计算机类

重点院校推荐教材

# 数值计算方法学习指导

SHUZHI JISUAN FANGFA XUEXI ZHIDAO

刘玲 崔隽 编著

科学出版社
www.sciencep.com

重点院校推荐教材

# 数值计算方法学习指导

刘 玲 崔 隽 编著



科 学 出 版 社

北 京

# 内 容 简 介

本书是与作者所编写的《数值计算方法》(科学出版社出版, ISBN 7-03-015964-0)配套的学习参考书,全书共分七章,内容包括数值方法研究的内容及误差分析、非线性方程的数值解法、线性方程组的直接方法和迭代方法、函数逼近的插值与曲线拟合法、数值积分与数值微分、常微分方程初值问题及边值问题的数值解、矩阵特征值与特征向量的数值解等。每章分三节,第一节讲述基本概念和主要结论,第二节给出典型例题的详细解答;第三节给出主教材中A类习题的题解和答案。附录给出了上机题的C语言源程序和程序运行的结果,此部分内容基本上囊括了主教材的所有算法。

本书可作为高等院校计算机应用专业等非数学专业工科本科生及工科研究生学习主教材时不可缺少的配套学习参考书,也可供从事科学与工程计算的科技工作者参考。

**图书在版编目(CIP)数据**

数值计算方法学习指导 /刘玲,崔隽编著 .—北京:科学出版社,2006
(重点院校推荐教材)
ISBN 7-03-018162-X

Ⅰ.数… Ⅱ.①刘…②崔… Ⅲ.数值计算-计算方法-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O241

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 123380 号

责任编辑:鞠丽娜 / 责任校对:赵 燕
责任印制:吕春珉/ 封面设计:三函设计

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2006年11月第 一 版 开本:B5 (720×1000)
2006年11月第一次印刷 印张:16 1/4
印数:1—3 000 字数:330 000

**定价:22.00 元**

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)
销售部电话 010-62136131 编辑部电话 010-62138978-8002

# 前　言

随着科学技术的飞速发展，科学与工程计算愈来愈显示其重要性。作为科学与工程计算的数学工具，数值计算方法已成为各高等院校数学、计算机信息管理、物理、计算机等专业本科生的必修课，同时也是工科硕士研究生的学位公共必修课。为了帮助广大学生更有效的学好“数值计算方法”课程的基本理论和解题方法，我们编写了这本书。

本书是与作者所编写的《数值计算方法》(科学出版社出版，ISBN7-03-015964-0)配套的学习参考书，全书共分七章，包括数值方法研究内容及误差分析、解非线性方程的迭代方法、解线性方程组的直接方法和迭代方法、函数插值与函数逼近、数值积分与数值微分、常微分方程初值问题与边值问题以及特征值和特征向量的数值解。

多年来，读者学习“数值计算方法”课程时感到最困难的是解题，为此本书对一系列的数值算法习题进行了详细地分析解答，同时对配套教材的习题逐一进行了分析解答，对要求上机的题目给出了源程序，以帮助学生掌握思路和技巧，加深对所学内容的理解。本书是作者多年来教学实践经验的积累，经多届学生使用，效果很好。本书收集了近 200 道题目，它具有以下特色：

首先是教师上习题课的好教材，数值计算的习题多数是很繁琐的，解一道题有时要耗费很多时间，本书减少了教师的备课时间，也是对教材的补充讲解。

其二，本书每章分三节讲述，第一节讲述基本概念和主要结论，此部分内容是对主教材的归纳总结；第二节讲述根据主教材内容精选出的典型例题，并给出详细解答，同时还给出主教材中的 B 类习题的解答；第三节给出主教材中 A 类习题的题解和答案。附录给出了上机题的 C 语言源程序和程序运行的结果，此部分内容基本上囊括了主教材的所有算法。本书能帮助学生理解主教材的基本概念和理论，同时可供解题时遇到困难的同学自学参考，是学习主教材时不可缺少的配套学习参考书。

其三，本书注重应用性，在较严谨的理论基础上，十分重视实际课题的应用研究，在选题时注重实际应用实例，因此本书也是从事科学与工程计算方面的科技工作者的一本好的参考书。

