

高等学校通用教材

高等数学 同步辅导教程

主 编 姜长友 张武军
副主编 魏保军 彭昌勇

GAODENG SHUXUE
TONGBU FUDAO JIAOCHENG

高等学校通用教材

高等数学同步辅导教程

主 编 姜长友 张武军

副主编 魏保军 彭昌勇

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

根据全国普通高校工科本科生的《高等数学课程基础要求》、《全国硕士研究生入学统一考试的数学考试大纲》中有关高等数学部分内容,以及同济大学应用数学系主编的《高等数学》(上、下册)第五版章节顺序和知识点编写了本教材。书中内容既兼顾了大学一年级学生学习《高等数学》的需求,又兼顾了知识点的综合应用,因此,也可作为高年级学生考研辅导参考书。

全书共分12章。每章由“教与学要求”、“内容提要”、“典型例题分析”、“练习题”和“自测题”五部分组成。本书的重点为“内容提要”和“典型例题分析”。在“内容提要”中,除提示三基(基本概念、基本理论和基本知识)外,注意了内容间的前后联系和重、难点讲解,分析了内涵与外延,还有常见解题方法总结与注意事项。在“典型例题分析”中,例题选取力求多样,既有常见题型,又有综合题型、一题多解题型,也有部分考研真题;例题不仅仅给出解答,还重点给出了分析或说明。“练习题”给出了详细解答,“自测题”给出答案和详细提示。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步辅导教程/姜长友等编著. —北京:北京航空航天大学出版社,2006.9
ISBN 7-81077-865-X

I. 高… II. 姜… III. 高等数学—高等学校—教材 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 028715 号

高等数学同步辅导教程

主 编 姜长友 张武军

副主编 魏保军 彭昌勇

责任编辑 金友泉

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(100083) 发行部电话:010-82317024 传真:010-82328026

<http://www.buaapress.com.cn> E-mail: bhp@263.net

涿州市新华印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本:787 mm×960 mm 1/16 印张:29.5 字数:661 千字

2006 年 9 月第 1 版 2006 年 9 月第 1 次印刷 印数:5 000 册

ISBN 7-81077-865-X 定价:32.00 元

前 言

高等数学,是人类智慧最伟大的成就之一。17世纪,受天文学方面问题的启发,牛顿和莱布尼兹各自发明了微积分理论。自那时以来,每一世纪都证明了微积分在阐明数学、物理科学、工程学以及社会和生物科学等方面的强大威力。可以说,高等数学是整个近代及现代科学技术得以迅速发展的基础。要想理解近代及现代科学技术,不学习高等数学是几乎不可能的。因此,在我国各大学,不管是文科专业还是理科专业,大都开设高等数学课程。特别是,对于工科院校的学生来说,高等数学是他们掌握数学工具、学好专业知识的一门重要的基础理论课。要学好高等数学这门课程,第一,要完成从中学到大学的学习方法的转变,建立适合自己的学习数学的方法;第二,要提高分析问题、解决问题的能力,从中得到高等数学逻辑严谨、环环相扣的数学美的熏陶,提高学生学习数学的积极性;第三,更重要的是让学生体会到高等数学中发现问题、提出问题,最后解决问题的思想方法——即数学思想,使学生得到创新意识的启迪。

现在市场上能见到的《高等数学》辅导书,多数以考研为目的编写,其综合性较强,知识点的考察不能做到与教材同步,因此,真正适合大学一年级同步学习的辅导书并不多。众所周知,学好基础课极其重要,大学一年级的学生常常诉苦,高等数学概念多、定理多、公式多、方法多、技巧多和解题困难多且课余时间少等。为了帮助学生克服这些困难,笔者编写了这本《高等数学同步辅导教程》。它既可作为教师的教学参考书,也可作为与《高等数学》同步学习的辅导书。本书的特点是:

1. 本书内容根据我国普通高校工科本科生的《高等数学课程基础要求》和《全国硕士研究生入学统一考试的数学考试大纲》中有关高等数学部分内容,以及同济大学应用数学系主编的《高等数学》(上、下册)第五版章节顺序及知识点编写的。因此,书中内容既兼顾了大学一年级学生学习《高等数学》的需求,又兼顾了知识点的综合应用,因而,也可作为高年级学生考研辅导参考书。

