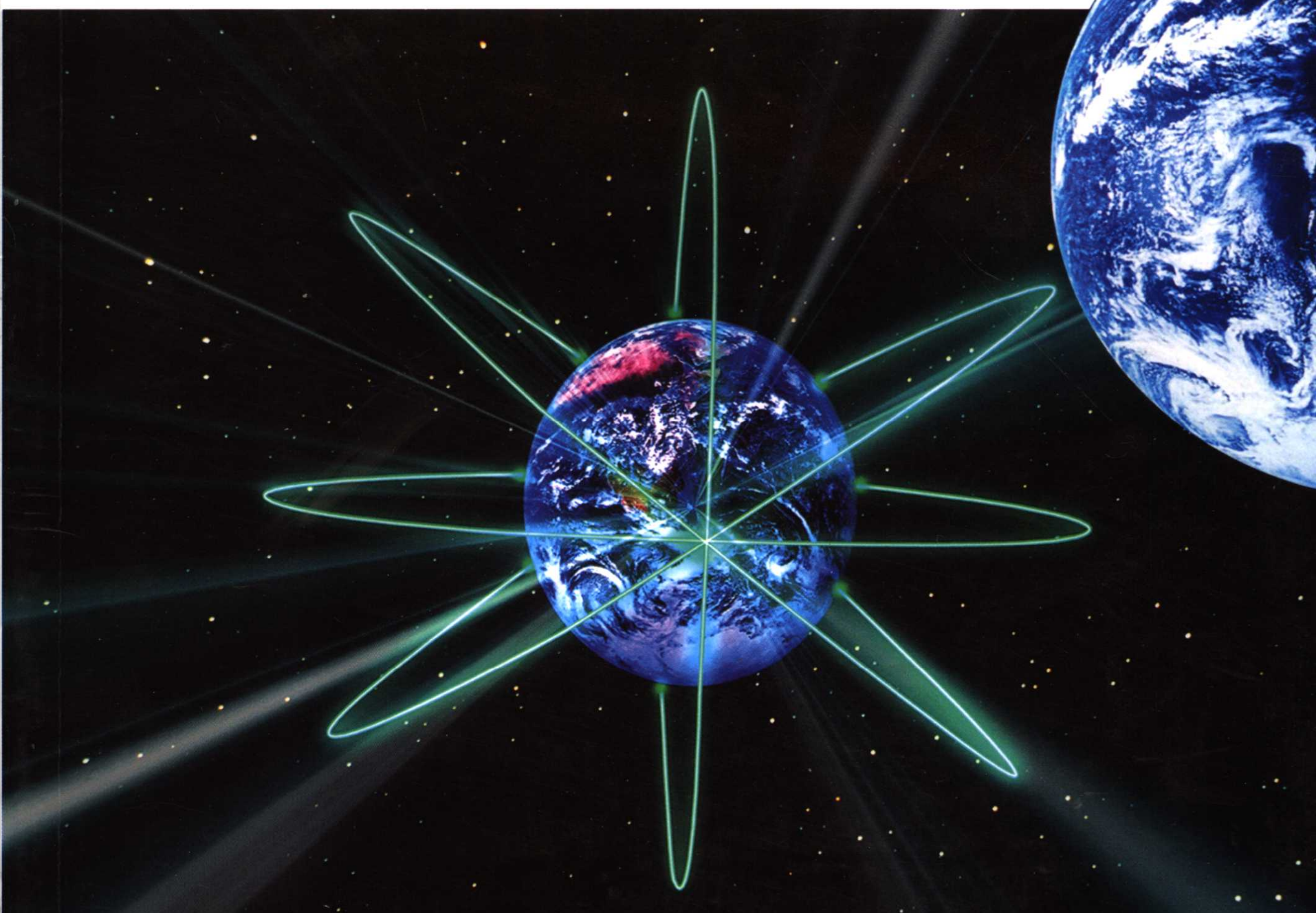
孙祝 孙彦 编著

大学物理

DAXUEWULI



中国科学技术出版社

山西大同大学资金资助

大 学 物 理

孙 祝 孙 彦 主编

中国科学技术出版社
·北 京·

图书在版编目(CIP)数据

大学物理/孙祝,孙彦主编.—北京:中国科学技术出版社,2006.2
ISBN 7-5046-4288-6

Ⅰ.大… Ⅱ.①孙…②孙… Ⅲ.物理学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.04

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 013088 号

中国科学技术出版社出版
北京市海淀区中关村南大街 16 号 邮政编码:100081
电话:62179148 62173865
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
北京长宁印刷有限公司印刷