综上所述，本书实用性强，理论结合实际，应用广泛，适合广大的工科本科生和从事科学计算的科技人员使用，也是与主教材配套的补充教材。

本书由刘玲执笔撰写，书中算法和程序由崔隽执笔撰写。在编写过程中得到

南京大学林成森教授的指导，并在书中采纳了林老师的很多宝贵建议，在此深表谢意。由于作者的水平有限，书中难免存在错误及不妥之处，敬请广大读者批评指正。

作　者

2006 年 8 月

# 目　录

# 第1章　绪　　论

## 1.1　基本概念及主要结论

### 1.1.1　数值计算方法研究的对象与特点

数值计算方法是数学的一个分支,它的研究对象是利用计算机求解各种数学问题的数值方法及有关理论。主要研究内容有非线性方程与方程组的数值解法,线性方程组的数值解法,函数逼近的插值法与曲线拟合法,数值积分与微分,常微分方程数值解法及矩阵特征值和特征向量的数值解法。

数值计算方法的主要特点:首先是面向计算机,提供切实可行的常用算法,所谓算法就是规定了怎样从输入数据计算出数值问题的一个有限的基本运算序列;其二是依据可靠的理论分析,能够任意逼近数学问题的精确解;其三是省时省资源,有良好的计算复杂性。计算复杂性是指达到给定精度时该算法所需要的计算时间和所占的内存空间。前者称为时间复杂性;后者称为空间复杂性。在同一精度下,所需时间少及所占内存空间小则称为具有良好的计算复杂性。

数值计算方法的任务就是提供在计算机上实现可行的,理论可靠的,计算复杂性好的各种算法。

### 1.1.2　误差与有效数

1. 误差的来源与分类

误差由其来源分为模型误差,观测误差,截断误差以及舍入误差等四类。从实际问题建立的数学模型往往忽略了许多次要因素,因此产生的误差称为模型误差;一般数学问题包含若干参数,它们的值是通过观测得到的,受观测方式、仪器精度以及外部观测条件等多种因素影响,不可能获得精确值,由此产生的误差称为观测误差;一般数学问题难以准确求解,往往只能求得近似解,这样产生的误差称为截断误差;在计算机上运算时受机器字长的限制,一般必须对数据进行舍入,此时产生的误差称为舍入误差。

**定义1.1**　设$x^*$为准确数$x$的一个近似数,称$e(x^*) = x^* - x$为近似数$x^*$的绝对误差,简称误差;称$e_r(x^*) = \dfrac{e(x^*)}{x}$为近似数$x^*$的相对误差。

若有正数$\varepsilon,\varepsilon_r$满足

$$|e(x^*)| < \varepsilon$$
$$|e_r(x^*)| < \varepsilon_r$$
则分别称 $\varepsilon$ 和 $\varepsilon_r$ 为近似数的绝对误差界和相对误差界。

2. 有效数字

**定义 1.2** 设近似数 $x^*$ 有规格化形式：
$$x^* = \pm 10^m \times 0.a_1a_2a_3\cdots a_n$$
其中 $m$ 和 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为整数，且 $a_1 \neq 0, 0 \leqslant a_i \leqslant 9$。如果 $x^*$ 的绝对误差满足：
$$|e(x^*)| = |x^* - x| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{m-n}$$
则称 $x^*$ 为 $x$ 具有 $n$ 位有效数字的近似数。

