紅 專 大 学 函 授 教 材

高 中 数 学 复 習

(三 角 部 分)

第 一 分 册

(初 稿)

天津市十六中学数学教研組沈希詠編

高 等 教 育 出 版 社

本書是天津市紅專广播函授大学供电机、机械、化工、冶金等四个專業适用的高中三角复習教材。內容主要是根据人民教育出版社出版的高級中学平面三角課本編写的。結合这些專業的特点，講授三角方面必要的基本知識。包括：三角函数，反三角函数，三角方程及三角形解法等。因为只有18节課的講授复習时間，所以內容比較簡略，叙述也力求淺近易懂。

本書可作为广播函授及一般業余学校的教学用書。

紅專大学函授教材

高 中 数 学 复 習

（三角部分）

第一分册

（初稿）

天津市十六中学数学教研組沈希詠編

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号

（北京市書刊出版業營業許可証出字第054号）

人民教育印刷厂印刷 新华書店發行

統一書号13010·520 開本850×1168 1/32 印張 12/16

字数20,000 印数15501—41612 定價(8)¥0.09

1958年9月第1版 1959年1月北京第2次印刷

第一分册目录

第一章　三角函数的定义及基本性質

§1. 角的生成　任何一个角，例如，$\angle AOB$ 可以看做是由它的一条边 OB 从另一条边 OA 的位置开始，繞着頂点 O 旋轉而生成的。OA 叫做角的始边，OB 叫做角的終边，O 叫做頂点。如果一个角的終边旋轉的方向是反时針的方向，我們規定它是正角（如圖 1）；如果是順时針的方向，就規定它是負角（如圖 2）。旋轉的过程愈長則角的絕对値愈大。一个角的終边由始边的位置开始按反时針方向旋轉一周到再次回到始边的位置就生成 0° 到 360° 的一切角。終边旋轉一周以后，若繼續旋轉所成的角就大于 360°，所以通常所說的角的大小是沒有限度的。为了方便起見，常把角的始边放在軸的右方，頂点放在原点，根据終边落在哪一个象限，就把这个角叫做第几象限的角。例如，圖 3 中的 α 角我們就叫它做第三象限的角。80°、165°、240° 和 310° 就分別是第一、第二、第三和第四象限的角，而 −130°、−60° 分別是第三、第四象限的角。

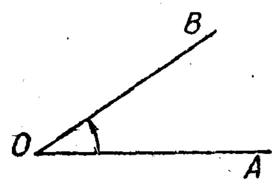

圖 1.

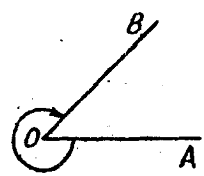

圖 2.

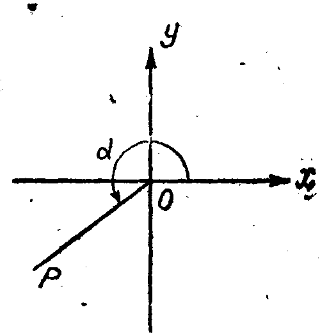

圖 3.

在圖 4 里我們可以看到，390°

和$-330°$角都和$30°$角的終边相同。$390°$可以写成$360°+30°$。$-330°$可写成$-360°+30°$，除了这兩个角而外，和$30°$角的終边相同的角还有$2\times360°+30°$，$-2\times360°+30°$，$3\times360°+30°$，$-3\times360°+30°$，…等，所有和$30°$的角的終边相同的角，連同$30°$的角在內，可以用$k\times360°+30°$来表示，在这里k是整数（即$k=0, \pm1, \pm2, \cdots$）。一般的說，所有和α角終边相同的角，連同α角在內，可以用$k\times360°+\alpha$来表示（k是整数）。

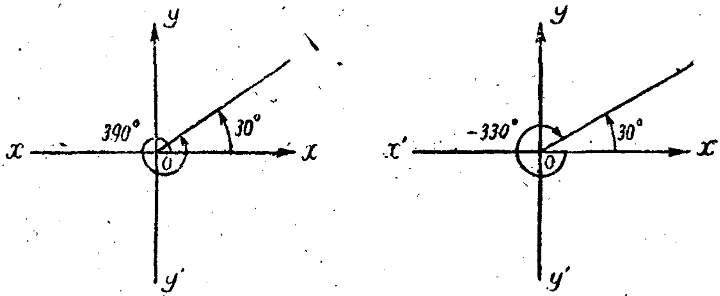

圖 4.

