

高中新课标

【修订】山师大附中高级教师

适合四省新课标地区使用
(广东、山东、宁夏、海南)



模块 总复习



2007 · 高考第一轮辅导丛书

高考数学

必修1~5 <人教A版>

· 学生用书 ·

延边人民出版社

必修先行
选修在后

高中新课标

适合四省新课标地区使用
(广东、山东、宁夏、海南)

【审订】山师大附中高级教师

模块

总复习

2007 · 高考第一轮辅导丛书

高考数学

必修1~5 <人教A版>

· 学生用书 ·

特别鸣谢：

北京师范大学附属中学
北京师范大学附属中学
曲阜师范大学附属中学
山东省实验中学
潍坊一中
烟台一中
威海一中

油田一中
烟台二中
沂源一中
昌乐二中
深圳中学
广州市实验中学
广州市第四中学
广州市第七中学

惠州一中
北江中学
江苏启东中学
宁夏中学
海南中学
海南华侨中学
海南农垦中学
海南文昌中学

延边人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中新课标模块总复习. 数学/崔开文主编.

—延吉:延边人民出版社,2006.3

ISBN 7-80698-657-X

I. 高… II. 崔… III. 数学课—高中—升学参考资料
IV. G461

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 020918 号

总策划:凤雅颂
责任编辑:申明仙
封面设计:袁丰琳

高中新课标模块总复习·数学

崔开文 主编

出版:延边人民出版社

(吉林省延吉市友谊路 363 号, <http://www.ybcbs.com>)

印刷:山东鸿杰印务有限公司

发行:延边人民出版社

开本:880×1230 1/16

版次:2006 年 4 月第 1 版

印张:27

印次:2006 年 4 月第 1 次印刷

字数:640 千字

印数:1—10000 册

标准书号:ISBN 7-80698-657-X/G·461

定价:49.80 元

如发现印装质量问题,影响阅读,请与印刷厂联系调换。

写在前面……

2004年秋季,广东、山东、宁夏、海南等四省的高一新生全部使用新课程标准教材,进入全新的课程领域;2007年6月,这些地区的学生将面临着这次课改以来的首次高考。新课标,新考纲,新高考模式,新命题角度对中学教学和备考都提出了全新的要求……

新课程怎样考?学生如何复习?怎样提高备考效率?成为广大考生、

家长、教师关注的焦点……

为此,我们在国家命题研究中心权威人

士的协助下,特邀全国知名专家,四

省一线特高级教师,潜心研究,

细数归纳,大胆预测,策

划出版了这套《高中

新课标模块

总复习》

丛书。

最新的课标理念

全书结合新课标的最新理念,系统诠释了考纲的理念,对考纲的“纲”“目”要点和考点进行了100%的覆盖,帮助考生明确复习的方向、做题的目的、考试的依据,提高应试技巧,挑战自我,挑战高考!

最完善的知识体系

从高考知识点出发,全面分析高考命题动向、考查要点及命题规律特征,建构完善的知识体系,明确主干内容,突出重点、难点,突破易错点,突出复习特点!

最具开放的探究

紧扣新课程目标,所选习题来自近几年的高考题和最新的高考模拟题;另一部分习题来自社会生产生活的情景题,题型关注情感态度价值观的考查,注重知识获得的方法过程和知识应用,并鼓励学生质疑和创新,培养学生提出问题、分析问题和解决问题的能力。

最具权威的预测

通过命题人员和权威专家对比、分析、研究、案例等方式,潜心研究新旧课标的差异,总结归纳近几年的高考动向,对2007年高考趋向做出权威预测,引导学生把握题型,跃出题海,智慧备考!

丛书特色

●一套好的复习模式

●一套好的复习方法

●一套好的复习内容

●一个最佳的复习教练……

丛书内容

新课标备考导航

考纲要求,扼要阐述;
考点解读,科学分析;
考向前瞻,预测趋势。

跨课程应用

历届真题,精彩展示;
追踪高考,有的放矢;
命题目的,先睹为快。

自主复习

知识梳理,明确重点;
知识体系,全面覆盖;
复习建议,提高效率。

新题探究

真题精选,剖析详尽;
命题热点,回归考点;
应试对策,掌握技巧。

专项练与测

夯实基础,提升能力;
探究创新,挑战潜能;
学以致用,知能过关。

考题预测

回归考纲,大胆预测;
最新动向,模拟探究;
适应趋势,轻松备考!

总之,丛书以超前的理念、创新的品质、
高效的策略、实用的价值,引领广大师生进入高考复习的
最佳境界。尽管我们对丛书的编审工作高度重视,作风严谨,态度认真,
但疏漏之处在所难免,恳请读者不吝赐教。

编者

2006年4月

目 录

必修一

第一章 集合与函数概念

新课标备考导航 2

1.1 集 合 3

1.2 函数及其表示 8

1.3 函数的基本性质 14

1.3.1 单调性与最大(小)值 14

1.3.2 奇偶性 18

第一章复习效果检测 23

第二章 基本初等函数(1)