3. 函数值的误差估计

为方便起见，引入误差的微分概念，设 $x^*$ 与 $y^*$ 分别是 $x$ 与 $y$ 的近似数，则
$$e(x^*) = x^* - x = \Delta x = \mathrm{d}x$$
$$e_r(x^*) = \frac{e(x^*)}{x} = \frac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{d}\ln x$$
由此可以证明
$$e(x^* \pm y^*) = e(x^*) \pm e(y^*)$$
$$e_r(x^* y^*) = e_r(x^*) + e_r(y^*)$$
$$e_r\left(\frac{x^*}{y^*}\right) = e_r(x^*) - e_r(y^*)$$
**定义 1.3** 设函数 $y=f(x)$，当 $x$ 是用近似数 $x^*$ 代替计算函数值 $f(x^*)$ 时，则函数值的绝对误差为
$$\begin{aligned} e(f) &= f(x^*) - f(x) \\ &\approx \mathrm{d}f(x^*) = f'(x^*)(x^* - x) = f'(x^*)e(x^*) \end{aligned}$$
函数值的相对误差为
$$e_r(f) \approx \frac{x^* f'(x^*)}{f(x^*)} e_r(x^*)$$
对于 $n$ 元函数 $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，设点 $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)^{\mathrm{T}}$，$x_i^*$ 是 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的近似值。用 $f(\boldsymbol{x}^*)$ 代替 $f(\boldsymbol{x})$，其绝对误差为
$$e(f) = f(\boldsymbol{x}^*) - f(\boldsymbol{x}) \approx \mathrm{d}f(x^*) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_i} e(x_i^*)$$
因此，绝对误差界有如下估计：

$$|e(f)| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_i}\right| |e(x_i^*)|$$

类似地,相对误差和相对误差界为

$$e_r(f) \approx \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_i}\frac{x_i^*}{f(\boldsymbol{x}^*)}e_r(x_i^*)$$

$$|e_r(f)| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_i}\frac{x_i^*}{f(\boldsymbol{x}^*)}\right| |e_r(x_i^*)|$$

### 1.1.3 算法的优化准则

1. 评价算法的标准

评价算法的优劣大致有以下标准:

(1) 从截断误差观点看,一个算法必须是截断误差小,收敛速度快,即运算量小,机器用时少。

(2) 从舍入误差观点看,舍入误差在计算过程中要能控制,即数值要稳定。

(3) 从实现算法观点看,一个算法逻辑结构不宜太复杂,要便于程序编写和上机实现。

2. 设计算法时应遵循的原则

设计算法时应遵循以下原则:

(1) 要有数值稳定性,即能控制误差的传播。

(2) 避免大数吃小数,即两数相加时,防止较小的数加不到较大的数中所引起的严重后果。

(3) 避免两个相近的数相减,以免有效数字的大量丢失。

(4) 避免分母很小(或乘法因子很大),以免产生较大误差或溢出。

## 1.2 典型例题精解

**例 1.2.1** 设 $x_1 = 37.13, x_2 = 6.052$,所给数字均为有效数字,试估计 $y = x_1x_2^2$ 的绝对误差界。

**解** 
$$\begin{aligned}|e(y)| &= |\mathrm{d}y| = |\mathrm{d}(x_1x_2^2)| \\ &\leqslant x_2^2|\mathrm{d}x_1| + |2x_1x_2||\mathrm{d}x_2| \\ &= 6.052^2 \times \frac{1}{2} \times 10^{-2} + 2 \times 37.13 \times 6.052 \times \frac{1}{2} \times 10^{-3} \\ &= 0.408\end{aligned}$$

**例 1.2.2** 计算积分 $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5}\mathrm{d}x\,(n = 0,1,2,\cdots)$。

**解**　由于 $I_n + 5I_{n-1} = \int_0^1 x^{n-1}dx = \frac{1}{n}(n = 1,2,\cdots)$,于是可得递推公式:

$$\begin{cases} I_n = -5I_{n-1} + \frac{1}{n} \\ I_0 = \ln 1.2 \end{cases} \quad (n = 1,2,\cdots)$$

取 $I_0 = \ln 1.2 \approx \tilde{I}_0 = 0.182$,计算结果见表 1.2.1,其中 $I_n$ 是积分值;$\overline{I_n}$是 $I_n$ 的近似值;$\tilde{I}_n$ 是由递推公式计算所得的值。

**表 1.2.1**

| $n$ | $I_n$ | $\overline{I_n}$ | $\tilde{I}_n$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.182322 | 0.182 | 0.182 |
| 1 | 0.088392 | 0.088 | 0.090 |
| 2 | 0.058039 | 0.058 | 0.050 |
| 3 | 0.043139 | 0.043 | 0.083 |
| 4 | 0.034306 | 0.034 | −0.165 |
| 5 | 0.028468 | 0.028 | 1.025 |
| 6 | 0.024325 | 0.025 | −4.958 |
| 7 | 0.021231 | 0.021 | 24.933 |
| 8 | 0.018846 | 0.019 | −124.540 |