§2. 角的單位　角的單位有以下兩种

一、角度制（六十分制）　在平面几何学里，我們已經知道等于整个圓的三百六十分之一的弧是含有一度的弧，一度的弧所对的圓心角是1度的角，用度做單位来量弧与角的制度叫做角度制。因为在角度制里1度等于60分，1分等于60秒，所以这种制度也叫做六十分制。

二、弧度制（弳制）　以所設的角当做圓心角，它所对弧長与半徑長的比叫做該角的弧度或弳。当圓心角所对弧長等于半徑的时候，这个角的大小就是弧度制的單位叫做1弧度的角或1弳，这个弧就叫做含有1弧度（或1弳）的弧。如圖5，$\overset{\frown}{AB}$是含有1弧度的弧，$\angle AOB$是1弧度的角。用弧度做單位来量弧与角的制度叫做弧度制或弳制。用弧度来量弧与角的时候，“弧度”兩字通常略

去不写，例如，$\angle AOB=2$ 弧度就写成 $\angle AOB=2$; $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 弧度就写成 $\alpha=\frac{\pi}{2}$，依此类推。

以上两种單位，形式上虽然不同，但都是用来度量角的大小的，因此，它們之間可以互換，互換的方法是根据 $360°=2\pi$ 弧度，所以得:

$$1°=\frac{\pi}{180}\text{弧度}\approx 0.01745\text{弧度};$$

$$1\text{弧度}=\frac{180°}{\pi}\approx 57°17'44.8''.$$

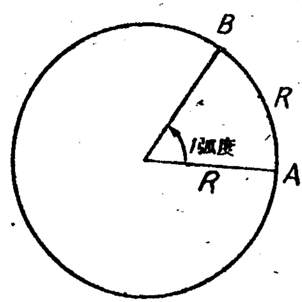

圖 5.

例 1. 把 67°30′ 化成弧度。

解: 因为 $67°30'=67\frac{1}{2}$ 度，所以

$$67°30'=\frac{\pi}{180}\text{弧度}\times 67\frac{1}{2}=\frac{135\pi}{360}\text{弧度}=\frac{3\pi}{8}\text{弧度}。$$

如果需要求得这个弧度的数的近似值，例如，精确到 0.001 的近似值，我們可以这样来做:

$$67°30'=0.017453\text{弧度}\times 67.5=1.178\text{弧度}。$$

2. 把 $\frac{3\pi}{5}$ 弧度化成度。

解: $\frac{3}{5}\pi$ 弧度 $=\frac{180°}{\pi}\times\frac{3\pi}{5}=108°$.

度与弧度相互换算还可以用“四位数学用表”里的第 XVI 表求得近似的結果。

下面是几个常用角的角度和弧度数的換算表，在这个表里，所列的各組对应值常要应用，所以必須記得。

度	0°	15°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
弧　度	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

如果用 R 表示圓的半徑，l 表示弧長，α 表示这个弧所对的圓

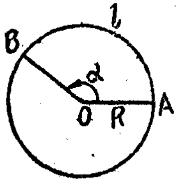

圖 6.

心角的弧度数，根据角的弧度定义，可以得到圆心角、半徑和弧長三者之間的关系：$\alpha=\frac{l}{R}$。由这关系可推得 $l=R\alpha$ 及 $R=\frac{l}{\alpha}$。这就是說，圆的半徑、圆心角的弧度数和圆心角所对的弧長三者之中，如知其二，則另一个就可以計算出来。