新课标备考导航 25

2.1 指数函数 26

2.2 对数函数 30

2.3 幂函数 34

第二章复习效果检测 38

第三章 函数的应用

新课标备考导航 40

3.1 函数与方程 40

3.2 函数模型及其应用 44

第三章复习效果检测 50

必修二

第一章 空间几何体

新课标备考导航 54

1.1 空间几何体的结构 54

1.2 空间几何体的三视图和直观图 58

1.3 空间几何体的表面积与体积 63

第一章复习效果检测 69

第二章 点、直线、平面之间的位置关系

新课标备考导航 71

2.1 空间点、直线、平面之间的位置关系 72

— 平 面 72

— 空间中直线、平面之间的位置关系 76

2.2 直线、平面平行的判定及其性质 81

2.3 直线、平面垂直的判定及其性质 86

第二章复习效果检测 92

第三章 直线与方程

新课标备考导航 97

3.1 直线的倾斜角与斜率 95

3.2 直线的方程 99

3.3 直线的交点坐标与距离公式 104

第三章复习效果检测 110

第四章 圆与方程

新课标备考导航 111

4.1 圆的方程 112

4.2 直线、圆的位置关系 116

4.3 空间直线坐标系 123

第四章复习效果检测 126

必修三

第一章 算法初步

新课标备考导航 129

1.1 算法与程序框图 129

1.2 基本算法语句 134

1.3 算法案例 141

第一章复习效果检测 148

第二章 统计

新课标备考导航 150

2.1 随机抽样 147

2.2 用样本估计总体 152

2.3 变量间的相关关系 157

第二章复习效果检测 163

第三章 概率

新课标备考导航 165

3.1 随机事件的概率 165

3.2 古典概型 171

Contents

ZONG FUXI

3.3 几何概型 176

第三章复习效果检测 181

必修四

第一章 三角函数

新课标备考导航 184

1.1 任意角和弧度制 185

1.2 任意角的三角函数 190

1.2.1 任意角的三角函数 190

1.2.2 同角三角函数的基本关系 194

1.3 三角函数的诱导公式 198

1.4 三角函数的图象与性质 203

一 正弦函数、余弦函数的图象与性质 203

二 正切函数的性质与图象 208

1.5 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象 213

1.6 三角函数模型的简单应用 219

第一章复习效果检测 214

第二章 平面向量

新课标备考导航 226

2.1 平面向量的实际背景及其基本概念 227

2.2 平面向量的线性运算 232

2.3 平面向量的基本定理及坐标表示 238

2.4 平面向量的数量积 243

2.5 平面向量应用举例 250

第二章复习效果检测 244

第三章 三角恒等变换

新课标备考导航 257

第三章复习效果检测 263

必修五

第一章 解三角形

新课标备考导航 267

1.1 正弦定理和余弦定理 267

1.2 应用举例 271

第一章复习效果检测 275

第二章 数列

新课标备考导航 279

一 数列 278

二 等差数列 283

三 等比数列 290

第二章复习效果检测 297

第三章 不等式

新课标备考导航 300

3.1 不等关系与不等式 300

3.2 一元二次不等式及其解法 305

3.3 二元一次不等式(组)与简单的线性规划问题

..... 310

3.4 基本不等式: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ 315

第三章复习效果检测 320

参考答案 325

必修一

- 第一章 集合与函数概念
- 第二章 基本初等函数(I)
- 第三章 函数的应用



新课标备考导航.....

跨课程应用.....

自主复习.....

新题探究.....

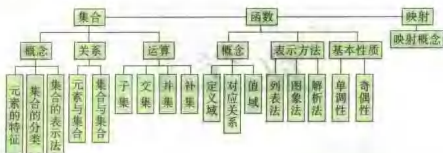
专项练与测.....

考题预测.....

第一章 集合与函数概念

新课标备考导航

知识网络



命题特点

1. 高考中关于集合的试题可以分为两大类：一类是集合本身的基本题，这类题多为选择、填空题；另一类是集合与其他知识的综合题，在这类题中又有两种情形，一种是用集合、符号来表述的题，这种题实质上就是代数、几何、三角题，大部分属中档和稍难题；另一种情形是题中并未出现集合、符号，但解决它需要用集合的思想来思考，这时解题的思想往往比较深刻，因而也较难。

2. 考查函数基础知识和基本方法的基础题，多采用选择、填空题题型。

3. 函数与其他数学问题（如方程、不等式、数列、导数等）的综合题，难度较大，能力要求较高，采用解答题题型。

4. 近几年的高考应用题多与函数有关，仔细阅读题意，正确写出函数关系式是解答这类应用题的首要条件。

命题趋势

1. 上述命题特点将保持不变，重点考查集合概念与运算、判断。备考时，应注意文字语言、符号语言、图形语言三

者的转化，重视等价转化的思想、补集思想、分类讨论思想、数形结合思想的运用。

2. 全方位。近几年来的高考中，函数的所有知识点都考过，虽然近几年不强调知识的覆盖率，但每一年函数知识点的覆盖率依然没有减少。

3. 多层次。在每年的高考中，函数题低档、中档、高档的都有；选择题、填空题、解答题齐全。低档题一般只涉及函数本身的内容，诸如定义域、值域、最值、奇偶性、单调性、图象、反函数等，这些题对能力的要求不高；中、高档题多为综合程度较大的问题，或者是函数与其他知识的结合，或者是多种方法的渗透。

4. 巧综合。为突出函数在中学数学中的主线地位，近几年高考强化了函数对其他知识的渗透，加大了以函数为载体，多种方法、多种能力（甚至包括阅读能力、理解能力、表述能力、信息处理能力等学习能力）的综合程度。

5. 变角度。出于“立意”和创设情境的需要，函数试题设置问题的角度和方式也不断创新，重视对函数思想的考查，加大了函数应用题、探究题和信息题的考查力度，从而使函数考题显得更加新颖、生动、灵活。

1.1 集 合

教材小节

1.1.1 集合的含义与表示
1.1.2 集合间的基本关系
1.1.3 集合的基本运算

复习 1 跨课程应用

1. (2005 年, 黑龙江) 设全集 $U = \{2, 3, a^2 + 2a - 3\}$, $A = \{1, 2a - 1\}$, $\complement_U A = \{5\}$, 求实数 a 的值.

命题目的与解题技巧: 本题主要考查集合的补集及全集等概念, 解决本题的关键是理解全集、补集的概念, 也要注意元素的互异性.

分析 因为 $\complement_U A = \{5\}$, 故必有 $a^2 + 2a - 3 = 5$ 且 $|2a - 1| = 3$, 解得 $a = 2$.

答案 $a = 2$

2. (2005 年, 广东) 若集合 $M = \{x \mid |x| \leq 2\}$, $N = \{x \mid x^2 - 3x = 0\}$, 则 $M \cap N =$ ()

A. $\{3\}$ B. $\{0\}$ C. $\{0, 2\}$ D. $\{0, 3\}$

3. (2005 年, 浙江) 设 $f(n) = 2n + 1 (n \in \mathbb{N})$, $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Q = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, 记 $\dot{P} = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \in P\}$, $\dot{Q} = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \in Q\}$, 则 $(\dot{P} \cap \dot{Q}) \cup (\dot{P} \cap \dot{P}) =$ ()

A. $\{0, 3\}$ B. $\{1, 2\}$
C. $\{3, 4, 5\}$ D. $\{1, 2, 6, 7\}$

4. (2005 年, 重庆) 集合 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 6 < 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| < 2\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

5. (2005 年, 辽宁) ω 是正实数, 设 $S_a = \{x \mid f(x) = \cos(\omega(x + \theta)) \text{ 是奇函数}\}$. 若对每个实数 a , $S_a \cap (a, a + 1)$ 的元素不超过 2 个, 且有 a 使 $S_a \cap (a, a + 1)$ 含 2 个元素, 则 ω 的取值范围是 _____.

复习 2 自主复习



考纲要求

1. 理解集合、子集、补集、交集、并集的概念; 2. 了解空集和全集的意义; 3. 了解属于、包含、相等关系的意义; 4. 掌握有关的术语和符号, 并会用它们正确表示一些简单的集合.



知识梳理

1. 集合的含义与表示

(1) 一般地, 我们把研究对象统称为 _____, 把一些元素组成的总体叫做集合, 简称 _____.

(2) 集合中的元素有三个特性: ① _____; ② _____; ③ _____.