从表中可以看出,$\tilde{I}_n$ 显然不对,当 $n = 4$ 时就完全失真,因为 $0 < I_n < 1$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$,而表中 $\tilde{I}_n$ 出现负值,且当 $n$ 较大时,其绝对值很大。这时,因为 $|\varepsilon_0| = |I_0 - \tilde{I}_0| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-3}$,令

$$\varepsilon_n = I_n - \tilde{I}_n$$

则

$$\varepsilon_n = -5\varepsilon_{n-1} = \cdots = (-5)^n \varepsilon_0$$

故有

$$|\varepsilon_n| \geqslant 5^n |\varepsilon_0|$$

这表明误差在放大,所以该算法不稳定。

如将算法改写成

$$\begin{cases} I_{n-1} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{n} - I_n\right) \\ I_8 = \tilde{I}_8 = 0.019 \end{cases} \quad (n = 8,7,\cdots,1)$$

由于 $\varepsilon_8 = |I_8 - \tilde{I}_8| < \frac{1}{2} \times 10^{-3}$,而 $\varepsilon_{n-1} = -\frac{1}{5}\varepsilon_n$,所以 $|\varepsilon_0| \leqslant (\frac{1}{5})^8 \varepsilon_8$,也就是误差不放大且逐步递减,所以算法是稳定的。

**例 1.2.3** 在字长为三位的十进制计算机上,用浮点数分别从左到右和从右到左计算下式,并比较结果。

$$12.3+0.56+0.78+0.079+0.068+0.057$$

**解** 从左向右相加求和得

$$\begin{aligned}S_1 &= 10^2\times 0.123+10^2\times 0.0056+10^2\times 0.0078+10^2\times 0.00079\\&\quad+10^2\times 0.00068+10^2\times 0.00057\\&=10^2\times(0.123+0.005+0.007+0.000+0.000+0.000)\\&=10^2\times 0.135\end{aligned}$$

在计算过程中,后面的小数被前面的大数吃掉了。若从右向左相加求和

$$\begin{aligned}S_2 &= 10^{-1}\times 0.570+10^{-1}\times 0.680+10^{-1}\times 0.790+0.78+0.56+12.3\\&=0.204+0.78+0.56+12.3\\&=10\times 0.1544+12.3\\&=10^2\times 0.01544+10^2\times 0.123\\&=10^2\times 0.138\end{aligned}$$

所以在多个数求和时,如果被加数的绝对值之间差异较大时,且包含很多绝对值较小的数,应按从绝对值较小到大的次序相加。

**例 1.2.4** 算式:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}=\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\times(2n+1)}$$

试编程上机计算 $S_{10000}$分别从左加到右与从右加到左,并与精确值进行比较,指出哪一种算法好,并说明原因何在。

**解** 因为 $S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$,令 $n=10000$,则 $S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{20001}\right)=0.499975$。由程序(见附录程序 1.1)运行结果知:若结果取六位有效数字,当从左到右计算时 $S_{10000}=0.499948$ ,从右到左计算时 $S_{10000}=0.499975$ 。可见从右加到左计算较精确,这是因为从小数开始相加,避免了大数吃小数,有效数字得以保留。

**例 1.2.5** 求二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 根的公式通常形式为

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad a\neq 0$$

当 $b^2\gg 4|ac|$时,有$|b|\approx\sqrt{b^2-4ac}$,则在两个求根公式中至少有一个因相近数相减而不可靠,因此在计算机上改为

$$x_1=\frac{-b-\mathrm{sign}(b)\sqrt{b^2-4ac}}{2a},x_2=\frac{c}{ax_1}$$

这样就避免了两相近数相减。

**例 1.2.6** 计算 $P=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}$。

**解** 若按先计算分子$(2n-1)!!$,再计算分母$(2n)!!$,然后进行除法,最后乘以$\frac{\pi}{2}$。这种算法的缺点是当 $n$ 很大时,受字长的限制,分子、分母可能产生上溢。

若将算法改进为

$$\begin{cases} P = 1 \\ P = P \times \dfrac{2k-1}{2k} \quad (k = 1,2,\cdots,n) \\ P = P \times \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