例 1. 已知圆的半徑是 5 厘米，試求 18° 的弧長。

$$18°=18\times\frac{\pi}{180}\text{弧度}=\frac{\pi}{10}\text{弧度}$$

$$l=R\alpha=5\times\frac{\pi}{10}=\frac{\pi}{2}\approx1.571\text{ 厘米}.$$

答：这条弧長 1.571 厘米。

2. 在半徑等于 100 厘米的圆上，已知一条弧的長是 111.18 厘米。求这弧所对圆心角的度数。

解：用 α 表示这弧所对圆心角的弧度数，則

$$\alpha=\frac{l}{R}=\frac{111.18}{100}=1.1118(\text{弧度})$$

$$1.1118\text{ 弧度}=1.1118\times57°17'44.8''=63°42'.$$

答：这条弧所对的圆心角是 63°42′。

3. 已知一条弧的長是 3.7 厘米。这弧所对的圆心角是 1.85 弧度，求圆的半徑。

解：用 R 表示圆的半徑，得

$$R=\frac{l}{\alpha}=\frac{3.7}{1.85}=2\text{ 厘米}.$$

答：圆的半徑是 2 厘米。

4. 設飞輪的半徑是 1.2 米每分鐘旋轉 300 次

1) 求飞輪每秒鐘的角速度 ω；

2) 求輪上一点的速度 v；

3) 証明距輪心是 R 的点的速度为 $R\omega$

解：1) 飞輪每秒鐘旋轉的弧度数叫做角速度，因此，

$$\omega=\frac{2\pi\times300}{60}=10\pi\text{ 弧度/秒}.$$

2) 飞輪上某一点的速度就是普通速度，所以

$$v=\frac{2\pi\times1.2\times300}{60}=12\pi\text{ 米/秒}=37.70\text{ 米/秒 (准确到百分制)}.$$

3) 証明：

$$v=\frac{2\pi R\times300}{60}=R\left(\frac{2\pi\times300}{60}\right)=R\omega.$$

習 題

1. 用弧度制表示下列各角度(写成多少 π 的形式):

1) $18°$; 2) $75°$; 3) $120°$; 4) $300°$; 5) $22°30'$; 6) $n°$.

2. 用角度制表示下列弧度制表示的各角:

1) $\frac{\pi}{12}$; 2) $\frac{3\pi}{4}$; 3) $\frac{5\pi}{6}$; 4) $\frac{4\pi}{3}$; 5) $\frac{7\pi}{10}$; 6) 3。

3. 在半徑等于12厘米的輪子的周上有一点，求这点繞着圓心旋轉1500°所經过的距离。

4. 机器的軸在3分鐘內旋轉9000周,它的平均角速度是多少弧度/秒?

5. 一个直徑为40公分的滑輪，以45弧度/秒的角速度旋轉，求輪周上一点在5秒鐘內所經过的距离。

6. 齿輪有90个齿。若它轉了：1)30个齿；2)40个齿；3)200个齿，把齿輪旋轉的角度表成弧度。

7. 輪子每分鐘旋轉450轉，求它的角速度为若干每秒弧度。求与軸相距为1)20厘米和2)1.5米各点的綫速度。

8. 軸的角速度为42.31/秒。求它每分鐘旋轉的轉数。

9. 滑輪的角速度 $\omega=\frac{2\pi}{9}$ 每秒弧度而旋轉。問它需要多少長的时間，才轉一整圈。

10. 鉄道轉弯之处成一圓弧,它的半徑为半里,一列車以一小时20里的速度行駛其上;問10秒間轉过几度?

§3. 三角函数

一、三角函数的定义

在平面几何学中我們用直角三角形兩边的比来定义銳角的正弦、余弦、正切和余切。但是我們研究的角往往不是限于銳角，对于一般的角这些定义便不适用了。現在我們来說明对于一般角怎样下这些定义。

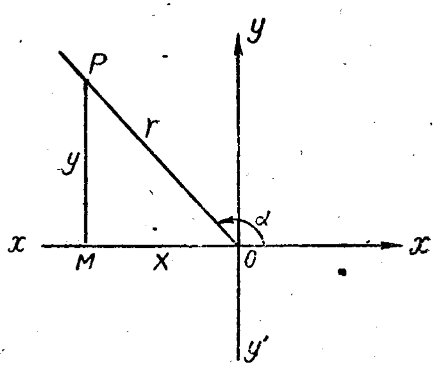

圖 7.