2. 书中由每章的“教与学要求”、每节的“内容提要”、“典型例题分析”、“练习题”和每章的“自测题”五部分组成。根据教学大纲与考研要求,在“教与学要求”中对基本概念、基本理论和基本方法提出了不同的要求,即熟练掌握、理解、了解等。在“内容提要”中,除提示三基外,注意了内容间的前后联系和重、难点讲解,分析了内涵与外延,还有常见解题方法总结与注意事项。在“典型例题分析”中,例题选取力求多样,既有常见题型,又有综合题型、一题多解题型,也有部分考研真题;例题不仅仅给出解答,还重点给出了分析或说明。在分析或说明中指出了解题的基本思想或常用方法或易犯错误或选此例题的目的等。另外,在例题的选取上还力求通过例题的解答给出同济大学应用数学系主编的《高等数学》(第五版)中缺少但通常又需要学

生掌握的一些知识点,使学生既掌握了常见的解题方法与技巧,又扩充了知识面。“练习题”给出了详细解答,“自测题”给出答案和详细提示。

3. 参加本书编写的同志有从事基础数学教学几十年的老教师,也有教学工作非常优秀,知识结构、层次较高的博士和硕士教师。他们深知一年级学生在学习高等数学这门课的过程中会有什么困难和要求,将他们的经验渗透到书中的细节之中。姜长友同志执笔第8、9、10章,张武军同志执笔第1、2、3、5章,魏保军同志执笔第7、11、12章,彭昌勇同志执笔第4、6章。姜长友、张武军同志统阅书稿并加以润色。

因水平有限,书中疏漏之处,恳请读者提出批评与指正。

编 者

2006年5月

2004 年以来为外校编辑出版的主要教材目录(不含一般图书)

书 号	书 名		编 著 者	定 价
346-1	软件及应用类	现代电气控制及 PLC 应用技术	王永华等	27.00
302-X		Verilog 数字系统设计教程	夏字闻	38.00
428-X		EDA 技术及其应用	汉泽西等	29.00
686-X		微型计算机原理及应用	甘勇等编	25.00
554-5	自动控制及测试技术	传感器技术及应用	薛永毅等	23.00
121-3		测控电路及装置	孙传友等	26.50
184-1		测控系统原理与设计(“十一五”国家级规划教材)	孙传友等	28.50
507-3		蓝牙技术原理、开发与应用	钱志鸿等	35.00
460-3		虚拟仪器与 Labview TM 7.0 Express 程序设计(“十一五”国家级规划教材)	周求湛等	21.00
349-6		自动控制原理(修订版)(“十一五”国家级规划教材)	冯巧玲等	32.00
873-0		交流变频调速技术	何超等编	21.00
483-2	光及电子工程类	电工电子技术实验教程	孙君曼等	18.00
482-4		模拟与数字电子技术实验教程	徐国华等	18.00
668-1		电子线路设计指导	李银华等	18.00
667-3		电路实验教程	徐国华等	15.00
684-3		光电子技术基础教程	郭培源等	19.00
741-6		光电检测技术与应用	郭培源等	20.00
319-4		模拟电子技术基础学习指导与提高	王成珍著	16.00
344-5		数字电子技术基础学习指导与提高	刘盾等	18.00
865-X	基础类	高等数学同步辅导教程	姜长友等	32.00
786-6		工程材料与改性处理	王爱珍等	33.00
497-2		材料力学教程	戴葆青等	25.00
498-0		理论力学教程	王崇革等	25.00
407-7		材料力学实验	王育平等	9.00
676-2		机械工程材料成形技术	王爱珍等	28.00
499-9	机械制图类	计算机三维图形技术	杨德星等	22.00
*205-8		工程图学基础(少学时)	王农等	24.50
*206-8		工程图学与计算机绘图(多学时)	王颖等	29.00
*547-2		建筑制图与阴影透视	赵景伟等	31.00