(3) 如果 a 是集合 A 的元素, 就说 a 属于集合 A , 记作 $a \in A$; 如果 a 不是集合 A 中的元素, 就说 a 不属于集合 A , 记作 $a \notin A$.

(4) 一些常用集合的记法. 自然数集记作 _____, 正整数集记作 _____, 整数集记作 _____, 有理数集记作 _____, 实数集记作 _____.

(5) 表示集合的常用方法有 _____ 和 _____.

(6) 只要构成两个集合的 _____ 是一样的, 我们就称这两个集合是相等的.

2. 集合间的基本关系

(1) 一般地, 对于两个集合 A, B , 如果集合 A 中任意一个元素都是集合 B 中的元素, 我们就说这两个集合有包含关系, 称集合 A 为集合 B 的 _____, 记作 _____.

(2) 我们经常用平面上封闭曲线的内部代表集合, 这种图形称为 _____.

(3) 对于两个集合 A, B , 若 _____ 且 _____, 则称集合 A 与 B 相等.

(4) 如果集合 $A \subseteq B$, 但存在元素 $x \in B$, 且 $x \notin A$, 我们称集合 A 是集合 B 的 _____, 记作 $A \subsetneq B$ 或 $B \supsetneq A$.

(5) 不含任何元素的集合叫做 _____, 记作 _____, 并规定: 空集是任何集合的子集.

3. 集合的基本运算

(1) 一般地, 由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合, 称为集合 A 与 B 的 _____, 记作 _____, 即 $A \cup B =$ _____.

(2) 一般地, 由属于集合 A 且属于集合 B 的所有元素组成的集合, 称为集合 A 与 B 的 _____, 记作 _____, 即 $A \cap B =$ _____.

(3) 一般地, 如果一个集合含有我们研究问题中所涉及的所有元素, 那么就称这个集合为全集, 记作: _____.

(4) 对于一个集合 A , 由全集 U 中 _____ 组成的集合, 称为集合 A 相对于全集 U 的补集, 简称为 _____, 记作: _____, 用描述法表示为 _____.



特别提示

1. 由一些确定的对象的全体形成一个集合. 要注意的是集合的概念与“全体”的区别: 虽然集合也含有全体的意思, 但与通常说的全体是不同的, 集合的元素是确定的, 必须能判断任一对象是不是这个集合的元素, 而全体则不一定能构成集合.

2. 集合的元素必须满足三性: 确定性、互异性、无序性. 解决与集合有关问题时, 一方面, 在解答完毕之时, 不要忘记检验集合的元素是否满足这三性; 另一方面, 善于抓住集合元素的三性, 就能顺利地找到解题的切入点.

3. 集合与集合之间的关系有子集(包含、包含于)、真子集(真包含、真包含于)、相等. 在判断集合与集合之间的关系时, 如果能确定真包含(或真包含于)则不能用包含($\subseteq$)表示. 要注意区分“ $\in$ ”、“ $\subseteq$ ”、“ $\subsetneq$ ”的含义, 并能正确地运用它解题.

4. 集合的交、并、补运算是集合的核心, 其关键在于对“且”与“或”的正确理解: “且”的意思与通常理解的“既是

……同时是……”是一样的;“或”则与通常理解的“非此即彼”有区别,它可以是两者兼有。

5. 解决集合问题时要注意以下几点:①明确集合的元素的意义,它是怎样类型的对象(如数、点、图形等);②弄清集合由哪些元素所组成,这就需要我们抽象的问题具体化、形象化,也就是善于对集合的三种语言(文字、符号、图形)之间相互转化,同时还要善于对用多个参数表示的符号描述法 $\{x|P(x)\}$ 的集合化到最简形式;③要善于运用数形结合、分类讨论、化归与转化等数学思想方法来解决问题;④集合问题多与函数、方程、不等式等知识综合在一起,要注意各类知识的融会贯通。

复习3 新题探究

【例1】 集合中元素的准确识别

【例1】 已知集合 $P = \{y = x^2 + 1\}$, $Q = \{y | y = x^2 + 1\}$, $R = \{x | y = x^2 + 1\}$, $M = \{(x, y) | y = x^2 + 1\}$, $N = \{x | x \geq 1\}$, 则()

A. $P = M$ B. $Q = R$ C. $R = M$ D. $Q = N$

分析 集合 P 是用列举法表示,只含有一个元素,即函数 $y = x^2 + 1$, 集合 Q, R, N 中的元素全是数,即这三个集合都是数集。集合 Q 是函数 $y = x^2 + 1$ 的值域 $[1, +\infty)$; 集合 R 是函数 $y = x^2 + 1$ 的定义域 $\mathbf{R}$; 集合 N 是不等式的解集 $[1, +\infty)$; 而集合 M 的元素是平面上的点,此集合是函数 $y = x^2 + 1$ 图象上所有点组成的集合。

答案 D

方法归纳

解集合问题时,对集合元素的准确识别十分重要,不允许有半点差错,否则将导致解题的失败。

【例2】 设有三个实数的集合可表示为 $\{a, a+d, a+2d\}$, 也可表示为 $\{a, aq, aq^2\}$, 其中 $a, d, q \in \mathbf{R}$, 求常数 q 。

解 依元素的互异性可知, $a \neq 0, d \neq 0, q \neq 0, q \neq \pm 1$ 。

由两集合相等,有(1) $\begin{cases} a+d=aq \\ a+2d=aq^2 \end{cases}$, 或(2) $\begin{cases} a+d=aq^2 \\ a+2d=aq \end{cases}$

由(1)得 $a+2a(q-1)=aq^2$, $\therefore a \neq 0, \therefore q^2-2q+1=0$, $\therefore q=1$ (舍去)。由(2)得 $a+2a(q^2-1)=aq$, $\therefore a \neq 0, \therefore 2q^2-q-1=0 \Rightarrow q=1$ 或 $q=-\frac{1}{2}$, $\therefore q \neq 1, \therefore q=-\frac{1}{2}$ 。综上所述, $q=-\frac{1}{2}$ 。

方法归纳

本题关键是利用集合相等及集合元素的互异性,挖掘出隐含条件 $a \neq 0, d \neq 0, q \neq 0, q \neq \pm 1$, 准确列出两个方程组进行讨论求解。

【例3】 若 $A = \{2, 4, a^2 - 2a^2 - a + 7\}$, $B = \{1, a+1, a^2 - 2a + 2, -\frac{1}{2}(a^2 - 3a - 8), a^2 + a^2 + 3a + 7\}$, 且 $A \cap B =$