如果角 α(圖 7)的始边放在横坐标軸的右方，頂点放在原点，無論角的終边落在那个象限內，我們都可以在角的終边上任取一点 P，設这点的坐标是 $P(x, y)$，設由原点到 P 点的距离是 r，則角 α 的六个三角函数的定义如下:

1. 角 α 的終边上任一点 P 的縱坐标 y 和原点到这点的距离 r 的比叫做角 α 的正弦，用 $\sin\alpha$ 来表示，即 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$。

2. 角 α 的終边上任一点 P 的横坐标 x 和原点到这点的距离 r 的比叫做角 α 的余弦，用 $\cos\alpha$ 来表示，即 $\cos\alpha=\frac{x}{r}$。

3. 角 α 的終边上任一点 P 的縱坐标 y 和横坐标 x 的比叫角 α 的正切，用 $\operatorname{tg}\alpha$ (或 $\tan\alpha$)来表示，即 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}$。

4. 角 α 的終边上任一点 P 的横坐标 x 和縱坐标 y 的比叫做角 α 的余切，用 $\operatorname{ctg}\alpha$ (或 $\cot\alpha$)来表示，即 $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}$。

5. 由原点到角 α 的終边上任一点 P 的距离 r 和 P 点的横坐标 x 的比叫做角 α 的正割，用 $\sec\alpha$ 来表示，即 $\sec\alpha=\frac{r}{x}$。

6. 由原点到角 α 的終边上任一点 P 的距离 r 和 P 点的縱坐标 y 的比叫做角 α 的余割，用 $\operatorname{cosec}\alpha$ (或 $\csc\alpha$) 来表示; $\operatorname{cosec}\alpha=\frac{r}{y}$。

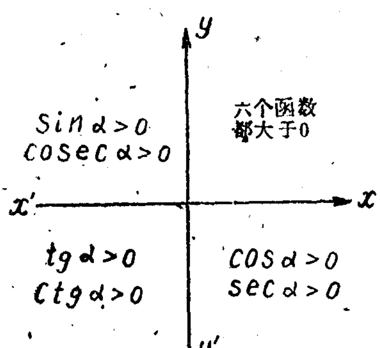

圖 8.

很明显，如果角 α 是銳角，上面关于角 α 的三角函数的定义和平面几何学中所說的完全一样。这些比的大小和 α 角的大小有关，而与 P 点在終边上的位置無关。P 点的坐标 x 和 y 的正負和代数里所規定的一样，距离 r 我們永远把它作为正的，所以在不同的象限中各个三角函数的符号可用圖 8 来說明，

在圖上沒有指出的函数都是負值。

根据以上所談的任意角的三角函数的定义可以知道終边相同的角的三角函数的值完全相同。例如：$390°$ 的角和 $30°$ 的角終边相同，因此，$\sin 390° = \sin 30°$，$\cos 390° = \cos 30°$ 等等。同样 $\sin(-330°) = \sin 30°$，$\cos(-330°) = \cos 30°$ 等等。一般的說，$k\times 360° + \alpha$（或 $2k\pi + \alpha$），（k 是整数）的三角函数和 α 的三角函数完全相同，即 $\sin(2k\pi + \alpha) = \sin\alpha$，$\cos(2k\pi + \alpha) = \cos\alpha$ 等等。

二、用綫段表示三角函数　以坐标軸的原点为圓心作單位圓，此圓和角 α 的始边交于 A，和終边交于 B，OA 就叫做不动徑，OB 叫动徑。

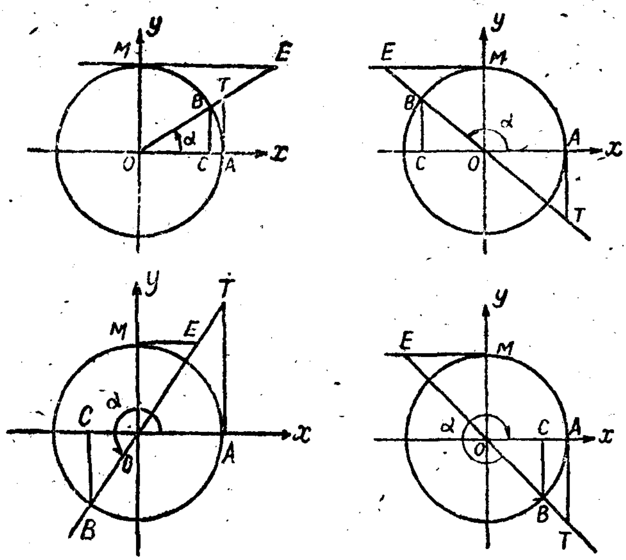

圖 9.

