高等学校教材

运筹学

展丙军 编著

哈尔滨地图出版社

高等学校教材

运筹学

YUN CHOU XUE

展丙军 编著

哈尔滨地图出版社
·哈尔滨·

图书在版编目(C I P)数据

运筹学/展丙军编著.—哈尔滨：哈尔滨地图出版社，2005.11

ISBN 7-80717-183-9

Ⅰ.运… Ⅱ.展… Ⅲ.运筹学-高等学校-教材

Ⅳ.022

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 131108 号

哈尔滨地图出版社出版、发行

(地址：哈尔滨市南岗区测绘路 2 号 邮政编码：150086)

大庆油田有限责任公司勘探开发研究院制图出版室印刷

开本：850 mm×1 168 mm 1/32 印张：6.685 字数：186 千字

2005 年 11 月第 1 版 2005 年 11 月第 1 次印刷

印数：1～1 000 定价：18.00 元

内 容 提 要

本书系统地阐述了常用的运筹方法与思想，内容主要包括线性规划、整数规划、动态规划、网络分析、存储论和决策论等；在阐明基本思想、理论和方法的同时，力求简明扼要，通俗易懂，便于自学，具有很强的实用性。

本书为高等学校教材，适用于数学与应用数学专业、管理专业等，也可作为理工科各专业的选修课教材。

目　录

绪　论

运筹学是一门有关运用、筹划的学问。由于本学科复杂的应用科学特征，至今还没有统一且确切的定义。下面给出目前较为流行的说法：

•为决策机构在对其控制下的业务活动进行决策时，提供以数量化为基础的科学方法。

•运筹学是一门应用科学，它广泛应用现有的科学技术知识和数学方法，解决实际中提出的专门问题，为决策者选择最优决策提供定量依据。

•运筹学是一门基础性的应用学科，主要研究系统最优化的问题，通过对建立的模型求解，为管理人员作决策提供科学依据。

一、运筹学的简史

运筹学作为一门新学科出现在20世纪30年代末。在第二次世界大战期间，武器的如何有效使用落后于武器的发明制造，为了解决作战行动和军需供给中所发生的问题，组织了各种不同领域的科学工作者，来研究这方面的问题。因为这种研究与研究技术问题不同，就称之为“运用研究”(Operational Research)，我国到 1957 年正式定为“运筹学”，简称“O.R”。例如，英国的防空指挥研究系统，由科学家布莱凯特(O.M.S.Blackett)指导组织，研究雷达与高射炮间的有效配合，预防德国飞机对英国领土的轰炸；研究如何确定侦察机飞行路线、架数及飞行的时间，封锁德国潜水艇在比士考海湾的活动。美国为了保护在大西洋中的运送船队，组织了运筹学小组，研究过如何护航的问题。在军需物资的生产方面，为了在一定时间内供应出较多的合格品就必须

解决一些像产品验收、预防废品和其他有关生产效率的问题。凡此种种，都有一个共同的观点，就是研究如何合理使用它们并加以改进，以期达到最大效果。在此期间，这些运筹小组作了大量工作，成绩显著，为运筹学的发展积累了丰富的资料。

鉴于运筹学工作在战争中起着重大作用，第二次世界大战后，很多国家的军事部门都扩大了运筹学工作的组织及研究的范围。成立了不少运筹学的研究机构，以后，逐渐扩展到卫生、教育、运输、城市系统、“悠闲”工业(包括旅游业、体育业等)、公用事业、加工工业等领域。因此，国外常把运筹学称为管理科学。

经过许多学者、专家的努力，运筹学不论在原理上还是在方法上都有了突破。由于电子计算机的问世，更推动了运筹学的应用和发展。20 世纪 70 年代以来，运筹学在国际上逐渐被应用于大系统的运行控制和对未来世界的预测。

20 世纪 50 年代中期钱学森、许国志等教授将运筹学由西方引入我国，并结合我国的特点在国内推广应用。在经济数学方面，特别是投入产出表的研究和应用开展得较早。质量控制(后改为质量管理)的应用也很有特色。1958 年，粮食部门的运输工作者总结出一套具有我国独特风格的“图上作业法”。1965 年，1970 年以华罗庚教授为首的一大批数学家加入到运筹学的研究队伍，使运筹学的很多分支很快赶上当时的国际水平。

我国的运筹学会成立于 1980 年。1982 年加入国际运筹学联合会。随着现代化建设事业的发展，运筹学在应用上将会取得更大的成绩。

二、运筹学的研究对象和主要内容

运筹学是一门多学科的综合性科学。它涉及社会活动的各个方面，而主要是定量地研究一些有组织的、带有重复性的社会活动。因此尚未形成一个整体的理论，也不可能把各种模型连贯起来形成一个概念性的统一体。运筹学工作者只是运用各自掌握的