这样就避免了上溢。

## 1.3 第1章A类习题分析解答

1.1 取 $\pi \approx 3.1416$,试估计 $\pi^2, \sqrt{\pi}, \ln\pi$ 的相对误差和绝对误差。

**解**

$$|e_r(\pi^2)| = \left|\frac{\mathrm{d}(\pi^2)}{\pi^2}\right| = \left|2\frac{\mathrm{d}(\pi)}{\pi}\right| \leqslant 2 \times \frac{\frac{1}{2}\times 10^{-4}}{3.1416} = 3.183 \times 10^{-5}$$

$$|e(\pi^2)| = |2\pi\mathrm{d}\pi| \leqslant 2 \times 3.1416 \times \frac{1}{2} \times 10^{-4} = 3.1416 \times 10^{-4}$$

$$|e_r(\sqrt{\pi})| = \left|\frac{\mathrm{d}\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}\pi}{2\pi}\right| \leqslant \frac{\frac{1}{2}\times 10^{-4}}{2\times 3.1416} = 7.96 \times 10^{-6}$$

$$|e(\sqrt{\pi})| = |\sqrt{\pi}e_r(\sqrt{\pi})| \leqslant 1.41 \times 10^{-5}$$

$$|e_r(\ln\pi)| = \left|\frac{\mathrm{d}\ln\pi}{\ln\pi}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}\pi}{\pi\ln\pi}\right| \leqslant \frac{\frac{1}{2}\times 10^{-4}}{3.1416\times\ln 3.1416} = 1.39 \times 10^{-5}$$

$$|e(\ln\pi)| = \left|\frac{\mathrm{d}\pi}{\pi}\right| \leqslant 1.6 \times 10^{-5}$$

1.2 设 $f(x) = x^3 - x - 1$, $x^* = 1.3247$ 是具有五位有效数字的近似数,试估计计算 $f(x^*)$值的绝对误差和相对误差。

**解**

$$|e_r(f)| \leqslant \left|\frac{\mathrm{d}(f(x))}{f(x)}\right| = \left|\frac{(3x^2-1)\mathrm{d}x}{x^3-x-1}\right|$$

$$= \left|(3\times 1.3247^2 - 1)\frac{\frac{1}{2}\times 10^{-4}}{1.3247^3 - 1.3247 - 1}\right| = 2.7843$$

$$|e(f)| \leqslant |\mathrm{d}(f(x))| = |(3x^2-1)\mathrm{d}x|$$

$$=\left|(3\times 1.3247^2-1)\times\frac{1}{2}\times 10^{-4}\right|=2.1322\times 10^{-4}$$

1.3 测量一房间面积时,所得尺寸如下:长 $a^*=4.82\text{m}$,宽 $b^*=3.45\text{m}$,$a^*$,$b^*$ 各位数字均为有效数字,试估计该房间面积 $s$ 的绝对误差和相对误差。

**解** 由 $s=ab$ 得

$$|e(s)|\leqslant\left|\frac{\partial s}{\partial a}\right|+\left|\frac{\partial s}{\partial b}\right|=4.82\times\frac{1}{2}\times 10^{-2}+3.45\times\frac{1}{2}\times 10^{-2}=4.14\times 10^{-2}(\text{m}^2)$$

$$|e_r(s)|\leqslant\left|\frac{e(s)}{s}\right|=\frac{4.14\times 10^{-2}}{4.82\times 3.45}=2.49\times 10^{-3}$$

1.4 为计算 $f=(\sqrt{2}-1)^6$ 的值,现取 $\sqrt{2}\approx 1.4142$,利用下列算式

(1) $f=\dfrac{1}{(\sqrt{2}+1)^6}$ (2) $f=(3-2\sqrt{2})^3$

(3) $f=\dfrac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$ (4) $f=99-70\sqrt{2}$

由误差分析,试判断哪一个算式最好?哪一个算式最差?

