大学数学系列教材

离散数学及其应用

■ 魏长华 王光明 魏媛媛 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

大学数学系列教材

离散数学及其应用

■ 魏长华　王光明　魏媛媛　编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

离散数学及其应用/魏长华,王光明,魏媛媛编著.—武汉:武汉大学出版社,2006.6

大学数学系列教材

ISBN 7-307-05184-2

Ⅰ.离… Ⅱ.①魏… ②王… ③魏… Ⅲ.离散数学—高等学校—教材 Ⅳ.O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 095296 号

责任编辑:顾素萍　　责任校对:黄添生　　版式设计:支　笛

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)

(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn 网址:www.wdp.com.cn)

印刷:湖北省荆州市今印印务有限公司

开本:880×1230　1/32　印张:11.75　字数:325 千字

版次:2006 年 6 月第 1 版　　2006 年 6 月第 1 次印刷

ISBN 7-307-05184-2/O·348　　定价:20.00 元

前　言

离散数学作为一门学科，形成于 20 世纪 70 年代初期，由于计算机科学的发展和计算机应用领域的日益广泛，迫切需要一些适当的数学工具来解决计算机各领域中提出的理论问题，离散数学正是适应这种需要而建立和发展起来的。它综合了计算机科学中所用到的各数学分支，并进行系统的、全面的论述，从而为计算机科学提供了有力的理论基础和工具。离散数学的内容十分丰富，涉及面很广，诸如数理逻辑、集合论、抽象代数、图论、数论、可计算性理论、形式语言与自动机理论、组合学和离散概率，等等。

离散数学课程是计算机科学与工程各专业的重要的基础理论课程。本人从事计算机专业教学和科研工作多年，深感离散数学在计算机科学技术发展中的作用，为此，将自己的实践和体会总结出来，使读者能够在计算机科学各个相关领域的背景下，去猎取各领域相应的数学理论、方法和技巧，去品尝“古老”的数学与“年轻”的计算机科学之间的密切关系，去加深计算机科学理论的理解，去提高计算机技术的应用能力，从而使不同知识层次的读者从中有所收益，这就是编者编写这本书的宗旨。

本书介绍离散数学的基本知识，包括数理逻辑、集合论、抽象代数、格和布尔代数，以及图论等。本书的特点并不苛求从数学的逻辑性和严密性上去论述所涉及的数学理论知识，而是注重于这些数学知识对于计算机科学诸领域中所起的应用作用。也就是说，注重于如何通过有关的数学理论、方法和技术去解决计算机科学中的实际应用问题。为此，本书力求做到理论的叙述与例题演算的有机结合，而且书中大量的例题都来自于计算机科学各领域中的实际问

题，能使读者有真实感，同时，读者可以从这些例题中领悟到数学与计算机科学之间的密切关系。本书的酝酿构思、撰写工作历时近10年，可以说它是编者多年从事计算机科学教学和科研的一个经验汇报，是给读者的一份奉献。

本书适合于高等院校计算机专业的本科生、研究生用作教材，同时也可供从事计算机应用开发的计算机专业工程技术人员参考。

由于编者水平有限，书中难免有错误和不妥之处，敬请读者批评斧正。

魏长华

2006年3月

目　　录

第 1 章 数理逻辑

计算机科学与数理逻辑有着十分密切的关系. 可以说，数字电子计算机是数理逻辑与电子技术相结合的产物. 无论是作为数字电子计算机雏形的图灵机，还是作为设计数字电子计算机的数学工具的布尔代数，都是离不开数理逻辑的. 事实上，数理逻辑是计算机科学的理论基础之一. 这主要反映在无论是作为计算机科学的核心的算法，还是作为程序设计工具的语言；无论是程序设计的方法，还是计算复杂性的理论，都要直接涉及数理逻辑的有关知识和有关理论. 因此，数理逻辑是计算机科学中十分重要的基础理论.

数理逻辑是用数学方法研究思维规律的一门学科. 所谓的数学方法，主要是指用一套符号简洁地表达出各种推理的逻辑关系. 因此，数理逻辑也称为符号逻辑. 现代数理逻辑包括 4 个分支：证明论、模型论、递归论和公理化集合论. 在这一章里，我们将介绍数理逻辑的基础内容，如命题演算、谓词演算和递归论等. 这些内容在计算机科学中十分重要，尤其是命题演算和谓词演算，它为机器证明、专家系统、自动程序的设计、计算机辅助设计等计算机的应用和理论研究提供了必要的理论基础.