技术：数学规划论、图与网络理论、随机服务(即排队论)、策略论、存储论、更新论、搜索论、可靠性理论、模拟技术等。本书只选择了其中几个分支的基本部分加以论述。

三、运筹学的工作步骤

运筹学在解决大量实际问题过程中形成了自己的工作步骤。

1. 提出和形成问题　形成运筹学的问题，必须满足如下要求：

(1) 问题的陈述必须有明确的目标。

(2) 问题必须含有机动成分。

(3) 问题的叙述必须含有约束条件。

2. 建立模型　模型是对研究对象的一种描绘。它是从对象中把有关的重要部分抽象出来的。运筹学中的模型一般都是数学模型。建立模型主要靠经验与技巧，尚无一定的方法。下列几点仅供参考。

(1) 分析哪些因素会影响问题的目标，哪些因素是主要的，哪些因素是次要的或可有可无的。去掉可有可无的因素(即依赖于其他因素的非独立的因素)，如果有影响的因素太多，则可去掉一些次要因素，而只要考虑那些关系最大的主要因素。

(2) 检查有影响的主要因素中哪些是可以控制的，就是说可以加以改变的，哪些是不能控制的。理清各因素之间的相互影响关系。

(3) 把各种因素的关系用数学表达式或关系图等表示出来即成为模型。

3. 求解　根据模型的特点，采取适当的方法去求解。这是本书所要介绍的重点。

4. 模型的检验与控制　可采用期待性检验法或回顾性检验法。只要有可能，就进行期待性检验，也就是根据对模型求出的解来管理真实的系统，这种方法能相当有效地对模型的结构进行检验，还能提供一些基本参数。但是，这未必总能办到，在不可

能这样做时，就必须将系统在过去的情况与对模型所作的预计和结论作一些比较。一般而言，这也是一件不易办到的事情。

此外，求出的解能否实施，还要考虑一些其他因素，如：①与政府的方针政策是否有抵触；②是否符合当时、当地的实际情况，否则，理想解答也是无法实行和推广的。

第一章　线性规划基础

人们在生产实践中，常常遇到如何利用现有的资源(如人力，机器小时，原材料等)来安排生产，使得产值或利润最大；或者是在给定任务情况下，如何安排,才能使得消耗的资源最少。这种在生产计划与组织中提出的达到最大或最小的目标问题，就是数学规划论。线性规划是其中的一个分支，如果数学规划问题所归结出的目标函数是决策变量的线性函数，且约束条件可用决策变量的一个线性方程组或线性不等式来表示，这样的规划问题就称线性规划问题。线性规划是数学规划中发展最早、理论最成熟、应用最广泛的一个分支。

1-1　线性规划模型

我们首先用例子来说明什么是线性规划，如何来建立其数学模型。

例 1　有一家工厂生产甲、乙两种产品。每件甲产品要耗用钢材 2 千克，煤 2 千克，产值为 12 元；每件乙产品要耗用钢材 3 千克,煤 1 千克，产值为 10 元。现该厂有 600 千克钢材，400 千克煤。甲、乙两种产品各生产多少件，才能使该厂的产值最大？

解： 设 x_1， x_2 分别为生产甲、乙两种产品的件数，则问题就是在条件

$$\left\{\begin{array}{l}2x_1+3x_2\le 600\\2x_1+x_2\le 400\\x_1\ge 0,x_2\ge 0\end{array}\right\}\tag{1}$$

下，求函数 $Z=12x_1+10x_2$ 的最大值。我们称(1)为**约束条件**，函数 Z 为**目标函数**，x_1，x_2 为**决策变量**。通常我们把上述问题表示为：

$$\left.\begin{array}{rl}\text{Max} & Z=12x_1+10x_2\\ \text{s.t} & 2x_1+3x_2\le 600\\ & 2x_1+x_2\le 400\\ & x_1\ge 0,x_2\ge 0\end{array}\right\}\tag{L}$$

这里“Max”的意思是“求……的最大值”，“s.t”的意思是“受约束于”。(L)中的目标函数 Z 是关于决策变量 x_1，x_2 的线性函数,约束条件也是关于 x_1，x_2 的线性关系式。一般地我们有：

定义：当目标函数与约束条件关于决策变量都是线性关系时，所考察的极值问题称为**线性规划问题**。

下面我们举几个常见的实际问题，来说明数学模型的建立方法。

例 2 (物资调运问题)设有两个库房 A_1，A_2，他们分别储藏粮食 4 000 千克和 5 000 千克。有三个粮店 B_1，B_2，B_3，各需粮食 3 000 千克，2 000 千克和 4 000 千克。已知两个库房到各粮店每百千克的运费如表 1-1。问如何调用才能使总运费最省?