$\{2, 5\}$, 试求实数 a 的值。

解 $\because A \cap B = \{2, 5\}, \therefore a^2 - 2a^2 - a + 7 = 5$ 。

由此求得 $a=2$ 或 $a=-1$ 。

当 $a=1$ 时, $a^2 - 2a + 2 = 1$, 与元素的互异性相矛盾,故应舍去 $a=1$ 。

当 $a=-1$ 时, $B = \{1, 0, 5, 2, 4\}$, 与 $A \cap B = \{2, 5\}$ 相矛盾,故又舍去 $a=-1$ 。

当 $a=2$ 时, $A = \{2, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 2, 5, 25\}$, 此时, $A \cap B = \{2, 5\}$ 满足题设,故 $a=2$ 为所求。

方法归纳

集合元素的互异性是集合的重要属性,可是在解题过程中集合元素的互异性常常被一些同学所忽视,因而导致解题的失败。

锁定高考

1. (2004年,全国) 设集合 $M = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$, $N = \{(x, y) | x^2 - y = 0, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$, 则集合 $M \cap N$ 中元素的个数为()
A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

考点3 空集的考查

【例4】 已知 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x | ax - 2 = 0\}$, 且 $A \cup B = A$, 求实数 a 组成的集合 C 。

解 由 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 得 $x=1$ 或 $x=2$ 。

当 $x=1$ 时, $a=2$; 当 $x=2$ 时, $a=1$ 。

这个结果是不完整的,上述解答只注意了 B 为非空集合。

实际上, $B = \emptyset$ 时,仍满足 $A \cup B = A$ 。

当 $a=0$ 时, $B = \emptyset$, 符合题设。

故正确答案为 $C = \{0, 1, 2\}$ 。

方法归纳

空集 $\emptyset$ 是任何非空集合的子集,且 $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup \emptyset = A$ 。忽略了一点,会造成解题结果不全面,应予以重视。

【例5】 已知集合 $A = \{x | x^2 + (a+2)x + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$, $\mathbf{R}^+$ 为正实数集合,若 $A \cap \mathbf{R}^+ = \emptyset$, 求 a 的取值范围。

解 由 $A \cap \mathbf{R}^+ = \emptyset$ 知 A 中的元素为非正数,即方程 $x^2 + (a+2)x + 1 = 0$ 没有正数解。

$\begin{cases} \Delta = (a+2)^2 - 4 \geq 0 \\ a+2 \geq 0 \end{cases}$ 解得 $a \geq 0$ 。

上面这个结果是不完整的,上述的解答只注意到 A 为非空集合的情形,当 A 为空集时仍满足 $A \cap \mathbf{R}^+ = \emptyset$ 。此时 $\Delta = (a+2)^2 - 4 < 0$, 解得 $-4 < a < 0$ 。

综合以上两种情况可得 $a > -4$ 。

方法归纳

空集是一个特殊的重要集合,它不含任何元素,是任何集合的子集,是任何非空集合的真子集。虽然,空集与

任何集合的交集为空集,与任何集合的并集仍等于这个集合.当题设隐含有空集参与的集合关系时,其特殊性是很容易被忽视的.

锁定高考

2. (2005年,全国) 设 I 为全集, S_1, S_2, S_3 是 I 的三个非空子集且 $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = I$, 则下面论断正确的是()

- A. $S_1 \cap (S_2 \cup S_3) = \emptyset$ B. $S_1 \subseteq (S_2 \cap S_3)$
C. $S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \emptyset$ D. $S_1 \subseteq (S_2 \cup S_3)$

考点3 集合语言与其他数学语言的互译

【例6】 已知三个集合 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - ax + a - 1 = 0\}$, $C = \{x | x^2 - bx + 2 = 0\}$, 问同时满足 $B \subseteq A, A \cup C = A$ 的实数 a, b 是否存在? 若存在, 求出 a, b ; 若不存在, 请说明理由.

分析 一元二次方程实根情况有三种: ①有两个相等的实根; ②有两个不相等的实数根; ③没有实数根. 根据条件“ $B \subseteq A, A \cup C = A$ ”确定集合 B, C 中的元素, 因为 $\emptyset$ 是任一非空集合的真子集, 所以 B, C 都有可能为 $\emptyset$, 但 B 中必有元素 1, 则 $B \neq \emptyset$.

$\because A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{2, 1\}$,
 $B = \{x | x^2 - ax + a - 1 = 0\}$

$= \{x | (x-1)[x-(a-1)] = 0\}$,

又 $B \subseteq A$, $\therefore a-1=1, \therefore a=2$.

$\therefore A \cup C = A, \therefore C \subseteq A$.

则 C 中元素有以下三种情况:

(1) 若 $C = \emptyset$ 时, 即方程 $x^2 - bx + 2 = 0$ 无实根,

$\therefore \Delta = b^2 - 8 < 0, \therefore -2\sqrt{2} < b < 2\sqrt{2}$.

(2) 若 $C = \{1\}$ 或 $\{2\}$ 时, 即方程 $x^2 - bx + 2 = 0$ 有两个相等的实根. $\therefore \Delta = b^2 - 8 = 0, \therefore b = \pm 2\sqrt{2}$.

此时 $C = \{\sqrt{2}\}$ 或 $\{-\sqrt{2}\}$ 不符合题意, 舍去.

(3) 若 $C = \{1, 2\}$ 时, 则 $b = 1+2=3$, 而两根之积恰好为 2.

综上所述, $a=2, b=3$ 或 $-2\sqrt{2} < b < 2\sqrt{2}$.

方法归纳

这类题要利用分类讨论的思想, 但特别容易疏忽的是 $C = \emptyset$ 这一情况, 这也是考查集合问题的重点之一, $\emptyset$ 有许多特殊的性质, 在解题时宜多留心. 如: $\emptyset \cup A = A, \emptyset \cap A = \emptyset, \emptyset \subseteq A, \emptyset = A \cap (\complement A), \emptyset = \complement U, \complement \emptyset = U$ 等. 同时在解题过程中考虑问题要全面, 在本题中既要考虑集合的性质又要考虑一元二次方程根的性质.

锁定高考

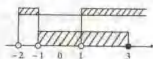
3. (2005年, 北京) 设全集 $U = \mathbb{R}$, 集合 $M = \{x | x > 1\}$, $P = \{x | |x^2| > 1\}$, 则下列关系式中正确的是()

- A. $M = P$ B. $P \subseteq M$
C. $M \subseteq P$ D. $\complement M \cap P = \emptyset$

考点4 数形结合解集合问题

【例7】 设集合 $A = \{x | -2 < x < -1, \text{ 或 } x > 1\}$, 集合 $B = \{x | x^2 + ax + b \leq 0\}$. 已知 $A \cup B = \{x | x > -2\}$, $A \cap B = \{x | 1 \leq x \leq 3\}$, 试求 a, b 的值.

分析 可利用数轴分析解答.