1.1 命题演算

1.1.1 命题

在世界上存在着很多仅与二值有关的事物. 如一个普通的开关，它可以有闭合和断开两种状态；一个灯泡可以有亮和不亮两种

状态；继电器接点有“吸合”和“释放”，也是两种不同的状态．在计算机的逻辑电路中有“高电平”和“低电平”两种不同的状态．在程序设计中的逻辑条件判断中有“满足条件”与“不满足条件”两种不同的状态．

在日常逻辑判断中，对语句也一样，有“真”和“假”两种不同状态．我们知道，人的社会活动离不开思想的交流，而进行思想交流的一个重要途径就是语言．语言的单位是句子，句子可以分为疑问句、祈使句、感叹句和陈述句等．其中只有陈述句才能分辨出真假．而其他的句子是无所谓真假的．

例 1 ① 银是白的．

② 9 是质数．

③ “银河”计算机是巨型机．

④ 陈涉起义那天，杭州在下雨．

⑤ 荷花总是在春天开放．

这 5 个句子中，句子①和③是真的，句子②和⑤是假的，而句子④已无法查明它的真假性了，但它要么是真，要么是假．

我们把凡是可以分辨真假的陈述句称为**命题**．是真的语句称为**真命题**，或者说命题的值为真．假的语句称为**假命题**，或者说命题的值为假．这就是说命题的值指的是命题的真假性．

例 2 ① $X+Y>4$．

② 劳驾，请你让一下．

③ 多么美啊！

④ 你打哪儿来？

在这 4 个句子中，句子①虽说是陈述句，但它的真值要取决于 X 和 Y 的值，所以①不是命题．而句子②，③和④都不是陈述句，所以也不是命题．

又例如，一个人说：“我正在说谎．”

他是在说谎呢还是在说真话呢？我们来分析一下．

如果他是在说谎，那么他说的“我正在说谎”是假的．这说明他是在说真话．于是我们得出一个矛盾结论：如果他在说谎，那么他

是在讲真话. 另一方面，如果他是在说真话，那么他说的“我正在说谎”是真的，也就是说，他在说谎. 于是我们又得出一个矛盾结论：如果他是在讲真话，那么他在说谎.

经过上面的分析，我们得出他既非说谎也不是在讲真话. 这样，“我正在说谎”事实上是不能判断它的真假的，所以不是命题. 像这种句子我们称之为**悖论**.

在数理逻辑中，通常用大写的拉丁字母 $A, B, C, \cdots, P, Q, \cdots$ 来表示命题.

命题可以分为两类，一类是原子命题，一类是复合命题. 如例 1 中的①和②就是原子命题. **原子命题**是不可以再分割的命题.

1.1.2 命题的联结词

联结词是命题演算的运算符. 原子命题通过联结词可以构成新的命题，这种新的命题称为**复合命题**. 而复合命题的真假值完全取决于构成该命题的原子命题.

例 3 ① 明天不下雨.

② 明天下雪并且有风.

③ 你会英语或者会俄语.

④ 如果你去教室，那么我就留在宿舍.

⑤ m^2 是偶数当且仅当 m 是偶数.

上面的句子都是用复合句叙述的命题. 在这些句子中，它们使用了联结词：“不”、“并且”、“或者”、“如果……那么……”、“……当且仅当……”.

常用的命题联结词有 5 种. 它们是否定、合取、析取、蕴含和等值联结词. 下面，我们分别给予介绍.

1. 否定联结词“$\overline{}$”

设 P 是一个命题. 命题 P 的否定运算记为 $\overline{P}$，其取值规则定义为：当命题 P 取值为真时，$\overline{P}$ 取值为假；当命题 P 取值为假时，$\overline{P}$ 取值为真. 我们称运算符“$\overline{}$”为**否定联结词**，称 $\overline{P}$ 为命题 P 的**否命**

题. 否命题 $\overline{P}$ 的取值可以用如下的表来定义，这种表称为否命题 $\overline{P}$ 的真值表(表中"1"表示真，"0"表示假)：

P	$\overline{P}$
0	1
1	0

从语言的逻辑角度来看，日常用语中的"不"、"无"、"没有"等否定词汇均与否定联结词相当.

2. 合取联结词"$\wedge$"

设 P 和 Q 是两个命题. 命题 P 和 Q 的合取运算记为 $P\wedge Q$，其取值规则是：当且仅当命题 P 和 Q 均取值为真时，$P\wedge Q$ 才取值为真. 我们称运算符"$\wedge$"为**合取联结词**，称 $P\wedge Q$ 为**合取式复合命题**. 因此 $P\wedge Q$ 的真值表为

P	Q	$P\wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

在日常用语中的"并且"、"既……又……"、"和"、"不仅……而且……"等词汇均与"$\wedge$"相当. 例如，我们如果用 D_1 表示"明天下雪"，用 D_2 表示"明天有风"，例 3 中的命题②就可表示为 $D_1\wedge D_2$.