1）从 B 点作 OA 的垂綫 BC，因为 $\sin\alpha = \dfrac{BC}{OB}$，$\cos\alpha = \dfrac{OC}{OB}$ 而 OB 是一个單位，所以 BC 和 OC 的量数連同它們的符号可以用来分别表示 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的值，而 BC 的符号規定和 y 軸一样，OC 的符号是規定和 x 軸的一样。

2) 过 A 点和 M 点(單位圓和 y 軸的交点)分别作圓的切綫与角 α 的終边各交于 T 和 E, 因为 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{OT}{OA}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{ME}{OM}$, 所以 AT 和 ME 的量数連同它們的符号可以用来分别表示 $\operatorname{tg}\alpha$ 和 $\operatorname{ctg}\alpha$ 的值。而 AT 的符号規定和 y 軸一样, ME 的符号規定和 x 軸的一样。

3) 从原点 O 到正切綫和余切綫終点的綫段 OT 和 OE 分别是角 α 的正割綫, 余割綫, OT 和 OE 的量数連同它們的符号用来分别表示 $\sec\alpha$ 和 $\operatorname{cosec}\alpha$ 的值, 如果它們和 OB 同向, 是正值, 如果反向, 就是負值。

用来表示 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$\operatorname{tg}\alpha$、$\operatorname{ctg}\alpha$、$\sec\alpha$ 和 $\operatorname{cosec}\alpha$ 的單位圓中的綫段 BC、OC、AT、ME、OT 和 OE 分别叫做角 α 的正弦綫、余弦綫、正切綫、余切綫、正割綫和余割綫。

三、三角函数值的变化 从函数綫的消長很容易看出角 α 从 $0°$ 到 $360°$ 的变化过程中各三角函数的变化范圍列表如下:

α	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
$\sin\alpha$	0 ↗	1 ↘	0 ↘	−1 ↗	0
$\cos\alpha$	1 ↘	0 ↘	−1 ↗	0 ↗	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0 ↗	不存在 ↗	0 ↗	不存在 ↗	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	不存在 ↘	0 ↘	不存在 ↘	0 ↘	不存在
$\sec\alpha$	1 ↗	不存在 ↗	−1 ↘	不存在 ↘	1
$\operatorname{cocse}\alpha$	不存在 ↘	1 ↗	不存在 ↗	−1 ↘	不存在

从表中可以看到 α 从 $0°$ 到 $360°$ 的时候角 α 的正弦和余弦的絕对值不大于 1; 正割余割的絕对值不小于 1; 而正切余切的絕对值沒有限制, 它的变化范圍是实数域的全部。如果角再繼續增加,

則角的終边就繼續旋轉，重复取得 0° 到 360° 的各种位置，而三角函数也就重复取得以前的各个值。因此，角由 360° 变到 720° 变到 1080° 等等的时候，角的三角函数的变化都和由 0° 到 360° 的时候三角函数的变化相同，由此，可知当角变化的时候每增加或减少一定的值它的三角函数值就重复出現。当一个角的变数变化的时候，如果每增加或减少一定的值它的函数的值重复出現，这种函数就叫做周期函数所以可以知道三角函数是周期函数。正弦余弦正割和余割的周期是 360° (2π)；正切余切的周期是 180° (π)。

例 1. 已知 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$，求作 0° 到 360° 的角 α。

解：因为已知的正弦的值是正的，所以求作的角的正弦綫是由 x 軸向上的；又因正弦的值是 $\frac{1}{3}$，所以正弦綫的長等于單位長的三分之一。

在 x 軸的上方作平行于 x 軸并且距离等于 $\frac{1}{3}$ 單位長的直綫，設它与單位圓相交于 P_1、P_2 兩点，連結 OP_1、OP_2 就得兩个角 α_1 和 α_2. 这兩个角都适合于已知条件，所以都是所求的角。

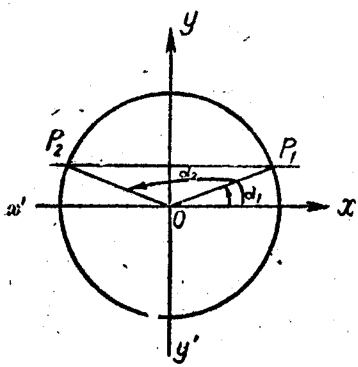

圖 10.