*

开本:787 毫米×1092 毫米 1/16 印张:19 字数:500 千字
2006 年 3 月第 1 版 2006 年 3 月第 1 次印刷
印数:1-1000 册 定价:35.00 元

前　言

大学物理是理工科大学生的一门重要基础课，学好物理学对于培养学生的科学思想方法，提高学生科学素质和从事科学工作的能力至关重要. 但是，很多理工科学生对于理解物理概念、掌握物理规律，特别是求解特理习题感一十分困难，主要原因就是物理学内容广泛、概念抽象、规律较多，而且各部分内容的研究方法差异较大，使学生难以接受，面对物理习题 往往无从下手。目前，理工科物理学时少、内容多的矛盾日益突出，仅靠一套教材难以满足教学要求，因此迫切需要一套针对性较强、切实可用的学习指导书. 为此，我们集多年的教学经验编写了这本《大学物理》.

本书在编写体例上突出三项内容：一、目的和要求. 根据高等学校"大学物理基本要求"提出了各章内容的重点，明确对各部分内容的要求，从而使学生心中有数；二、基本概念和公式. 主要说明了理解物理概念和规律；三、解题指导. 将物理习题综合归纳成若干类型，对每一类型习题都明确指出解题思路和方法，并结合典型例题进行说明. 全书紧紧围绕重点，突出解题思路和方法，概念清楚，文字通顺，篇幅简洁，对学生掌握物理知识，提高解题技巧和能力有较大的帮助，对教师的教学有一定的参考价值.

由于水平有限，时间仓促，本书还有不少缺点和错误，恳请读者提了宝贵意见.

编　者

责任编辑：金　陵
封面设计：沈　松
责任印制：王　沛

目　录

第一章　质点运动学

一、目的和要求

(1) 明确机械运动的描述，理解质点模型，参照系 、坐标系的选取方法.

(2) 理解描述质点运动及运动变化的基本物理量(位置矢量、位移、速度、加速度) 的定义和性质. 明确这些物理量在直角坐标系和自然坐标系下的表示方法. 理解它们的矢量性、瞬时性和相对性.

(3) 明确运动方程的意义和作用，熟练掌握运用运动方程求解各运动量的方法，掌握由加速度或速度、初始条件确定运动方程的方法.

(4) 明确圆周运动的描述方法，掌握描述圆周运动的角量与线量的关系.

(5) 了解相对运动的处理方法.

二、基本概念和公式

(一)　描述机械运动的方法

1. 参照系与坐标系

运动是物质的基本属性，对运动的描述只能是相对的. 因此，要描述一个物体的运动，首先要选定一个参照系，为定量地描述物体的运动，必须在选定参照系的基础上建立一个坐标系. 常用的坐标系有直角坐标系、自然坐标系、极坐标系等. 参照系与坐标系原则上可任意选取，视解决问题方便而定.

2. 质点

一般物体的运动是复杂的，要描述运动，就必须忽略一些次要因素，突出主要因素，在物理学中常常将一个实际物体或系统抽象为理想模型，质点就是描述机械运动中一个理想模型. 当一个物体的自身大小在所研究的问题中无关紧要，或者物体(系)内部各部分的运动情况相同或差异不大时，可将物体抽象为质点.

(二)　描述质点运动的基本物理量

(1) 通常用位置矢量、位移矢量、速度矢量和加速度矢量来描述质点的运动. 在直角坐标系中(如图 1-1)，各量可表示为：

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{k} \tag{1-1}$$

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}+\Delta z\boldsymbol{k} \tag{1-2}$$

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} \tag{1-3}$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k} \tag{1-4}$$

① 上述各量都具有矢量性：实际计算时常对它们的各分量进行计算；各分量为代数量(标量)，可正、可负；某一分量值为正说明该分量与坐标轴正方向相同，反之亦然。

② 位置矢量$\boldsymbol{r}$、速度$\boldsymbol{v}$和加速度$\boldsymbol{a}$都具有瞬时性，位移矢量 $\Delta\boldsymbol{r}$与时间 Δt 有关.计算时应特别注意对不同的时刻 t 和时间 Δt 各量的值一般不同.注意瞬时值和平均值的不同.

③ 上述各量均具有相对性，即对于不同的参照系，描述运动各量的取值不同，但存在着一定的关系，即相对运动的合成公式.