**解** 令 $x=\sqrt{2}$,则 $e(x)=\dfrac{1}{2}\times 10^{-4}$,于是

(1) $|e(f)|\leqslant|f'(x)||e(x)|=\dfrac{6}{(1+x)^7}|e(x)|=0.013|e(x)|$

(2) $|e(f)|\leqslant|f'(x)||e(x)|=6(3-2x)^2|e(x)|=0.1766|e(x)|$

(3) $|e(f)|\leqslant|f'(x)||e(x)|=\dfrac{6}{(3+2x)^4}|e(x)|=0.0053|e(x)|$

(4) $|e(f)|\leqslant|f'(x)||e(x)|=70|e(x)|$

由上可知,取第(3)式计算最好,第(4)式最差。

1.5 设二次方程 $x^2-56x+1=0$,若取 $\sqrt{783}\approx 27.98214$,并用二次方程求根公式计算两根。

(1) 先计算绝对值较大的根 $x_1$,再利用 $x_1$ 的结果,由韦达定理计算 $x_2$;

(2) 先计算绝对值较小的根 $x_2$,再利用 $x_2$ 的结果,由韦达定理计算 $x_1$,并比较两种结果算法的稳定性;

(3) 对 (2) 的算法,给出计算 $x_1$ 的改进算式。

**解** 由 $x^2-56x+1=0$ 解得:$x_{1,2}=28\pm\sqrt{28^2-1}$,即 $x_1=28+\sqrt{28^2-1}=55.98213716\cdots$,$x_2=28-\sqrt{28^2-1}=0.01786284\cdots$。

(1) 因为 $x_1=28+\sqrt{28^2-1}=28+27.98214=55.98214$,所以 $x_2=\dfrac{1}{x_1}=0.017863$。

(2) 同理 $x_2=28-\sqrt{28^2-1}=28-27.98214=0.01786$,所以 $x_1=\dfrac{1}{x_2}=55.99104$。

方法(1)中$|e(x_2)|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-5}$,方法(2)中$|e(x_1)|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-1}$,说明方法(1)优于方法(2),这是因为方法(2)是用较小的数做除数,因而产生了较大的误差。

(3) 由韦达定理：$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=56$,做下述改进

$$x_2 = 28 - \sqrt{28^2 - 1} = 0.01786$$
$$x_1 = 56 - x_2 = 55.98214$$

这样避免了较小数做除法,因而保证算法的稳定性。

1.6 设 $f(x)=\ln(x-\sqrt{x^2-1})$,为计算 $f(30)$的值,取开平方计算到六位有效数字,试估计计算结果的绝对误差。若取等价表达式 $f(x)=-\ln(x+\sqrt{x^2-1})$,再计算 $f(30)$,则绝对误差又有多大?

**解** 当 $x=30$ 时,$\sqrt{x^2-1}=29.9833$ 为具有六位有效数字的近似数,因此,$u=x-\sqrt{x^2-1}=0.0167$,$|e(u)|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-4}$,于是

$$|e(f)| = |f'(u)||e(u)| = \frac{1}{u}|e(u)| \leqslant \frac{1}{0.0167}\times\frac{1}{2}\times10^{-4}\leqslant 0.003 = 0.3\times10^{-2}$$

若取等价表达式 $f(x)=-\ln(x+\sqrt{x^2-1})$,则 $v=x+\sqrt{x^2-1}=59.9833$,故有

$$|e(f)| = |f'(v)||e(v)| = \frac{1}{v}|e(v)| \leqslant \frac{1}{59.9833}\times\frac{1}{2}\times10^{-4}\leqslant 0.834\times10^{-6}$$

显然,等价的表达式算法更稳定,这是因为避免了两相近数相减。

1.7 设自由落体算式 $s=\frac{1}{2}gt^2$,假定重力加速度 $g$ 是准确的,而时间 $t$ 的测量有$\pm0.1$秒的误差。证明:当时间 $t$ 增大时,计算距离 $s$ 的绝对误差增加,而相对误差却减小。