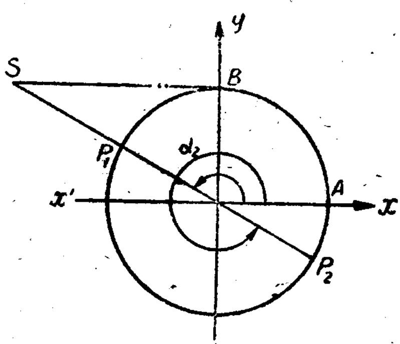

圖 11.

2. 已知 ctg $=-2$，求作 0° 到 360° 角 α。

解：因为已知的余切的值是負的，所以求得的角的余切綫是由切点向左的，又因余切的絕对值是 2 所以余切綫的長等于單位長的 2 倍。

从單位圓和 y 軸的正方向 OY 的交点 B 引切綫，在这切綫上，由 B 向左取 BS，使它的長等于 2 个單位長，过 O 和 S 作直綫，設它与單位圓相交于 P_1、P_2 兩点，就得出兩个角 α_1 和 α_2 这兩个角都适合于已知条件所以都是所求的角。

習 題

1. 如果角的終边上一点的坐标是: 1) $(3,4)$; 2) $(-5,12)$; 3) $(-8,-6)$; 4) $(2,-1)$; 求这角的正弦、余弦、正切和余切的值。

2. 决定下列积或商的符号:

1) $\sin 105°\cdot\cos 195°$; 2) $\operatorname{tg} 284°\cdot\operatorname{ctg} 157°$; 3) $\dfrac{\sin 67°30'}{\sec 128°16'}$;

4) $\dfrac{\cos 270°4'}{\operatorname{cosec} 118°37'}$.

3. 設 x 为三角形的一个内角，下列函数中哪几个可以是負值? 1) $\sin x$; 2) $\cos x$; 3) $\operatorname{tg} x$; 4) $\operatorname{ctg} x$。

4. 依照下列条件，分别求 $0°$ 到 $360°$ 的角 θ 所在的象限: 1) $\sin\theta$ 和 $\operatorname{ctg}\theta$ 同号; 2) $\cos\theta$ 和 $\operatorname{tg}\theta$ 异号; 3) $\dfrac{\cos\theta}{\sec\theta}$ 是負值; 4) $\dfrac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{ctg}\theta}$ 是正值; 5) $\sin\theta$ 是負值而 $\cos\theta$ 是正值。

5. 設 α 是任意的銳角，利用單位圓說明:

1) $\sin\alpha+\cos\alpha>1$; 2) $\operatorname{tg}\alpha>\sin\alpha$.

6. 求下列各式的值:

1) $a\cdot\sin 0°+b\cdot\cos 90°+c\cdot\operatorname{tg} 180°$;

2) $2\cos 0°+3\sin 90°-4\cos 180°+5\sin 270°-6\cos 360°$;

3) $m\operatorname{tg} 0°+n\cdot\cos 90°-p\sin 180°-q\cdot\cos 270°-r\sin 360°$.

7. 决定下列各差的符号:

1) $\sin 20°-\sin 21°$; 2) $\cos 20°-\cos 21°$; 3) $\cos 20°-\cos 120°$;

4) $\sin 120°-\sin 240°$; 5) $\operatorname{tg} 120°-\operatorname{tg} 121°$; 6) $\operatorname{ctg} 200°-\operatorname{ctg} 210°$;

7) $\sin 260°-\sin 250°$; 8) $\cos 320°-\cos 310°$.

8. 1) 如果 $\cos\phi>\cos 30°$，求銳角 ϕ 的范圍;

2) 如果 $\sin\alpha<\sin 225°$，求 $180°$ 到 $270°$ 的角 α 的范圍。

9. 如果函数 $y=1+\sin\alpha$: 1) 取得極大値，2) 取得極小値，求 $0°$ 到 $360°$ 的角 α; 又这个函数的極大値和極小値各是多少?