设 O 和 O'为两个参照系或两坐标系的原点；P 为所描述的质点(如图 1- 2)，则：

$$\boldsymbol{r}_{P对O}=\boldsymbol{r}_{P对O'}+\boldsymbol{r}_{O'对O}\ ,\qquad \Delta\boldsymbol{r}_{P对O}=\Delta\boldsymbol{r}_{P对O'}+\boldsymbol{r}_{O'对O}$$

$$\boldsymbol{v}_{P对O}=\boldsymbol{v}_{P对O'}+\boldsymbol{v}_{O'对O}\ ,\qquad \boldsymbol{a}_{P对O}=\boldsymbol{a}_{P对O'}+\boldsymbol{a}_{O'对O}$$

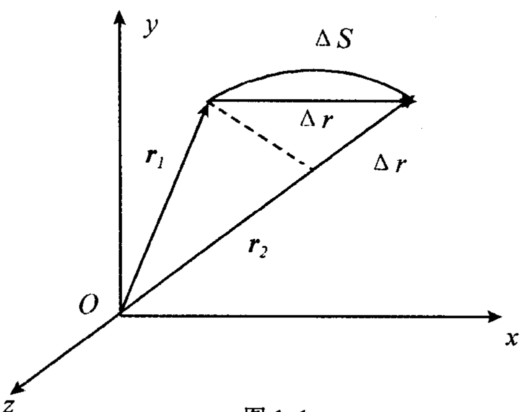


图 1-1

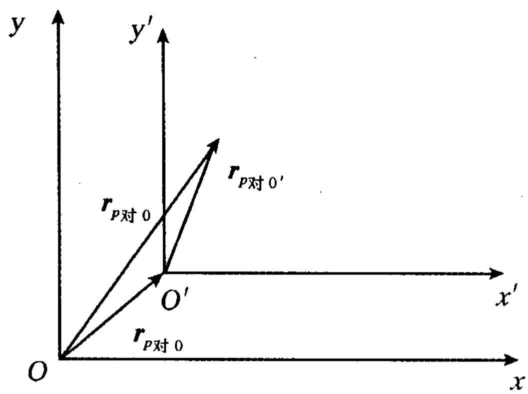


图 1-2

(2) 当质点的运动轨迹为已知曲线时，常取自然坐标系描述质点运动 (如图 1-3)，在自然坐标系下，T 和 n 分别为切线方向和法线方向单位矢量，则：

$$\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{\tau}$$

$$\boldsymbol{a}=a_\tau\boldsymbol{\tau}+a_n\boldsymbol{n}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n} \tag{1-5}$$

① $a_n=0$ ($\rho\to\infty$)时，为直线运动.

② $\rho=R=$常量时($a_n\neq0$)，为圆周运动，$a_\tau=0$ 时为匀速率圆周运动.

③ a=常矢量，a_n，a_τ都变化时为匀变速运动，如抛体运动.

(3) 当质点作圆周运动时，常选取极坐标，引用角量来描述运动(如图 1- 4).

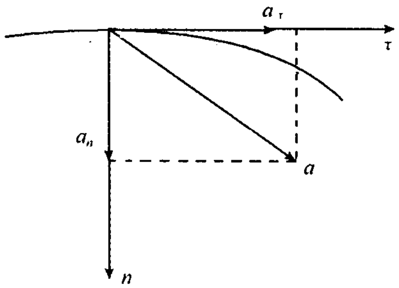


图 1-3

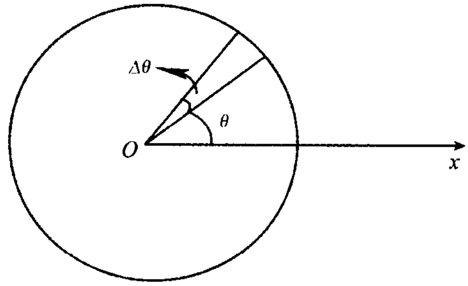


图 1-4

角坐标　　　　　$\theta=\theta(t)$　　　　(1-6)

角位移　　　　　$\Delta\theta=\theta_2-\theta_1$　　　　(1-7)

角速度　　　　　$\boldsymbol{\omega}=\dfrac{d\boldsymbol{\theta}}{dt}$　　　　(1-8)

角加速度　　　　$\boldsymbol{\beta}=\dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}=\dfrac{d^2\boldsymbol{\theta}}{dt^2}$　　　　(1-9)

① 角速度、角加速度一般为矢量：$\boldsymbol{\omega}=\dfrac{d\boldsymbol{\theta}}{dt}$ ，$\boldsymbol{\beta}=\dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$. $\Delta\theta$ 一般不为矢量，但 $\Delta t\to0$ 时，$d\theta$ 为矢量，其方向依右手定则确定，四指环绕转动方向，拇指为 $d\theta$ 的方向，角速度 ω 与 $d\theta$ 方向一致．

② 角量与线量之间存在着矢量关系：$d\mathbf{r}=d\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{r}$ ，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ ，$\mathbf{a}_\tau=\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{r}$ ，$\boldsymbol{a}_n=-\boldsymbol{\omega}^2\boldsymbol{r}$.