解 如图, 设想集合 B 所表示的范围在数轴上移动. 显然当且仅当 B 覆盖住集合 $\{x | -1 \leq x \leq 3\}$.

根据一元二次不等式与一元二次方程的关系, 可知 -1 与 3 是方程 $x^2 + ax + b = 0$ 的两根.

$\therefore a = -(-1+3) = -2$.

$b = (-1) \times 3 = -3$.

方法归纳

类似本题的多个集合问题, 借助于数轴上的区间图形表示进行处理, 采用数形结合的方法, 会得到直观、明了的解题效果.

锁定高考

4. (2004年, 全国) 设 A, B, I 均为非空集合, 且满足 $A \subseteq B \subseteq I$, 则下列各式中错误的是()

- A. $(\complement A) \cup B = I$ B. $(\complement A) \cup (\complement B) = I$
C. $A \cap (\complement B) = \emptyset$ D. $(\complement A) \cup (\complement B) = \complement B$

考点5 用集合的思想解题

【例8】 已知集合 $A = \{x | x^2 - 4mx + 2m + 6 = 0, x \in \mathbb{R}\}$, 若 $A \cap \mathbb{R}^+ \neq \emptyset$, 求实数 m 的取值范围.

分析 集合 A 是方程 $x^2 - 4mx + 2m + 6 = 0$ ①的实数解组成的非空集合, $A \cap \mathbb{R}^+ \neq \emptyset$ 意味着方程①的根有: (1) 两实根, (2) 一负根一零根, (3) 一负根一正根三种情况, 分别求解较麻烦. 上述三种情况虽可概括为方程①

的较小根 $\frac{4m - \sqrt{(-4m)^2 - 4(2m+6)}}{2} < 0$, 但在目前的

知识范围内求解存在困难. 如果考虑题设 $A \cap \mathbb{R}^+ \neq \emptyset$ 的反面: $A \cap \mathbb{R}^+ = \emptyset$, 则可求方程①的两根 x_1, x_2 均非负时 m 的取值范围, 用补集思想求解尤为简便.

解 设全集 $U = \{m | \Delta = (-4m)^2 - 4(2m+6) \geq 0\}$
 $= \{m | m \leq -1 \text{ 或 } m \geq \frac{3}{2}\}$.

若方程 $x^2 - 4mx + 2m + 6 = 0$ 的二根 x_1, x_2 均非负,

则 $\begin{cases} m \in U, \\ x_1 + x_2 = 4m \geq 0, \Rightarrow m \geq \frac{3}{2}, \\ x_1 x_2 = 2m + 6 \geq 0 \end{cases}$

$\therefore \{m | m \geq \frac{3}{2}\}$ 关于 U 的补集 $\{m | m \leq -1\}$ 即为所求.

复习
笔记

方法归纳

(1)采用“正难则反”的解题策略。具体地说,就是将研究对象的整体视为全集,求出使问题反面成立的集合A,则 $\complement_U A$ 便为所求。

(2)对于一些比较复杂,比较抽象,条件和结论之间关系不明确,难以从正面入手的数学问题,在解题时,可调整思路,从问题的反面入手,探求已知与未知的关系,这样能起到反难为易,化隐为显,从而使问题得以解决,这就是“正难则反”的解题策略,是补集思想的具体应用。

(3)有的问题,根据问题的具体特点,也可采用交集的思想或并集的思想去处理。

锁定高考

5. (2005年,北京春)记函数 $f(x) = \lg(2x-3)$ 的定义域为

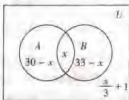
集合M,函数 $g(x) = \sqrt{1 - \frac{2}{x-1}}$ 的定义域为集合N,求:

(1)集合M, N;

(2)集合 $M \cap N, M \cup N$.

考点6 新建补集研究新题

【例9】向50名学生调查对A、B两事件的态度,有如下结果:赞成A的人数是全体的五分之三,其余的不赞成,赞成B的比赞成A的多3个,其余的不赞成;另外,对A、B都不赞成的学生数比对A、B都赞成的学生数的三分之一多1人。问对A、B都赞成的学生和都不赞成的学生各有多少人?



分析 画出韦恩图,形象地表示出各数量关系间的联系。

解 赞成A的人数为 $50 \times \frac{3}{5} = 30$,赞成B的人数为 $30 + 3 = 33$,如上图,记50名学生组成的集合为U,赞成事件A的学生全体为集合A;赞成事件B的学生全体为集合B。

设对事件A、B都赞成的学生人数为x,则对A、B都不赞成的学生人数为 $\frac{50}{3} + 1$,赞成A而不赞成B的人数为 $30 - x$,赞成B而不赞成A的人数为 $33 - x$ 。

依题意 $(30-x) + (33-x) + x + (\frac{50}{3} + 1) = 50$,解得

$$x = 21.$$

所以对A、B都赞成的同学有21人,都不赞成的有8人。

复习4 专项练与测

(45分钟,100分)

一、选择题(每题5分,共30分)

1. 设 $P = \{3, 4, 5\}$, $Q = \{4, 5, 6, 7\}$, 定义 $P * Q = \{(a, b) | a \in P, b \in Q\}$, 则 $P * Q$ 中元素的个数为()
A. 7 B. 10 C. 12 D. 20
2. 设集合 $M = \{x | x = 3m + 1, m \in \mathbb{Z}\}$, $N = \{y | y = 3n + 2, n \in \mathbb{Z}\}$, 若 $x_0 \in M$, $y_0 \in N$, 则 $x_0 y_0$ 与集合M、N的关系是()
A. $x_0 y_0 \in M$ B. $x_0 y_0 \in N$
C. $x_0 y_0 \notin N$ D. $x_0 y_0 \subseteq M$
3. (2004年,湖北)设集合 $P = \{m | -1 < m < 0\}$, $Q = \{m \in \mathbb{R} | mx^2 + 4mx - 4 < 0 \text{ 对任意实数 } x \text{ 恒成立}\}$, 则下列关系成立的是()
A. $P \subsetneq Q$ B. $Q \subsetneq P$
C. $P = Q$ D. $P \cap Q = \emptyset$
4. (2004年,全国)已知集合 $M = \{x | x^2 < 4\}$, $N = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\}$, 则集合 $M \cap N =$ ()
A. $\{x | x < -2\}$ B. $\{x | x > 3\}$
C. $\{x | -1 < x < 2\}$ D. $\{x | 2 < x < 3\}$
5. (2004年,浙江)若 $U = \{1, 2, 3, 4\}$, $M = \{1, 2\}$, $N = \{2, 3\}$, 则 $\complement_U(M \cup N)$ 等于()
A. $\{1, 2, 3\}$ B. $\{2\}$
C. $\{1, 3, 4\}$ D. $\{4\}$
6. (学科内综合)设全集 $U = \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $M = \{x | f(x) \neq 0\}$, $N = \{x | g(x) \neq 0\}$, 那么集合 $\{x | f(x) \cdot g(x) = 0\}$ 等于()
A. $(\complement_U M) \cap (\complement_U N)$ B. $(\complement_U M) \cup (\complement_U N)$
C. $(\complement_U M) \cup N$ D. $M \cup (\complement_U N)$