注: 1. * 号图书各配有对应的制图习题集。

2. 书号 684-3 的《光电子技术基础教程》和 741-6 的《光电检测技术与应用》是光电系列教材之一, 下有《光纤器件及通信技术》和《光电器件原理与应用》共 4 本, 于 2006 年—2007 年相继出版。

3. 若对上述书中有错误之处; 若有意联系出版图书, 敬请来电来信联系。责任编辑: 金友泉。

电话: 010-82317036, 邮编: 100083, 地址: 北京航空航天大学出版社(学院路 37 号)编辑部。

目 录

第 1 章 函数与极限	1
教与学要求	1
1.1 映射与函数	1
1.1.1 内容提要	1
1.1.2 典型例题分析	4
1.1.3 练习题	7
1.1.4 练习题参考解答	9
1.2 数列极限与函数极限	10
1.2.1 内容提要	10
1.2.2 典型例题分析	12
1.2.3 练习题	15
1.2.4 练习题参考解答	16
1.3 极限的性质与运算法则	18
1.3.1 内容提要	18
1.3.2 典型例题分析	20
1.3.3 练习题	26
1.3.4 练习题参考解答	27
1.4 无穷大、无穷小	29
1.4.1 内容提要	29
1.4.2 典型例题分析	31
1.4.3 练习题	34
1.4.4 练习题参考解答	35
1.5 函数的连续性与闭区间上连续函数的性质	37
1.5.1 内容提要	37
1.5.2 典型例题分析	39
1.5.3 练习题	45
1.5.4 练习题参考解答	46
1.6 自测题及参考解答	48

1.6.1	自测试题	48
1.6.2	自测题参考解答	50
第2章 导数与微分		52
教与学要求		52
2.1	导数的概念	52
2.1.1	内容提要	52
2.1.2	典型例题分析	53
2.1.3	练习题	57
2.1.4	练习题参考解答	58
2.2	函数的求导法则及高阶导数	60
2.2.1	内容提要	60
2.2.2	典型例题分析	61
2.2.3	练习题	65
2.2.4	练习题参考解答	67
2.3	隐函数、参数方程确定的函数求导及函数的微分	69
2.3.1	内容提要	69
2.3.2	典型例题分析	70
2.3.3	练习题	73
2.3.4	练习题参考解答	74
2.4	自测试题与参考解答	75
2.4.1	自测试题	75
2.4.2	自测题参考解答	77
第3章 微分中值定理与导数的应用		79
教与学要求		79
3.1	微分中值定理	79
3.1.1	内容提要	79
3.1.2	典型例题分析	80
3.1.3	练习题	86
3.1.4	练习题参考解答	87
3.2	洛必达法则与泰勒公式	89
3.2.1	内容提要	89
3.2.2	典型例题分析	91

3.2.3 练习题	96
3.2.4 练习题参考解答	98
3.3 导数的应用	102
3.3.1 内容提要	102
3.3.2 典型例题分析	105
3.3.3 练习题	113
3.3.4 练习题参考解答	116
3.4 自测题及参考解答	120
3.4.1 自测试题	120
3.4.2 自测试题参考解答	121
第4章 不定积分	124
教与学要求	124
4.1 不定积分的概念、性质及换元积分法	124
4.1.1 内容提要	124
4.1.2 典型例题分析	126
4.1.3 练习题	134
4.1.4 练习题参考解答	135
4.2 分部积分法与几种特殊类型函数的积分	139
4.2.1 内容提要	139
4.2.2 典型例题分析	142
4.2.3 练习题	150
4.2.4 练习题参考解答	151
4.3 自测题及参考解答	157
4.3.1 自测试题	157
4.3.2 自测试题参考解答	158
第5章 定积分	159
教与学要求	159
5.1 定积分的概念、性质及微积分基本公式	159
5.1.1 内容提要	159
5.1.2 典型例题分析	161
5.1.3 练习题	167
5.1.4 练习题参考解答	169