③ 在定轴转动中，ω、β 的方向平行于转轴，所以角量可用正、负表示方向.角量与线量的标量关系为：$\Delta S=r\Delta\theta$ ，$v=\omega r$ ，$a_\tau=\beta r$ ，$a_n=\omega^2r$.

(三)运动方程与轨迹方程

运动方程是表示质点位置(矢量)随时间 t 变化的函数关系式，即 $r=r(t)$.在直角坐标系下，常用各分量坐标与时间 t 的关系表示运动方程，即：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)\Rightarrow\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$$

在自然坐标系下运动方程的形式为：$S=S(t)$ ；(已知轨迹)；在极坐标下运动方程的形式为$r=r(t)$，$\theta=\theta(t)$.消去参数，可得到轨迹方程 $r=r(\theta)$.

轨迹方程是表示质点运动的空间轨迹曲线方程，是坐标间的函数关系；由运动方程消去参数 t 便可得到轨迹方程，$y=f(x)$

运动方程是描述质点运动的核心，已知运动方程则可求出各运动量和轨迹方程，从而获得质点运动的全部情况.

常见运动形式的运动方程：

(1) 匀变速直线运动： $x=x_0+v_0t+\dfrac{1}{2}at^2$，　$v=v_0+at$ ，$v^2=v_0^2+2a(x-x_0)$

(2) 平抛运动： $\begin{cases}x=v_0t\\y=\dfrac{1}{2}gt^2\end{cases}\rightarrow y=\dfrac{gx^2}{2v_0^2}$ (轨迹方程)

(3) 斜抛运动： $\begin{cases}x=v_0\cos\theta t\\y=v_0\sin\theta t-\dfrac{1}{2}gt^2\end{cases}\rightarrow y=x\mathrm{tg}\theta-\dfrac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta}$(轨迹方程)

(4) 圆周运动： $\begin{cases}x=R\cos\omega t\\y=R\sin\omega t\end{cases}\rightarrow x^2+y^2=R^2$ (轨迹方程)

三、解题指导

本章习题大体可归纳为，已知运动方程求运动各量，已知加速度(或速度)及初始条件求运动方程，对常见的特殊运动(如抛体运动、圆周运动、匀变速直线运动等) 的分析，相对运动问题等类型，现分别进行讨论.

（一） 已知运动方程求运动各量

此类习题包括直线运动或曲线运动，若给定运动方程可求出运动各量，如位置、位移、速度、加速度、路程、平均速率等.求解此类习题的基本方法是依据各物理量的定义通过运动方程来求，运用的主要手段是微分或求导.此类习题是本章重点内容.

例题 1－1 已知质点沿 x 轴运动，运动方程为 $x=8t-4t^2+12$.

求：(1) t=0，1，2，4s 时的位置、速度和加速度；

(2) t=0 时，到 t=2s 时间内的位移、路程、平均速度、平均速率；

(3) 描述质点运动情况.

解 由运动方程 $x=12+8t-4t^2$

$$\therefore v=\frac{dx}{dt}=8-8t \qquad a=\frac{dv}{dt}=-8$$

(1) 将 t=0，1，2，4 代入上述各式：

$t=0 \quad x_0=12 \quad v_0=8 \quad a_0=-8$； $t_1=1 \quad x_1=16 \quad v_1=0 \quad a_1=-8$

$t=2 \quad x_2=12 \quad v_2=8 \quad a_2=-8$； $t=4 \quad x_1=-2 \quad v_4=-24 \quad a_4=-8$

(2) $\Delta t=2-0=2s$ 内，位移 $\Delta x=x_2-x_0=12-12=0$；因为 $t=1$，$v=0$ 运动方向发生变化，所以路程 $\Delta S=2(x_1-x_0)+(x_2-x_0)=8$，平均速度 $|v|=\left|\frac{\Delta x}{\Delta t}i\right|=0$，平均速率 $v=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{8}{2}=4\text{m/s}$.