3. 析取联结词"$\vee$"

设 P 和 Q 是两个命题. 命题 P 和 Q 的析取运算记为 $P\vee Q$，其取值规则是：当且仅当 P 和 Q 至少有一个取值为真时，$P\vee Q$ 便取值为真. 我们称运算符"$\vee$"为**析取联结词**，称 $P\vee Q$ 为**析取式复合命题**. 因此，$P\vee Q$ 的真值表为

P	Q	$P\vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

如果我们用 E_1 表示命题“你会英语”，E_2 表示命题“你会俄语”，那么例 3 中的命题③就可表示为 $E_1\vee E_2$.

日常用语中的“或者”一词有不可兼得的含义. 例如，“王瑛打算毕业后到工厂当工程师或者到学校当教师.” 这个命题中的“或者”表示二者只能居一，不会同时成立.

按照联结词“$\vee$”的定义，当 P 和 Q 都为真时，$P\vee Q$ 也为真. 因此，联结词“$\vee$”所表示的“或者”是“相容或”. 对于“不可兼或”，在数理逻辑中用联结词“$\forall$”来表示，称为**异或**或者称为**排斥或**. 命题 $P\forall Q$ 的取值规则是：当且仅当命题 P 和 Q 仅有一个取值为真时，$P\forall Q$ 为真. 如果用 P 表示“王瑛打算毕业后到工厂当工程师”，Q 表示“王瑛打算毕业后到学校当教师”，那么“王瑛打算毕业后到工厂当工程师或者到学校当教师” 可表示为命题 $P\forall Q$.

4. 蕴含联结词“$\rightarrow$”

从命题 P 和 Q，利用运算符“$\rightarrow$”可组成**蕴含式复合命题** $P\rightarrow Q$，其中命题 P 称为**蕴含式的前件**，命题 Q 称为**蕴含式的后件**，“$\rightarrow$”称为**蕴含联结词**，$P\rightarrow Q$ 的取值规则是：当前件 P 为真，后件 Q 为假时，命题 $P\rightarrow Q$ 取值为假；其他所有情况，命题 $P\rightarrow Q$ 取值为真. $P\rightarrow Q$ 的真值表为

P	Q	$P\rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

如果用 F_1 表示命题“你去教室”，F_2 表示命题“我留在宿舍”，则例 3 中命题④可表示为 $F_1 \to F_2$.

在前件 P 为真，后件 Q 也为真的情况下，复合命题 $P \to Q$ 为真. 这在日常语言中是正确的事情. 即从前提条件 P 可以推出结论 Q 成立. 在前件 P 为真而后件 Q 为假的情况下，命题 $P \to Q$ 为假. 这在日常语言中也是正确的，它说明由前提条件 P 不能推出结论 Q 成立. 按照蕴含的运算规则，当前件 P 为假时，无论后件 Q 是真还是假，命题 $P \to Q$ 总是真的. 这说明了一个客观的事实. 例如例 3 中的命题④，如果在“你去教室”为假的情况下，我们根本不予考虑是否留在宿舍，所以在这种情况下，无论“我留在宿舍里”是真还是假，复合命题④都是真的.

5. 等值联结词“↔”

从命题 P 和 Q，利用运算符“↔”可组成**等值式复合命题** $P \leftrightarrow Q$，并称“↔”为**等值联结词**，$P \leftrightarrow Q$ 的运算规则是

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

从定义的真值表我们可以看出，当且仅当命题 P 和 Q 取得相同的值时，命题 $P \leftrightarrow Q$ 才取值为真. 例如例 3 中的命题⑤，若用 G_1 表示命题“m^2 是偶数”，G_2 表示命题“m 是偶数”，则复合命题⑤就是 $G_1 \leftrightarrow G_2$.

从以上 5 种联结词的定义可看出，联结词的意义是由它的真值表惟一确定的，而不依赖于命题的含义如何. 从已知命题，通过运算符 $\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$，可以构造出新的命题. 在使用联结词运算符时，可以使用括号表示连续使用的联结词执行的先后次序. 对于运算符，我们作如下的约定：

(1) 运算符的优先次序为$\overline{\ }$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$，即在没有使用括号的情况下，最先运算"—"，其次是"$\wedge$"，再依次是"$\vee$"，"$\rightarrow$"和"$\leftrightarrow$".

(2) 相同的运算符，按从左到右的次序计算，括号可省略.

(3) 最外层的括号可以省略.

例 4 (a) 设 P 表示"他有理论知识"，Q 表示"他有实践经验"，则

① "他既有理论知识又有实践经验"可写成 $P\wedge Q$.

② "他虽有理论知识但无实践经验"可写成 $P\wedge\overline{Q}$.