5.2 定积分的计算与反常积分	173
5.2.1 内容提要	173
5.2.2 典型例题分析	176
5.2.3 练习题	183
5.2.4 练习题参考解答	184
5.3 自测题及参考解答	188
5.3.1 自测试题	188
5.3.2 自测试题参考解答	189
第6章 定积分的应用	192
教与学要求	192
6.1 定积分在几何上的应用	192
6.1.1 内容提要	192
6.1.2 典型例题分析	195
6.1.3 练习题	201
6.1.4 练习题参考解答	203
6.2 定积分在物理学上的应用	205
6.2.1 内容提要	205
6.2.2 典型例题分析	206
6.2.3 练习题	209
6.2.4 练习题参考解答	210
6.3 自测题及参考解答	211
6.3.1 自测试题	211
6.3.2 自测试题参考解答	212
第7章 空间解析几何与向量代数	215
教与学要求	215
7.1 向量代数	215
7.1.1 内容提要	215
7.1.2 典型例题分析	217
7.1.3 练习题	222
7.1.4 练习题参考解答	223
7.2 平面与直线	226
7.2.1 内容提要	226

7.2.2 典型例题分析	229
7.2.3 练习题	234
7.2.4 练习题参考解答	236
7.3 曲面和空间曲线	241
7.3.1 内容提要	241
7.3.2 典型例题分析	242
7.3.3 练习题	243
7.3.4 练习题参考答案	244
7.4 自测题及参考解答	245
7.4.1 自测试题	245
7.4.2 自测试题参考解答	246
第8章 多元函数微分法及其应用	249
教与学要求	249
8.1 多元函数基本概念	249
8.1.1 内容提要	249
8.1.2 典型例题分析	252
8.1.3 练习题	256
8.1.4 练习题参考解答	257
8.2 偏导数、全微分及微分法	259
8.2.1 内容提要	259
8.2.2 典型例题分析	262
8.2.3 练习题	264
8.2.4 练习题参考解答	265
8.3 多元复合函数、隐函数微分法则	267
8.3.1 内容提要	267
8.3.2 典型例题分析	270
8.3.3 练习题	274
8.3.4 练习题参考解答	275
8.4 多元函数微分法的应用	278
8.4.1 内容提要	278
8.4.2 典型例题分析	280
8.4.3 练习题	286
8.4.4 练习题参考解答	287

8.5 自测题及参考解答	290
8.5.1 自测试题	290
8.5.2 自测试题答案与提示	292
第9章 重积分	295
教与学要求	295
9.1 重积分概念、性质及二重积分计算	295
9.1.1 内容提要	295
9.1.2 典型例题分析	301
9.1.3 练习题	308
9.1.4 练习题参考解答	309
9.2 三重积分计算	312
9.2.1 内容提要	312
9.2.2 典型例题分析	314
9.2.3 练习题	319
9.2.4 练习题参考解答	320
9.3 重积分应用	322
9.3.1 内容提要	322
9.3.2 典型例题分析	324
9.3.3 练习题	327
9.3.4 练习题参考解答	327
9.4 自测题及参考解答	330
9.4.1 自测试题	330
9.4.2 自测试题答案与提示	332
第10章 曲线积分与曲面积分	334
教与学要求	334
10.1 曲线积分及算法	334
10.1.1 内容提要	334
10.1.2 典型例题分析	336
10.1.3 练习题	340
10.1.4 练习题参考解答	340
10.2 两类曲线积分关系与曲线积分与路径无关的条件	342
10.2.1 内容提要	342

10.2.2 典型例题分析	344
10.2.3 练习题	350
10.2.4 练习题参考解答	351
10.3 曲面积分及其算法	353
10.3.1 内容提要	353
10.3.2 典型例题分析	357
10.3.3 练习题	362
10.3.4 练习题参考解答	363
10.4 曲线积分与曲面积分在几何及物理上的应用	366
10.4.1 内容提要	366
10.4.2 典型例题分析	368
10.4.3 练习题	372
10.4.4 练习题参考解答	372
10.5 自测题及参考解答	374
10.5.1 自测试题	374
10.5.2 自测试题参考答案与提示	376
第 11 章 无穷级数	377
教与学要求	377
11.1 常数项级数	377
11.1.1 内容提要	377
11.1.2 典型例题分析	380
11.1.3 练习题	384
11.1.4 练习题参考解答	386
11.2 幂级数	389
11.2.1 内容提要	389
11.2.2 典型例题分析	392
11.2.3 练习题	399
11.2.4 练习题参考解答	401
11.3 傅里叶级数	406
11.3.1 内容提要	406
11.3.2 典型例题分析	409
11.3.3 练习题	413
11.3.4 练习题参考解答	415