(3) 质点从 x_0=12m 处，开始沿 x 正向作匀减速运动，在 t=1s 末，到达 x_1=16m 处，速度为 0，立即返回，沿 x 轴负向作匀加速运动.因为整个运动过程中，$a=-8\text{m/s}^2$ 可以理解为质点运动是沿 x 轴正方向的匀减速运动.

例题 1－2 已知质点运动方程为 $\boldsymbol{r}=R\cos\omega t\boldsymbol{i}+R\sin\omega t\boldsymbol{j}$，其中 R，ω 为恒量；$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 分别为 x，y 方向单位矢量，试求：

(1) 质点的速度和加速度表达式：

(2) 质点速率变化率 $\frac{dv}{dt}$；

(3) 质点的轨迹方程.

解 (1) 由 $\boldsymbol{r}=R\cos\omega t\boldsymbol{i}+R\sin\omega t\boldsymbol{j}$

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=-\omega R\sin\omega t\boldsymbol{i}+\omega R\cos\omega t\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=-\omega^2R\cos\omega t\boldsymbol{i}-\omega^2R\sin\omega t\boldsymbol{j}=-\omega^2\boldsymbol{r}$$

(2) $\because v_x=-\omega R\sin\omega t, v_y=\omega R\cos\omega t \qquad \therefore v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\omega R$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}(\omega R)=0$$

(3) $\because x=R\cos\omega t \qquad y=R\sin\omega t$，消去 t 得轨迹方程为：$x^2+y^2=R^2$

可见该质点运动轨迹为圆周，圆心在原点，半径为 R.质点的运动情况为匀速率圆周运动.

例题 1－3 一质点沿半径为 R 的圆周按规律 $S=v_0t-\frac{1}{2}bt^2$ 运动，其中 v_0，b 为常数，试求：

(1) t 时刻质点的加速度的大小；

(2) 当加速度等于 b 时，t 等于几，在这段时间里质点运行了多少圈？

解① 由运动方程 $S=v_0 t-\frac{1}{2}bt^2$ $v=\frac{ds}{dt}=v_0-bt$

$$a_\tau=\frac{dv}{dt}=-b \qquad a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{(v_0-bt)^2}{R}$$

$$\therefore a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=\sqrt{b^2+\frac{(v_0-bt)^4}{R^2}}$$

②令 $a=\sqrt{b^2+\frac{(v_0-bt)^4}{R^2}}=b$，则 $v_0-bt=0$，$t=\frac{v_0}{b}$

$$\Delta t=\frac{v_0}{b} \qquad \Delta S=v_0^2/b-\frac{1}{2}b\frac{v_0^2}{b^2}=\frac{v_0^2}{2b}$$

$$N=\frac{\Delta S}{2\pi R}=\frac{v_0^2}{4\pi Rb}$$

例题 1－4 一质点沿半径 R=1m 的圆周运动，运动方程为 $\theta=2+4t^3$(弧度). 求：① t=2s 时的角加速度 β；② t=2s 时的加速度 a.

解 由运动方程：$\theta=2+4t^3$，$\omega=\frac{d\theta}{dt}=12t^2$，$\beta=\frac{d\omega}{dt}=24t$

(1) t=2 时，$\beta=24\times2=48\text{rad/s}^2$

(2) $a_\tau=\beta R=24t$，$a_n=\omega^2R=144t^4$，$a=\sqrt{a_n^2+a_\tau^2}$

$t=2$，$a_\tau=48\text{m/s}^2$，$a_n=2304\text{m/s}$，$a=2305\text{m/s}^2$

例题 1－5 一质点的运动方程为 $\boldsymbol{r}=t\boldsymbol{i}+4t^2\boldsymbol{j}+2t\boldsymbol{k}$ (SI).

求：(1) 质点的速度与加速度；(2) 质点的轨道方程.

解 ①$\because$ $\boldsymbol{r}=t\boldsymbol{i}+4t^2+2t\boldsymbol{k}$

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{i}+8t\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$$

$$\mathbf{a}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=8\boldsymbol{j}$$

②$\because$ $x=t$，$y=4t^2$，$=2t$

$$\therefore \begin{cases} y=4x^3 \\ z=2x \end{cases} \text{为质点的轨迹方程}$$

对于质点在三维空间内运动，其轨迹方程为一空间曲线，在数学上表示为两个曲面的交线.

(二) 已知加速度(或速度)及初始条件求运动方程

这类习题包括直线运动和曲线运动，建立直线运动的运动方程的方法是基础. 对于曲线运动可对各个坐标分量分别处理，应用的方法是相同的；求解这类习题所运用的主要数学手段是积分运算. 给定加速度函数常有不同的形式，建立运动方程的方法不同，大体上有以下几种形式.