二、填空题(每题5分,共30分)

7. 设集合 $M = \{x | x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\}$, $N = \{x | x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, 则 M N . (用 $\subset, =, \supset$ 填空)
8. 集合A中有m个元素,则在A中增加一个元素,则它的子集个数将增加 。
9. 已知 $A = \{(x, y) | \frac{y}{x} = 3\}$, $B = \{(x, y) | y = kx + 3\}$, 全集 $U = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$, 若 $A \cap B = \emptyset$, 则实数k的值是 。
10. (开放题)已知 $M = \{f(x) | f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)\}$, $N = \{f(x) | \text{若 } x_1 < x_2, \text{ 则 } f(x_1) > f(x_2)\}$, 满足条件 $M \cap N$ 的其中一个元素是 。(只写出一个即可)

三、解答题(共50分)

11. (16分)(创新题)若集合 A_1, A_2 满足 $A_1 \cup A_2 = A$, 则称 (A_1, A_2) 为集合A的一种分拆, 并规定: 当且仅当 $A_1 =$

A_2 时, (A_1, A_2) 与 (A_2, A_1) 为集合 A 的同一种分拆, 则集合 $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ 的不同分拆种数是多少?

12. (16分) (学科内综合) 已知集合 $A = \{x \mid f(x) = x\}$, $B = \{x \mid f[f(x)] = x\}$, 其中 $f(x) = x^2 + ax + b$, $(a, b, x \in \mathbf{R})$ 证明: (1) $A \subseteq B$; (2) 若 A 中仅含有一个元素, 则必有 $A = B$.

13. (18分) (学科内综合) 已知集合 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $B = \{a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2\}$, 其中 a_1, a_2, a_3, a_4 均为正整数, 且 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$, $A \cap B = \{a_1, a_2\}$, $a_1 + a_4 = 10$, $A \cup B$ 的所有元素的和为 124, 求集合 A, B .

复习5 考题预测

1. (2006年, 北京模拟) 已知集合 $M = [a, 0]$, $N = \{x \mid 2x^2 - 5x < 0, x \in \mathbf{Z}\}$, 若 $M \cap N \neq \emptyset$, 则 a 等于 ()
A. 1 B. 2 C. 1 或 2 D. 1 或 $\frac{5}{2}$
2. (2006年, 南京模拟) 若 $a > b > 0$, 集合 $M = \{x \mid b < x < \frac{a+b}{2}\}$, $N = \{x \mid \sqrt{ab} < x < a\}$, 则 $M \cap N$ 表示的集合为 ()
A. $\{x \mid b < x < \sqrt{ab}\}$
B. $\{x \mid b < x < a\}$
C. $\{x \mid \sqrt{ab} < x < \frac{a+b}{2}\}$

D. $\{x \mid \frac{a+b}{2} < x < a\}$

3. 50 名学生参加跳远、铅球两项测试, 跳远和铅球测试成绩及格人数分别为 40 人和 31 人, 两项测试均不及格的有 4 人, 两项测试成绩都及格的人数是 ()
A. 35 B. 25 C. 28 D. 5
4. 集合 $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, A 是 S 的一个子集, 当 $x \in A$ 时, 若有 $x-1 \notin A$, 且 $x+1 \notin A$, 则称 x 为 A 的一个“孤立元素”, 那么 S 中无“孤立元素”的 4 元子集的个数是 ()
A. 4 个 B. 5 个 C. 6 个 D. 7 个
5. 对于非空集合 M 和 N , 定义 M 与 N 的差 $M - N = \{x \mid x \in M, \text{且 } x \notin N\}$, 那么 $M - (M - N)$ 总等于 ()
A. N B. M C. $M \cap N$ D. $M \cup N$
6. 已知函数 $f(x) = x^2 + ax + b$ ($a, b \in \mathbf{R}$), $A = \{x \mid x = f(x), x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x \mid x = f[f(x)], x \in \mathbf{R}\}$. 当 $A = \{-1, 3\}$ 时, 求 B .

7. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, d 是公差且不会为 0, a_1 和 d 均为实数, 它的前 n 项和记作 S_n . 设集合 $A = \{(a_n, \frac{S_n}{n}) \mid n \in \mathbf{N}^+\}$, $B = \{(x, y) \mid \frac{x^2}{4} - y^2 = 1, x, y \in \mathbf{R}\}$. 试问下列结论是否正确? 如果正确, 请给予证明; 如果不正确, 请举例说明. (1) 若以集合 A 中的元素作为点的坐标, 则这些点都在同一条直线上; (2) $A \cap B$ 中至多有一个元素; (3) 当 $a_1 \neq 0$ 时, 一定有 $A \cap B \neq \emptyset$.



1.2 函数及其表示

教材小节 1.2.1 函数的概念 1.2.2 函数的表示法

复习1 跨课程应用

1. (2006年, 陕西模拟) 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且满足条件 $f(4) = 1$, 对于任意 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 有 $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, 当 $x_1 > x_2$ 时, 有 $f(x_1) > f(x_2)$.

(1) 求 $f(1)$ 的值;

(2) 如果 $f(3x+1) + f(2x-6) \leq 3$, 求 x 的取值范围.

命题目的与解题技巧: 本题主要考查“对应法则” f 和函数定义域等知识的理解. 解决此题的关键一是注意定义域, 二是将抽象函数解析式转化为不含“ f ”的形式.

分析 (1) $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ 令 $x_1 = x_2 = 1$ 得 $f(1) = f(1) + f(1)$, $\therefore f(1) = 0$.

(2) $f(4^2) = f(4 \cdot 4) = f(4) + f(4) = 2$, $f(64) = f(16) + f(4) = 3$. 由 $f(3x+1) + f(2x-6) \leq 3$ 得 $f(3x+1)(2x-6) \leq f(64)$ 又 $x_1 > x_2$ 时有 $f(x_1) > f(x_2)$,

$$\begin{cases} 3x+1 > 0 \\ 2x-6 > 0 \\ (3x+1)(2x-6) \leq 64 \end{cases}$$

答案 (1) $f(1) = 0$, (2) $3 \leq x \leq 5$.

2. (2006年, 南昌模拟) 定义符号函数 $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$,

则不等式: $x+2 > (2x-1)^{\operatorname{sgn} x}$ 的解集是_____.