11.4 自测题及参考解答	420
11.4.1 自测试题	420
11.4.2 自测试题参考解答	420
第12章 微分方程	425
教与学要求	425
12.1 一阶微分方程及其解法	425
12.1.1 内容提要	425
12.1.2 典型例题分析	427
12.1.3 练习题	433
12.1.4 练习题参考解答	434
12.2 可降阶的高阶方程、二阶常系数线性方程及其解法	439
12.2.1 内容提要	439
12.2.2 典型例题分析	441
12.2.3 练习题	448
12.2.4 练习题参考解答	449
12.3 自测题及参考解答	454
12.3.1 自测试题	454
12.3.2 自测试题参考解答	455
参考文献	459

第 1 章 函数与极限

教与学要求

- (1) 理解函数、复合函数、基本初等函数和初等函数的概念;掌握函数的表示法。
- (2) 会求函数的定义域、值域、反函数、复合函数和三角函数的最小正周期;知道原函数与反函数、奇偶函数图像的性质。
- (3) 理解邻域、函数的单调性、有界性、奇偶性和周期性的概念。
- (4) 会正确分析复合函数的复合过程,能区分分段函数与初等函数。
- (5) 会建立简单应用问题的函数关系式。
- (6) 深刻理解各种极限的概念,掌握极限存在与左右极限的关系。
- (7) 熟练掌握极限的性质及四则运算法则。
- (8) 熟练掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限;熟练掌握利用两个重要极限求极限的方法。
- (9) 理解无穷小、无穷大的概念;掌握无穷小的比较法,会熟练应用等价无穷小求极限。
- (10) 理解函数在一点左(右)连续、连续、区间上连续的概念,会判断函数间断点的类型。
- (11) 知道初等函数的连续性和连续函数的性质;知道闭区间上连续函数的性质,并会应用这些性质。

1.1 映射与函数

1.1.1 内容提要

1. 集合及其运算

集合及其运算:注意区分集合与集合、元素与集合之间的关系。集合与集合之间是包含与被包含的关系,用符号“ $\subset$ ”、“ $\supset$ ”等表示两集合之间的关系;元素与集合之间是从属关系,用符号“ $\in$ ”或“ $\notin$ ”表示元素与集合之间的关系。

2. 绝对值、区间和邻域

区间和邻域:邻域(有的书上也叫邻区)必须是开区间,任一包含点 x 的开区间均称为点 x 的邻域;点 x 的 δ 邻域是唯一的开区间 $(x-\delta, x+\delta)$ 。

3. 映射、单射、满射、一一映射、逆映射与复合映射

构成映射的三要素:定义域、值域和对应法则。

注意:映射的像唯一,但原像不一定唯一;设 $f: X \rightarrow Y, \forall x \in X$, 在集合 Y 中必须有像与 x 对应,从而 f 的值域 $R_f \subset Y$, 但 $R_f = Y$ 不一定成立。

4. 函数

如果自变量在定义域内任取一个值时,对应的函数值不只一个,则这种函数叫多值函数;未特殊说明,所指函数均为单值函数。

两要素:定义域、对应法则。当且仅当两函数的定义域、对应法则都相同,则两函数相同。

函数的表示法与变量用什么字母表示无关,即 $y=f(x), v=f(u)$ 等均表示同一函数。

5. 函数的四个特性

奇偶性、周期性、单调性和有界性是函数具有的 4 个特性。

(1) 奇偶性:可根据定义或函数图像的性质判断函数的奇偶性。须注意,当函数的定义域关于原点不对称时,该函数必是非奇偶函数。如 $f(x) = \frac{x(x-1)}{x-1}$, 当 $x \neq 1$ 时,恒有 $f(-x) = -f(x)$, 但由于该函数的定义域 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ 关于原点不对称;当 $x = -1$ 时,由于 $f(-(-1)) = f(1)$ 无意义,不能保证 $f(1) = -f(-1)$, 故函数 $f(x) = \frac{x(x-1)}{x-1}$ 不是奇函数。

