激信号。

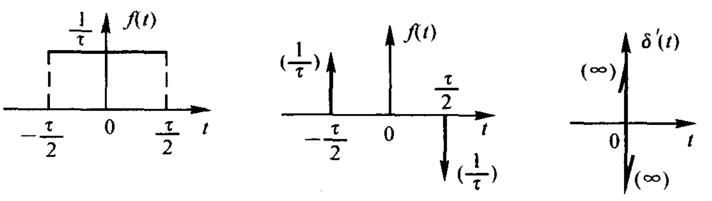



图　1-2-11

2. 性质

(1) $\delta'(t)$ 为奇函数，即有 $\delta'(t)=-\delta'(-t)$。

$$\delta'(t-t_0)=-\delta'[-(t-t_0)]=-\delta'(t_0-t)$$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(t)\mathrm{d}t=0$　　（因 $\delta'(t)$ 为奇函数）

(3) $\int_{-\infty}^{t}\delta'(\tau)\mathrm{d}\tau=\delta(t)$

(4) $f(t)\delta'(t)=f(0)\delta'(t)-f'(0)\delta(t)$

**证明**　因有

$$[f(t)\delta(t)]'=f'(t)\delta(t)+f(t)\delta'(t)$$

即

$$[f(0)\delta(t)]'=f'(0)\delta(t)+f(t)\delta'(t)$$

即

$$f(0)\delta'(t)=f'(0)\delta(t)+f(t)\delta'(t)$$

故得

$$f(t)\delta'(t)=f(0)\delta'(t)-f'(0)\delta(t)$$

这是一个重要和有用的公式。