3. (2006年, 东城模拟) 设映射 $f: x \mapsto -x^2 + 2x$ 是实数集 M 到实数集 N 的映射, 若对于实数 $p \in N$, 在 M 中不存在原象, 则 p 的取值范围是()

- A. $(1, +\infty)$ B. $[1, +\infty)$
C. $(-\infty, 1)$ D. $(-\infty, 1]$

4. (2005年, 河南) 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{2+x-x^2}}{|x|-x}$ 的定义域是()

- A. $[-1, 2]$
B. $[-1, 0] \cup (0, 2]$
C. $[-1, 0)$
D. $(0, 2]$

5. (2004年, 浙江) 已知 $\frac{1-x}{1+x} = \frac{1-x^2}{1+x^2}$, 则 $f(x)$ 的解析式可取为()

- A. $\frac{x}{1+x^2}$ B. $-\frac{2x}{1+x^2}$
C. $\frac{2x}{1+x^2}$ D. $-\frac{1}{1+x^2}$

复习2 自主复习



考纲要求

1. 掌握求函数的定义域的常用方法; 2. 掌握求函数的值域、最值的常用方法; 3. 了解映射的概念, 掌握已知象求原象, 以及已知原象求象的方法; 4. 理解函数的概念, 掌握函数的三要素, 函数的表示法, 理解复合函数、分段函数等概念, 并能运用它们来解决函数的问题; 5. 掌握求函数的解析式的常用方法.



知识梳理

1. 函数的概念

(1) 设 A, B 是非空的_____, 如果按照某种确定的对应关系 f , 使对于集合 A 中的任意一个数 x , 在集合 B 中都有_____数 $f(x)$ 和它对应, 那么就称_____为从集合 A 到集合 B 的一个_____, 记作_____. 其中, x 叫做_____, x 的取值范围 A 叫做函数的_____, 与 x 的值相对应的 y 值叫做_____, 函数值的集合 $\{f(x) | x \in A\}$ 叫做函数的_____.

(2) 设 a, b 是两个实数, 且 $a < b$, 我们规定:

① 满足不等式 $a \leq x \leq b$ 的实数 x 的集合叫做_____, 表示为 $[a, b]$;

② 满足不等式 $a < x < b$ 的实数 x 的集合叫做_____, 表示为_____;

③ 满足不等式 $a \leq x < b$ 或 $a < x \leq b$ 的实数 x 的集合叫做_____, 分别表示为 $[a, b)$, $(a, b]$.

(3) 实数集 $\mathbf{R}$ 可以用区间表示为_____, “ ∞ ”读作“无穷大”, “ $-\infty$ ”读作“负无穷大”, “ $+\infty$ ”读作“正无穷大”, 我们可以把满足 $x \geq a$, $x > a$, $x \leq b$, $x < b$ 的实数 x 的集合分别表示为_____.

(4) 函数的三要素

_____, _____及_____, 称为函数的三要素.

2. 函数的表示法

(1) 解析法, 就是用_____表示两个变量之间的对应关系.

(2) 图象法, 就是用_____表示两个变量之间的对应关系.

(3) 列表法, 就是用_____表示两个变量之间的对应关系.

(4) 设 A, B 是两个_____的集合, 如果按_____, 使对于集合 A 中的任意一个元素 x , 在集合 B 中都有_____的元素 y 与之对应, 那么就称对应_____为从集合 A 到集合 B 的一个映射.



特别提醒

1. 求函数定义域的主要依据是：(1)分式的分母不得为零；(2)偶次方根的被开方数不小于零；(3)对数函数的真数必须大于零；(4)指数函数和对数函数的底数必须大于零且不等于1。

2. 如果函数是由一些基本函数通过四则运算而得到的，那么它的定义域是各基本函数定义域的交集。

3. 复合函数 $y=f[g(x)]$ 的定义域由内函数 $g(x)$ 的定义域和值域以及外函数的定义域共同确定。

4. 求函数值域的常用方法有(1)配方法；(2)反函数法(逆求法)；(3)判别式法；(4)函数有界性；(5)换元法；(6)图象法；(7)重要不等式法；(8)单调性法；(9)求导法。其中，判别式法和函数有界性的本质都是反函数法(逆求法)试图解出 x ，并使 x 有解，从而得到 y 的不等式。

5. 对应、映射和函数三个概念的内涵逐步丰富。对应中的唯一性形成映射，映射中的非空数集形成函数；也就是说，函数是一种特殊的映射，而映射又是一种特殊的对应。

6. 对于映射与函数的定义都要抓住对于集合 A 中任一元素对应着 B 中唯一的元素，由此可知，函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $x=a$ 至多只有一个交点。

7. 已知原象求象只需将原象代入对应法则即可；已知象求原象，用待定系数即可。

8. 掌握构成函数的三要素——对应法则、定义域和值域。其中对应法则是核心，定义域是函数的灵魂。它们是判断两个函数是否为同一函数的依据。

9. 掌握函数的三种表示方法——列表法、解析法和图象法。若函数在其定义域的不同子集上，因对应法则不同或用几个不同式子来表示，这种表示形式的函数叫做分段函数。

10. 如果 $y=f(u)$ ， $u=g(x)$ ，那么 $y=f[g(x)]$ 叫做 f 和 g 的复合函数。其中 $g(x)$ 为内函数， $f(u)$ 为外函数。

11. 研究函数必须坚持“定义域优先”的原则。

12. 求函数解析式的常用方法：拼凑法，代入法、待定系数法、换元法、解方程组法。

复习3 新题探究

考点1 求函数定义域问题

【例1】已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$ ，求下列函数的定义域。

(1) $f(x^2)$ ；(2) $f(x^2-1)$ 。

解 (1) $\because f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$ ，

$\therefore$ 要使 $f(x^2)$ 有意义，则必有 $0 \leq x^2 \leq 1$ 。

解得 $-1 \leq x \leq 1$ 。

$\therefore f(x^2)$ 的定义域为 $[-1, 1]$ 。

(2) 由 $0 \leq x^2-1 \leq 1$ ，得 $1 \leq x^2 \leq 2$ 。

$\therefore$ 函数 $f(x^2-1)$ 的定义域为 $[-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}]$ 。

方法归纳

要求 $f(x^2)$ 的定义域，需求 $f(4x)$ 的定义域，而 $f(x)$ 的定义域可根据复合函数 $f[g(x)]$ 的定义域求得。若已

知复合函数 $f[g(x)]$ 的定义域求 $f(x)$ 的定义域，可令 $t=g(x)$ ，由 x 的范围推出 t 的范围，再以 x 换 t 即得 $f(x)$ 的定义域。若已知 $f(x)$ 的定义域求复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的定义域，可将 $f(x)$ 的定义域写成关于 x 的不等式，然后将 x 换成中间变量 $\varphi(x)$ ，再解不等式即可得到复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的定义域。