**证明** 因为 $s$ 的绝对误差界和相对误差界分别为

$$|e(s)| = \left|e\left(\frac{1}{2}gt^2\right)\right| = gt|e(t)| = 0.1gt$$

$$|e_r(s)| = \frac{|e(s)|}{s} = \frac{0.1gt}{\frac{1}{2}gt^2} = \frac{0.2}{t}$$

显然当时间 $t$ 增大时,计算距离 $s$ 的绝对误差增加,而相对误差却减小。

1.8 设

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1}dx \qquad (n = 0,1,2,\cdots)$$

(1) 推证递推算式:$I_n=1-nI_{n-1}(n=1,2,3,\cdots)$,$I_0=1-e^{-1}$

(2) 若取 $e^{-1}\approx0.36788$,试用(1)的递推算式计算 $I_{12}$的近似值 $I_{12}^*$,这个结果可靠吗? 试说明理由。

**解** (1) 由定积分的分部积分法得

$$I_0 = \int_0^1 e^{x-1} dx = 1 - e^{-1}$$

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 x^n e^{x-1} dx = \int_0^1 x^n de^{x-1} \\ &= x^n e^{x-1} \Big|_0^1 - \int_0^1 e^{x-1} dx^n \\ &= 1 - n\int_0^1 x^{n-1} e^{x-1} dx \\ &= 1 - nI_{n-1} \end{aligned}$$

所以 $I_n = 1 - nI_{n-1}(n = 1,2,\cdots), I_0 = 1 - e^{-1}$。

(2) 由递推公式得

$$\begin{aligned} I_{12}^* \approx I_{12} &= 1 - 12I_{11} = 1 - 12(1 - 11I_{10}) \\ &= \cdots \\ &= 1 - 12 + 12 \times 11 - 12 \times 11 \times 10 + \cdots + 12!\, I_0 \\ &= -267.61 \end{aligned}$$

因为 $|e(I_{12})| = 12!\ |e(I_0)| >> |e(I_0)|$,显然误差不可控制,是病态的,所以 $I_{12}$ 的结果是不可靠的。

# 第 2 章　非线性方程的数值解法

## 2.1　基本概念及主要结论

### 2.1.1　方程求根与二分法

设有方程 $f(x)=0$,其中 $f(x)$ 可以是代数多项式,也可以是超越函数。满足 $f(x^*)=0$ 的值 $x^*$ 就是 $f(x)=0$ 的解,又称 $x^*$ 为方程 $f(x)=0$ 的根。如果 $f(x)$ 可以分解为

$$f(x) = (x-a)^m g(x)$$

$m$ 为正整数,且 $g(a)\neq 0$,则称 $a$ 是为 $f(x)=0$ 的 $m$ 重根。

1. 方程求根

方程求根首先判断根的存在性,找出根所在的有根区间。由连续函数的零点定理:若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)f(b)<0$,则方程 $f(x)=0$ 在 $(a,b)$ 内至少有一实根,称 $[a,b]$ 为方程的有根区间。若 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上保号,则 $f(x)=0$ 在 $(a,b)$ 内存在唯一实根。

在根存在的前提下,求方程的根一般采用逐次逼近的思想,以一个初值 $x_0$ 出发,按某一种方法产生一个序列 $x_0,x_1,\cdots,x_n,\cdots$,使得此序列收敛到方程的根。这种求方程的根的方法称为迭代法。

2. 二分法

解方程 $f(x)=0$ 的二分法,其原理仍然是利用连续函数的零点定理。设 $f(x)=0$ 在 $(a,b)$ 内有唯一实根,令 $a_1=a,b_1=b$,取中点 $x=\dfrac{b+a}{2}$,若 $f(x)=0$,则 $x$ 就是方程的根;若 $f(a_1)f(x)<0$,则新的有根区间为 $[a_2,b_2]=[a_1,x]$,否则 $[a_2,b_2]=[x,b_2]$。此时有 $[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]$ 且 $b_2-a_2=\dfrac{1}{2}(b_1-a_1)$。再对 $[a_2,b_2]$ 以同样的方法获得新的有根区间 $[a_3,b_3]$,如此反复进行下去可得一系列区间

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$$

其中每个区间都是前一个区间的一半,因此有

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}$$