10. 求作 $0°$ 到 $360°$ 的角 α，已知:

1) $\sin\alpha=-\dfrac{4}{5}$, 2) $\operatorname{tg}\alpha=-1$, 3) $\cos\alpha=-1$.

§4. 同角的三角函数 根据三角函数的定义可以得出，对于任何一个角 α，它的三角函数間都有下面的各种关系:

$$1.\ \text{倒数关系}\begin{cases}\sin\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha=1\\ \cos\alpha\cdot\sec\alpha=1\\ \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1\end{cases}$$

2. 比的关系 $\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \\ \operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \end{cases}$

3. 平方关系 $\begin{cases} \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \\ 1+\operatorname{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha \\ 1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\operatorname{cosec}^2\alpha \end{cases}$

上面的关系式都是对于它的兩边具有意义的那些角而說的，以后遇到的关系式也是这样。（α 为任何大小时，它的正弦和余弦都是有意义的；当 $\alpha=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ 或 $\alpha=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ 时它的正切和正割是無意义的；当 $\alpha=k\pi$ 时它的余切和余割是無意义的）。

以上几个基本关系式的应用：

1）簡化三角函数式；

2）証明三角恒等式；

3）已知一角的一个三角函数値，求該角的其余五个三角函数値；

4）以角的一个三角函数表示其他余三角函数。

例 1. 化簡：$\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha-\cos\alpha}{1+\sin^2\alpha-\sin\alpha-\cos^2\alpha}$

解：
$$\frac{2\sin\alpha\cos\alpha-\cos\alpha}{1+\sin^2\alpha-\sin\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{\cos\alpha(2\sin\alpha-1)}{(1-\cos^2\alpha)+\sin^2\alpha-\sin\alpha}=$$
$$=\frac{\cos\alpha(2\sin\alpha-1)}{\sin^2\alpha+\sin^2\alpha-\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha(2\sin\alpha-1)}{2\sin^2\alpha-\sin\alpha}=$$
$$=\frac{\cos\alpha(2\sin\alpha-1)}{\sin\alpha(2\sin\alpha-1)}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

2. 求証 $\dfrac{\operatorname{tg}\phi-\operatorname{ctg}\phi}{\sec\phi+\operatorname{cosec}\phi}=\sin\phi-\cos\phi$. $(0°<\phi<360°)$

証明：
$$\frac{\operatorname{tg}\phi-\operatorname{ctg}\phi}{\sec\phi+\operatorname{cosec}\phi}=\frac{\dfrac{\sin\phi}{\cos\phi}-\dfrac{\cos\phi}{\sin\phi}}{\dfrac{1}{\cos\phi}+\dfrac{1}{\sin\phi}}=$$
$$=\frac{\dfrac{\sin^2\phi-\cos^2\phi}{\sin\phi\cos\phi}}{\dfrac{\sin\phi+\cos\phi}{\sin\phi\cos\phi}}=\frac{\sin^2\phi-\cos^2\phi}{\sin\phi+\cos\phi}=$$

$$=\frac{(\sin\phi+\cos\phi)(\sin\phi-\cos\phi)}{(\sin\phi+\cos\phi)}=\sin\phi-\cos\phi.$$

3、用 $\sin\alpha$ 表示 α 角的其余各个函数。

解：对于第一第四象限的角 α：

$$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha};$$

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=\frac{\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{1-\sin^2\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha};$$

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{1-\sin^2\alpha}.$$

对于第二第三象限的角 α：

$$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha};$$

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=-\frac{\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{1-\sin^2\alpha};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=-\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha};$$

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}=-\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}.$$

4. 已知 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$，α 在第二象限，求 α 角其他三角函数值。

解：因为 α 角在第二象限，所以 α 角的余弦是負的，因此，

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{1}{9}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=-2\sqrt{2},$$

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}=-\frac{3}{2\sqrt{2}}=-\frac{3\sqrt{2}}{4};$$

$$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}=3.$$

5. 已知 $\operatorname{tg}\alpha=2$。求 α 角的其他三角函数值。

解：α 角可以在第一或第三象限内。

1° 如果 α 角在第一象限内，那末，

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{2}.$$

$$\sec\alpha=\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5};$$

$$\operatorname{cosec}\alpha=\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2};$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sec\alpha}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5};$$

$$\sin\alpha=\frac{1}{\operatorname{cosec}\alpha}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