【例2】若函数 $y=\sqrt{(a^2-1)x^2+(a-1)x+\frac{2}{a+1}}$ 的定义

域为 $\mathbf{R}$ ，求实数 a 的取值范围。

分析 此题是利用函数的定义域，求解使所给函数有意义的待定系数 a 。

解 依题意当 $x \in \mathbf{R}$ 时， $(a^2-1)x^2+(a-1)x+\frac{2}{a+1} \geq 0$ 恒成立。

(1) 当 $a^2-1=0$ ，即当 $\begin{cases} a^2-1=0 \\ a+1 \neq 0 \end{cases}$ 时有 $a=1$ ，此时有

$(a^2-1)x^2+(a-1)x+\frac{2}{a+1}=1$ 。可知当 $x \in \mathbf{R}$ 时，

$(a^2-1)x^2+(a-1)x+\frac{2}{a+1} \geq 0$ 恒成立， $\therefore a=1$ 。

(2) 当 $a^2-1 \neq 0$ ，即当

$$\begin{cases} a^2-1 > 0 \\ \Delta=(a-1)^2-4(a^2-1) \cdot \frac{2}{a+1} \leq 0 \end{cases} \text{ 时，}$$

有 $\begin{cases} a^2 > 1 \\ a^2-10a+9 \leq 0 \end{cases}$ 解得 $1 < a \leq 9$ 。

综上所述当 $x \in \mathbf{R}$ 时，使得函数 y 有意义的 $a \in [1, 9]$ 。

方法归纳

解题时不要漏掉对第一种情况 $a^2-1=0$ 的讨论。

锁定高考

1. (2005年，北京) 函数 $f(x)=\sqrt{x+1}+\frac{1}{2-x}$ 的定义域为_____。

考点2 求函数值域问题

【例3】求值域：(1) $y=\sin x + \sqrt{3} \cos x$ ；

(2) $y=\cos^2 x + \sqrt{3} \cos x \cdot \sin x + 1$ 。

解 (1) $y=2(\cos 60^\circ \sin x + \sin 60^\circ \cos x)$

$=2\sin(x+60^\circ) \Rightarrow y \in [-2, 2]$ 。

(2) $y=\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \frac{3}{2}$

$=\sin(2x+30^\circ) + \frac{3}{2} \Rightarrow y \in [\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$ 。

方法归纳

(1) 本例是利用正弦函数(或余弦函数)的有界性来求函数值域的，即变化含有 $\sin x$ 、 $\cos x$ 的函数，使其只含有一种三角函数(正弦或余弦)，然后利用 $|\sin x| \leq 1$ 或 $|\cos x| \leq 1$ 求其值域。



(2) 利用以上提到的思想方法, 必须在原函数的定义域内求值域, 不然即使方法正确, 结果也是错误的. 还应注意求函数值域问题往往和函数的最大值、单调性等性质相联系着, 应综合应用这些知识.

【例4】求值域: (1) $y = \frac{1+x^2}{x}$;

(2) $y = 1 - x - \frac{4}{x} (x > 0)$.

解 (1) 若 $x > 0$, 则 $y = \frac{1}{x} + x \geq 2$;

若 $x < 0$, 则 $-y = -1 - x - \frac{4}{x} \geq 2 \Rightarrow y \leq -2$.

∴ 函数的值域是 $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

(2) $\because y = 1 - x - \frac{4}{x} = 1 - (\frac{1}{2} + \frac{x}{2} + \frac{4}{x})$

$\leq 1 - 3\sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{4}{x}} = -2$.

∴ $y \in (-\infty, -2]$.

方法归纳

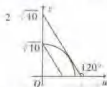
本题是利用平均值不等式法求得函数值域的, 当一个函数式及其自变量符合: $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$ (其中 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 皆为正数, $n=2, 3, \dots$) 及其条件时, 利用该不等式可直接求值域.

【例5】求函数 $y = \sqrt{3x+6} + \sqrt{8-x}$ 的值域.

解 原函数可变成

$y = \sqrt{3} \times \sqrt{x+2} + \sqrt{8-x}$. ①

取点 $P(\sqrt{x+2}, \sqrt{8-x})$, 显然 P 点在四分之一圆弧 $C: u^2 + v^2 = 10 (u, v \geq 0)$ 上; 由①式得 P 点也在直线 $l: \sqrt{3}u + v = y$ 上, 且直线 l 在 v 轴上的截距等于 y . 因此, 过圆弧 C 上的点 P , 作倾斜角为 120° 的直线 l , 其在 v 轴上截距的取值范围即为原函数的值域.



如图, 易得 l 在 v 轴上截距的最大值为 $2\sqrt{10}$, 最小值为 $\sqrt{10}$.

故 $y \in [\sqrt{10}, 2\sqrt{10}]$.

方法归纳

(1) 本题是利用数形结合的方法得解的. 一点是几何中的基本元素, 点的运动形成轨迹. 解题时若利用数形的转化, 巧妙地取点, 则可使问题获得便捷、新颖的解法.

(2) 求函数值域的方法, 除前面提到的几种基本方法外, 通过以上几个例题看到也常利用下面的一些方法:

① 利用三角函数 ($|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$) 的有界性, 求函数值域.

② 利用三角代换, 求函数值域.

③ 利用复合函数法, 求函数值域.

④ 利用平均值不等式法, 求函数值域.

⑤ 利用数形结合的方法, 求函数值域.

锁定高考

2. (2005年, 江苏) 已知 $a \in \mathbb{R}$, 函数 $f(x) = x^2 |x-a|$.

(1) 当 $a=2$ 时, 求使 $f(x) \leq x$ 成立的 x 的集合;

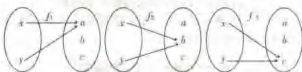
(2) 求函数 $y=f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上的最小值.

考点3 映射问题

【例6】已知 $A=\{x, y\}, B=\{a, b, c\}$, 从集合 A 到集合 B 的所有不同的映射有多少个?

解 本题主要考查映射概念与分步计数原理.

解 共有 $3^2=9$ 个. 集合 A 中 2 个元素对应 B 中相同元素的对应共有 3 个, 这时有 3 个不同的映射, 见下图.



集合 A 中 2 个元素同时对应 B 中 2 个不同的元素的对应共有 6 个, 这时有 6 个不同的映射, 见下图.



所以从集合 A 到集合 B 的所有不同的映射一共有 9 个. 实际上, 由排列知识可知, A 中元素为 $m=2$ 个, B 中元素为 $n=3$ 个, 故可得 A 到 B 的映射一共有 $n^m=3^2=9$ 个.