(1) 加速度是时间的函数 $a=f(t)$，且已知初始条件 v_0，x_0，求运动方程 $x(t)$，此类习题可以直接积分运算，$v(t)=\int a(t)dt$，$x(t)=\int v(t)dt$.

例题 1－6 已知质点沿 x 轴运动，$a=3+2t$，且 $t=0$ 时，$v_0=5\text{m/s}$，$x_0=0$，求：质点的运动方程 $x(t)$；(2)$t=3\text{s}$ 时的速度和位置坐标.

解① $a=3+2t=\dfrac{dv}{dt}$，$dv=(3+2t)dt$

$$\int_0^v dv=\int_0^t(3+2t)dt \qquad v=5+3t+t^2$$

$$\because\ v=\frac{dx}{dt}$$

$$\therefore\ \int_{x0}^{x}dx=\int_0^t v dt=\int_0^t(5+3t+t^2)dt$$

故：运动方程为：$x=5t+\dfrac{3}{2}t^2+\dfrac{1}{3}t^2$

②由 $v(t)=5+3t+t^2$，$t=3$，$v_3=23\text{m/s}$

$x(t)=5t+\dfrac{3}{2}t^2+\dfrac{1}{3}t^3$，$t=3$，$x=37.5\text{m}$

(2)加速度是速度的函数 $a=f(v)$，已知初始条件，求运动方程. 此类习题常用分离变量的方法求出 $v(t)$，再用积分的方法求 $x(t)$.

$\because a=f(v)=\dfrac{dv}{dt}$ $\quad\therefore \displaystyle\int\frac{dv}{f(v)}=\int dt$；可求得 $v(t)$；再由 $x=\displaystyle\int v dt$ 求 $x(t)$.

例题 1－7 质点沿 x 轴运动，已知 $a=-kv$(k 为常数)，且 $t=0$ 时，$v=v_0$，$x_0=0$，求运动方程 $x(t)$.

解 $\because a=-kv=\dfrac{dv}{dt}$ $\quad\therefore \dfrac{dv}{v}=-kdt$，$\displaystyle\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v}=-k\int_0^t dt$

故得 $\ln v-\ln v_0=-kt \qquad \ln\dfrac{v}{v_0}=-kt$

$$\therefore\ v(t)=v_0e^{-kt}$$

$$\int_0^x dx=\int v dt=v_0\int_0^t e^{-kt}dt$$

故 $x(t)=\dfrac{v_0}{k}(1-e^{-kt})$

例题 1－8 质点沿 x 轴运动，$a=-kv^2t$，k 为常数；且已知 $t=0$ 时 $v=v_0$，求速度 $v(t)$.

解 $\because\ \dfrac{dv}{dt}=-kv^2t$

$$\therefore\ \int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v^2}=-\int_0^t ktdt$$

$$\therefore\ \frac{1}{v}=\frac{1}{v_0}+\frac{k}{2}t^2$$

(3) 加速度为坐标的函数 $a=f(x)$，已知初始条件，求运动方程.

此类习题通常采用某种变换进行运算.

$$\because\ a=\frac{dv}{dt}=\frac{dx}{dt}\ \frac{dv}{dx}=v\frac{dv}{dx}=f(x)$$

$\therefore\ vdv=f(x)dx$ 积分可求得 $v=v(x)$，又 $\because\ \dfrac{dx}{dt}=v(x)$

$\therefore\ \dfrac{dx}{v(x)}=dt$,积分运算可求出 $x(t)$.

例题 1-9 已知质点沿 x 轴运动,$a=-\omega^2x$ 且 $t=0$, $v_0=0$, $x_0=A$ 求:质点的运动方程.

解 $\because\ a=-kx=\dfrac{dv}{dt}=v\dfrac{dv}{dx}$

$$\therefore\ \int_0^v v\mathrm{d}v=-\omega^2\int_A^x x\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{2}v^2=\frac{1}{2}\omega^2\ (A^2-x^2)$$

$$v=\omega\sqrt{A^2-x^2}=\frac{dx}{dt}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{A^2-x^2}}=\int\omega dt\qquad \arcsin\frac{x}{A}=\omega t+c_2$$

$\because t=0$, $x=A$, $\therefore\ c_2=\arcsin 1=\dfrac{\pi}{2}$

故得 $X=A\sin(\omega t+\pi/2)=A\cos\omega t$

例题 1-10 已知质点运动的加速度为 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+6t^2\boldsymbol{j}$,且初始时刻静止于原点.求质点的运动方程 $r(t)$和轨迹方程.