2° 如果 α 角在第三象限内，那末，

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{2};$$

$$\sec\alpha=-\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=-\sqrt{1+4}=-\sqrt{5};$$

$$\operatorname{cosec}\alpha=-\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}=-\sqrt{1+\frac{1}{4}}=-\frac{\sqrt{5}}{2};$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sec\alpha}=-\frac{1}{\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5};$$

$$\sin\alpha=\frac{1}{\operatorname{cosec}\alpha}=-\frac{2}{\sqrt{5}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

6. 設 $0^\circ<\theta<90^\circ$，且 $\sin\theta=\frac{3}{5}$，求 $\cos\theta$。

解：
$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1,$$

$$\cos\theta=\pm\sqrt{1-\sin^2\theta};$$

但 θ 是銳角，所以 $\cos\theta$ 的符号取正的。因此，

$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}.$$

習　　題

1. 有沒有 0° 到 360° 的角 α：1) $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 都等于 $\frac{1}{2}$；2) $\sin\alpha=0$ 而 $\cos\alpha=-1$；3) $\sin\alpha=0.85$ 而 $\cos\alpha=0.65$？

如果沒有，說明为什么？如果有，說出这个角。

2. 1) 从公式 $\operatorname{tg}^2\alpha+1=\sec^2\alpha$，导出用 $\sec^2\alpha$ 表示 $\operatorname{tg}^2\alpha$ 的式子；

2) 設 $0^\circ<\theta<90^\circ$，并且 $\cos\theta=\frac{12}{13}$，求 $\sec\theta$ 和 $\operatorname{tg}\theta$。

3. 化簡下列各式（式中所含的角都是 0° 到 360° 的角。）

1) $\operatorname{ctg}\beta\sec\beta$；　2) $(1+\operatorname{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha$；　3) $\dfrac{2\sin x\cos y}{2\cos x\sin y}$.

4. 求証下列各式(式中所含的角都是0° 到 360° 的角。)

1) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$;

2) $\operatorname{tg}^2\theta-\sin^2\theta=\operatorname{tg}^2\theta\sin^2\theta$;

3) $\dfrac{\sin^2 x}{\sec^2 x-1}+\dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{cosec}^2 x-1}=1$.

5. 已知 $\sin\theta=\dfrac{15}{17}$, $90°<\theta<180°$, 求 θ 的其他各三角函数的值。

6. 已知 $\cos x=0.35$, 求銳角 x 的其他各三角函数的值(精确到 0.01)。

7. 已知 $\operatorname{ctg}\phi=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 求 ϕ 的其他各三角函数的值。

8. 把 $\sin^4 A-\sin^2 A+\cos^2 A$ 化成只含 $\cos A$ 的式子。

9. 把 $\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$ 化成只含 $\operatorname{tg}\theta$ 的式子。

10. 設 $\sin x+\cos x=m$, 求証 $\sin x\cos x=\dfrac{m^2-1}{2}$。

§5. 化任意角的三角函数为銳角的三角函数

一、化負角的三角函数为正角的三角函数。如果用 α 表示一个任意的正角，那末这个角的負角可以写成 $-\alpha$, 由圖 12 可以看出,只要 α 的絕对值一定, α 和 $-\alpha$ 的終边就一定关于 x 軸是对称的,因此,对于任意的正角 α 我們都有:

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha;$$

$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha.$$

利用同角的三角函数間的关系,得到:

$$\operatorname{tg}(-\alpha)=\frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}=\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha)=\frac{1}{\operatorname{tg}(-\alpha)}=\frac{1}{-\operatorname{tg}\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha;$$

$$\sec(-\alpha)=\frac{1}{\cos(-\alpha)}=\frac{1}{\cos\alpha}=\sec\alpha;$$

$$\operatorname{cosec}(-\alpha)=\frac{1}{\sin(-\alpha)}=\frac{1}{-\sin\alpha}=-\operatorname{cosec}\alpha,$$

即 $-\alpha$ 的三角函数的值等于正角 α 的同函数的值放上原来函数在第四象限內的符号。

二、化大于 360° 的角的三角函数为 0° 到 360° 的角的三角