表 1-1

运费 元/百千克 粮店 / 库房	B_1	B_2	B_3
A_1	8	5	4
A_2	1	7	2

解：设x_{11}，x_{12}，x_{13}(单位为百千克)为由库房A_1运往B_1，B_2，B_3的粮食数。x_{21}，x_{22}，x_{23}（单位为百千克）为由A_2运往B_1，B_2，B_3的粮食数。则总运费为：

$$Z=8x_{11}+5x_{12}+4x_{13}+x_{21}+7x_{22}+2x_{23}$$

其约束条件为：

$$\begin{aligned}
&x_{11}+x_{12}+x_{13}=40\\
&x_{21}+x_{22}+x_{23}=50\\
&x_{11}+x_{21}=30\\
&x_{12}+x_{22}=20\\
&x_{13}+x_{23}=40\\
&x_{ij}\geq 0\ (i=1,2,j=1,2,3)
\end{aligned}$$

其线性规划模型可写为：

$$\begin{aligned}
\min\quad & Z=8x_{11}+5x_{12}+4x_{13}+x_{21}+7x_{22}+2x_{23}\\
\text{s.t}\quad & x_{11}+x_{12}+x_{13}=40\\
& x_{21}+x_{22}+x_{23}=50\\
& x_{11}+x_{21}=30\\
& x_{12}+x_{22}=20\\
& x_{13}+x_{23}=40\\
& x_{ij}\geq 0\ (i=1,2,j=1,2,3)
\end{aligned}$$

“min”意思是“求……的最小值”。

例3　（合理下料问题）用长7.4米的钢材来做100套钢筋架子，每套需2.9米，2.1米和1.5米的钢筋各一根，问最少需要多少根长7.4米的钢材，才能完成这次任务？

解：因所用钢材的长度固定要想用料最少，也就要使截下的残料最少，而残料又决定于截取的方法。设用x_j表示用第j种方法截取钢材的数，则对各种可能截取法所产生的残料如表1-2所示。

表 1-2

截取长度	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	所需根数
2.9 米	2	1	1	1	0	0	0	0	100
2.1 米	0	0	2	1	2	1	3	0	100
1.5 米	1	3	0	1	2	3	0	4	100
残 料	0.1	0	0.3	0.9	0.2	0.8	1.1	1.4	

则可得数学模型：

$$\text{Min}\quad Z=0.1x_1+0.3x_3+0.9x_4+0.2x_5+0.8x_6+1.1x_7+1.4x_8$$

$$\begin{aligned}\text{s.t}\quad & 2x_1+x_2+x_3+x_4=100\\ & 2x_3+x_4+2x_5+x_6+3x_7=100\\ & x_1+3x_2+x_4+2x_5+3x_6+4x_8=100\\ & x_j\ge 0\ (j=1,2,\cdots,8)\end{aligned}$$

从上几例可看出，线性规划的一般模型可写为：

1. $$\begin{matrix}\text{Max}\\ \text{(Min)}\end{matrix}\quad Z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\begin{aligned}\text{s.t}\quad & a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\le(\text{或}=,\ge)b_1\\ & a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\le(\text{或}=,\ge)b_2\\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ & a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\le(\text{或}=,\ge)b_m\\ & x_j\ge 0(j=1,2,\cdots,n)\end{aligned}$$

其中 c_j，a_{ij}，b_i 都为常数。

2. $\begin{matrix}\text{Max}\\ \text{(Min)}\end{matrix}\quad Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$

$$\text{s.t}\quad \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le(\text{或}=,\ge)b_i(i=1,2,\cdots,m)$$

$$x_j\ge 0(j=1,2,\cdots,n)$$

3. $\begin{matrix}\text{Max}\\ \text{(Min)}\end{matrix}\quad f(x)=CX$

$$\text{s.t}\quad \sum_{j=1}^{n}P_jX_j\le(\text{或}=,\ge)b$$

$$X_j\ge 0$$

其中：$C=(c_1,c_2,\cdots,c_n),X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$

$$P_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$$

4. $\begin{matrix}\text{Max}\\ \text{(Min)}\end{matrix}\quad f(x)=CX$

$$\text{s.t}\quad AX\le(\text{或}=,\ge)b$$

$$X\ge 0$$

其中：A 为对应的矩阵，其他同上。

1-2　线性规划的标准型

由上面可见，线性规划目标函数和约束条件的各种多样性会给讨论带来不便，为了便于讨论，人们自然会想到，要把各种类型的线性规划问题用一种统一的标准形式表示出来。

定义：称线性规划

$$
(\text{L})\begin{cases}\text{Max} \quad Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.t} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \\ \qquad x_j \geq 0 (j=1,2,\cdots,n) \\ \qquad b_i \geq 0 (i=1,2,\cdots,m)\end{cases}
$$

为线性规划的标准型。其特点是：

(1) 目标函数为求最大值型(也可规定为最小值型)；

(2) 除 $x_j \geq 0$ 外，其他的约束条件为约束方程；

(3) 约束方程的右端常数 $b_i \geq 0$ 。

线性规划的标准型也可写成矩阵的形式，即

$$
\begin{cases}\text{Max} \quad Z=CX \\ \text{s.t} \quad AX=b \\ \qquad b \geq 0 \\ \qquad X \geq 0\end{cases}
$$

其中：$C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$， $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$

$$
A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(a_{ij})_{m\times n}
$$

$b=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^T$

如果线性规划的数学模型不是标准型,可用下面方法化为标准型：

(1) 如果模型的目标函数为 Min 型，即 Min $Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ 可令 $Z^{'}=-Z$，则 Min Z 等价于求 Max $Z^{'}$。只要研究 Max $Z^{'}=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ 就可以了。