常见的结论:

奇(偶)函数与奇(偶)函数和或差仍是奇(偶)函数;

奇函数与偶函数的积或商是奇函数;

奇函数与奇函数、偶函数与偶函数的积或商(分母上的函数在对称区间上无零点)是偶函数。

(2) 单调性:可利用基本初等函数的性质、单调性定义、导函数的正(负)来判断函数的单调性。讨论函数的单调性,必须指明相应的区间,如不能说函数 $f(x) = x^2$ 为单调函数。因为在区间 $(-\infty, 0]$ 上该函数单调递减,而在区间 $[0, +\infty)$ 上该函数单调递增。

(3) 周期性:一般说,若 T 为函数的一个周期,则 kT (k 为整数)也是该函数的周期,从而一个周期函数必有无穷多个周期,也必有正周期;不是任何周期函数都有最小正周期,如函数 $f(x) = 1$, 对任意实数 $T, f(x+T) = f(x) = 1$ 均成立,故任意实数 T 均是其周期,所以该函数不存在最小正周期;三角函数是常见的具有最小正周期的周期函数,如 $a + b\sin(kx+c)$ 最小正周期为 $\left| \frac{2\pi}{k} \right|, a + b\sin(kx+c), |a\sin(kx+b)|$ 最小正周期为 $\left| \frac{\pi}{k} \right|$ 。

(4) 有界性: $\exists M > 0$, 对 $\forall x \in X$, 均有 $|f(x)| \leq M$ 。函数有界性定义中的界“ M ”,一般与函数本身及讨论的区间有关, M 可以不唯一,也不必是使 $|f(x)| \leq M$ 成立的最小正数。

6. 反函数和复合函数

(1) 原函数和其反函数互为反函数,其定义域和值域正好互换。函数 $y=f(x)$ 和其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像在同一坐标系中关于直线 $y=x$ 对称;但若不对换变量 x 和 y 的位置,则函数 $y=f(x)$ 和其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图像在同一坐标系中完全重合。

(2) 复合函数的分解主要是通过引入中间变量,把一个较复杂的函数分解成若干个比较简单的函数;将复合函数分解成若干个简单的函数时,其分解方式并不唯一。如 $y=e^{2x}$, 可以看成由函数 $y=e^u$ 和函数 $u=2x$ 复合而成的复合函数;也可以看成由函数 $y=u^2$ 和函数 $u=e^x$ 复合而成的复合函数。另外,须注意,并不是任何两个函数都能复合。

7. 基本初等函数、初等函数、分段函数

三角函数、反三角函数、指数函数、对数函数和幂函数五大类函数统称为基本初等函数。

初等函数必须是由基本初等函数和常数经过有限次四则运算及有限次复合运算形成的用一个式子表示的函数。如 $y=n!$ (n 为自然数), 不是初等函数, 因为随着 n 的增大, $y=n!$ 的运算次数也不断增大, 即 $y=n!$ 不是经过有限次运算形成的函数, 所以该函数不是初等函数。

分段函数一般不是初等函数,但如果分段函数能用一个式子表示,也是初等函数。如

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

就是初等函数。若函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$, $g(x)$ 在区间 $[b, c]$ 上都是初等函数, 且 $f(b) = g(b)$, 则分段函数

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [a, b] \\ g(x) & x \in (b, c] \end{cases}$$

必是初等函数。这是因为

$$\varphi(x) = f\left(\frac{x-b-|x-b|}{2} + b\right) + g\left(\frac{x-b+|x-b|}{2} + b\right) - f(b)$$

利用该结论很容易判断函数

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x \geq 0 \\ \cos x & x < 0 \end{cases}$$

是初等函数。

对于分段函数,除特殊需求外,通常没必要去鉴定它是否为初等函数。

分段函数的定义域是构成分段函数的各个解析式所对应的区间的并集;不能把分段函数看成多个函数。如

$$f(x) = \begin{cases} x & -2 \leq x \leq 0 \\ \sin x & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

其定义域是 $[-2, 2]$, 不能把 $f(x)$ 看成 $f(x)=x$ 和 $f(x)=\sin x$ 两个函数。