解 (1) $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+6t^2\boldsymbol{j}$;$a_x=2$, $a_y=6t$

$$v_x=\int_0^t a_x dt=\int_0^t 2dt=2t$$

$$v_y=\int_0^t a_y dt=\int_0^t 6t^2 dt=2t^3$$

$\because\ v_x=2t\qquad v_y=2t^3$

$$x=\int_0^t v_x\,dt=\int_0^t 2tdt=t^2$$

$$y=\int_0^t v_y dt=\int_0^t 2t^3 dt=\frac{1}{2}t^4$$

$\therefore\ x=t^2$, $y=\dfrac{1}{2}t^2$,故得 $\boldsymbol{r}(t)=t^2\boldsymbol{i}+\dfrac{1}{2}t^4\boldsymbol{j}$

(2) 由 $x=t^2$, $y=\dfrac{1}{2}t^4$ 消去 t 得 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 为轨迹方程.可见,求曲线运动的运动方程,可以对各个分量分别处理.

(3) 借助几何关系建立运动方程.

此类习题,通常不给出加速度,需要由一定的几何关系来建立运动方程(通常为时间 t 的隐函数形式),然后再求解各量.

例题 1-11 如图 1-5 所示,杆 AB 以匀角速度 ω 绕 A 点转动,并带动水平杆 OC 上的钉点 M 运动,起始时刻杆在竖直位置, $OA=h$.

求:(1) 质点 M 沿水平杆运动的运动方程;

(2) 质点 M 沿杆 OC 滑动的速度加速度.

解 (1) 如图所示 $x=h\mathrm{tg}\theta$; $\theta=\omega t$ $\quad\therefore\ x=h\mathrm{tg}\omega t$

(2) $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\omega\cdot h\cdot\sec^2\omega t$

$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=2h\omega^2\cdot\sec^2\omega t\cdot\mathrm{tg}\omega t$

例题 1- 12 路灯距离地面高为 H,一个身高为 h 的人在地面上以速度 v_0匀速行走,如图 1- 6 所示.求: (1) 人影中,头顶的移动速度 v';(2) 影子长度的增长速度 v''.

解 (1) 设人沿 x 方向运动,人的位置坐标为 x,影子顶点坐标为 x'

则由几何关系: $\mathrm{tg}\theta=\frac{h}{x'-x}=\frac{H-h}{x}$, $\therefore\ x'=\frac{H}{H-h}x$

$$\therefore\ v'=\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}=\frac{H}{H-h}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{H}{H-h}v_0$$

(2) 设影子长度为 l ,则 $l=x'-x=\frac{H}{H-h^x}$, $v''=\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=\frac{h}{H-h}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{H}{H-h}\cdot v_0$

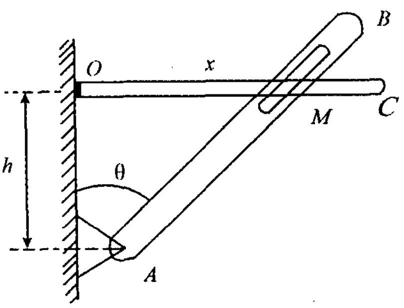


图 1-5

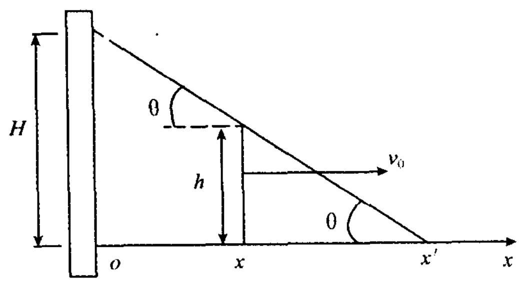


图 1-6

(三) 相对运动的分析与处理

处理具有相对运动的习题，首先要确定参照系并建立适当的坐标系，要明确各运动量(位移、速度、加速度)的相对意义,熟练掌握相对运动的合成方法,对于质点作匀变速直线运动、抛体运动、匀速率或匀变速率圆周运动等还可直接套用相应的运动方程和公式进行 解算.

例题 1- 13 设河面宽 l=1km,河水由此向南流动,流速 v_1=2m/s,有一船相对于河水以 v_2=1.5m/s 的速率由西岸驶向东岸.

(1) 若船头与正北方向成 a=15° 角，船到达对岸要用多长时间?到达对岸时,船在下游何处?

(2) 欲使船到达对岸的时间为最短,船头与岸应成多大角度? 最短时间是多少? 到达对岸时,船在下游何处?

(3) 若欲使船相对于河岸走过的路程为最短，船头与岸应成多大角度? 到达对岸时，船在下游何处? 需用多少时间?

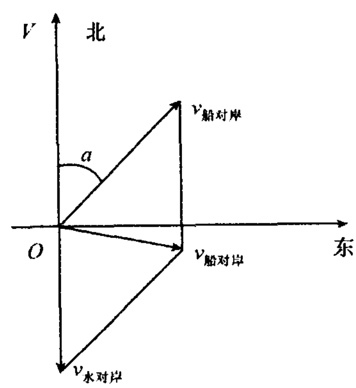


图 1-7

解 (1) 建坐标系如图 1-7 所示,设船对岸速度为 v.

$\because\ v_{船对岸}=v_{船对水}+v_{水对岸}$

$\therefore\ v=v_2+v_1$

即 $v_x=v_2\sin a$ ， $v_y=v_2\cos a-v_2$

故得：$v_x=v_2\sin a=1.5\times\sin 15°\ =0.39\text{m/s}$

$v_y=v_2\cos a-v_1=1.5\times\cos 15°\ -2.0=-0.55\text{m/s}$

$t=\dfrac{1}{v_x}=\dfrac{1000}{0.39}=2564\text{s}$

$y=v_y\cdot t=-0.55\times 2564=-1413\text{m}$

∴ 船到达对岸需要 2564s，到达下游 1413m 处.

(2) 设船头与河岸(正北)成 θ 角度时，所用时间最短，

∵ $t=\dfrac{1}{v_x}$，$v_x=v_2\sin\theta$ ； ∴ $t=\dfrac{1}{v_2\sin\theta}$

显然，$\theta=\pi/2$ 时，$\sin\theta=1$，t 最小；最短时间为 $t_{\min}=\dfrac{1}{v_2}=\dfrac{1000}{1.5}=667\text{s}$

$v_y=v_2\cos\theta-v_1=1.5\cos\dfrac{\pi}{2}-2=-2\text{m/s}$ ，$y=v_y\,t_{\min}=-2\times 667=-1333\text{m}$

∴ 船与岸成 90°时，所用时间最短，最短时间为 667s，船在下游 1333m 处到达对岸.

(3) 设船头与河岸成 φ 角时，船所行距离最短，设船行距离为 S

则 $S=\sqrt{1+y^2}$ ； ∴ y 最小时，S 最小

∵ $v_x=v_2\sin\varphi$ ， $v_y=v_2\cos\varphi-v_1$ ； $l=v_x\,t$ ，$y=v_y\,t$

∴ $y=v_y\dfrac{l}{v_x}=l\cdot(\mathrm{tg}\varphi-\dfrac{v_1}{v_2\sin\varphi})$

令 $\dfrac{dy}{d\varphi}=0$ 得 $1-\dfrac{v_1}{v_2}\cos\varphi=0$ ∴ $\cos\varphi=\dfrac{v_2}{v_1}=\dfrac{1.5}{2}$

即 $\varphi=\arccos 0.75=41.5°$时，$y$ 有最小值.

∴ $v_x=v_2\sin 41.5°=1.5\times\sin 41.5°=0.994\text{m/s}$

$v_y=v_2\cos 41.5°-v_2=1.5\times\cos 41.5°-2=-0.877\text{m/s}$

∴ $t'=\dfrac{1}{v_x}=\dfrac{1000}{0.994}=1006\text{s}$ ， $y_{\min}=v_y t'=-0.877\times 1006=-881\text{m}$

当船头与岸成 41.5° 时，船行距离最短，所用时间为 1006s 在下游 881m 处到达对岸.

例题 1-14 一升降机以加速度 1.22m/s^2上升，当上升速度为 2.44m/s 时，有一螺丝从升降机的天花板上脱落，天花板与升降机底板相距 2.74m.试求：(1)螺丝从天花板落在底板上所需时间；(2)螺丝相对地面下降的距离.

解 方法一：以地面为参照系，以螺丝刚脱落时为计时起点，此时升降机底板所在位置为坐标原点，竖直向上为 y 轴正向；由匀变速直线运动方程

对螺丝 $y_1=H+v_0\,t-\dfrac{1}{2}gt^2$

对底板 $y_2=v_0\,t+\dfrac{1}{2}at^2$

其中：$H=2.74\text{m}$ ，$V_0=2.44\text{m/s}$ ，$a=1.22\text{m/s}^2$，$g=9.8\text{m/s}^2$

(1)当螺丝到达底板时，$y_1=y_2$