(b) 设 P 表示"明天下雨"，Q 表示"明天下雪"，R 表示"我去学校"，则

① "如果明天不是雨夹雪，那么我去学校"可写成$\overline{P\wedge Q}\rightarrow R$.

② "如果明天不下雨也不下雪，那么我去学校"可写成 $\overline{P}\wedge\overline{Q}\rightarrow R$.

③ "如果明天下雨或下雪，那么我不去学校"可写成 $P\vee Q\rightarrow\overline{R}$.

④ "当且仅当明天不下雨并且不下雪时我才去学校"可写成 $\overline{P}\wedge\overline{Q}\leftrightarrow R$.

⑤ "明天，我将雨雪无阻一定去学校"可写成$(P\wedge Q\wedge R)\vee(\overline{P}\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge\overline{Q}\wedge R)\vee(\overline{P}\wedge\overline{Q}\wedge R)$.

1.1.3 命题变元和命题公式

以真、假为变域的变元称为**命题变元**.

相应地，0 和 1 称为**命题常元**.

而以真、假为定义域且以真、假为值域的函数称为**真值函数**.

单个命题变元和命题常元称为**原子公式**. 我们按以下规则通过递归定义生成的公式称为**命题公式**：

(1) 命题常元 0,1 是命题公式；

(2) 命题变元是命题公式；

(3) 如果 P 是命题公式，则 $\overline{P}$ 是命题公式；

(4) 如果 P 和 Q 是命题公式，则 $P \vee Q, P \wedge Q, P \rightarrow Q$ 和 $P \leftrightarrow Q$ 也是命题公式；

(5) 有限次地利用上述(1),(2),(3),(4)而生成的符号串也是命题公式.

按照这个递归定义，下面的符号串是命题公式：

$$(P \vee Q) \rightarrow (\overline{Q \wedge R}),$$

$$\overline{P \vee R},$$

$$((R \wedge Q) \vee P) \leftrightarrow (Q \vee P).$$

而下面的符号串不是命题公式：

$$P \rightarrow QR,$$

$$\vee R \rightarrow P,$$

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R.$$

这里符号 P, Q 和 R 均表示命题变元.

当公式中的每一个命题变元都赋以确定的真值时，公式的真值也就随之而确定，从而成为一个命题. 公式中所有命题变元的一组确定取值称为公式的一组**真值指派**. 含有 n 个命题变元的公式一共有 2^n 组不同的真值指派. 对于每一组真值指派，公式都有一个相应的真值. 命题公式与命题变元之间的真值关系，可以用完成真值表的方法来表示.

例 5 (a) 命题公式 $\neg((P \vee Q) \wedge P)$①的真值表如下：

P	Q	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \wedge P$	$\neg((P \vee Q) \wedge P)$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	1	1	0

(b) 命题公式 $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ 的真值表如下：

① 符号“$\neg$”与符号“ $\overline{}$”等同，也表示否定联结词.

P	Q	$\neg P$	$\neg P\vee Q$	$P\to Q$	$(P\to Q)\leftrightarrow(\neg P\vee Q)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1

如果一个命题公式，对它的所有的命题变元的任何一组真值指派，取值恒为真，那么我们称这样的公式为**重言式**，或称为**永真式**. 相反地，如果对于它的所有命题变元的任何一组真值指派，其取值为假，则称这样的命题公式为**矛盾式**，或称为**永假式**. 如果至少有命题变元的一组真值指派使得命题公式的值为真，则称这样的命题公式为**可满足公式**. 如果至少有命题变元的一组真值指派使得命题公式的值为假，则称这样的命题公式为**非永真式**.

例如，例 5 (a)中的命题公式既不是重言式也不是矛盾式，而是一个可满足公式，也可称为非永真式. 例 5 (b)中的命题公式是一个重言式.

重言式在数理逻辑中是一种重要的命题公式，也是命题演算的重要研究课题之一. 那么如何判断一个命题公式是重言式呢? 上面我们给出了列真值表的方法，看它取值是否恒为真，不过这并不是一种好方法，这是因为：

(1) 当命题公式很复杂或者所含的命题变元很多的时候，真值表的计算量很大. 如一个命题公式含有 n 个命题变元，它们就有 2^n 组不同的真值指派，即真值表中有 2^n 行. 若 $n=64$，则 $2^{64}\approx 2\times 10^{19}$. 这么多行的真值表的计算是相当麻烦的.

(2) 用这种方法我们可以从一个命题公式得到一个对应的真值表. 但是，反之要从一个命题公式的真值表求得与之对应的命题公式就不是一件容易的事了.

下面讨论一种判断公式为重言式的切实可行的方法——推导法. 推导法的思想是：首先通过列真值表的方法得到一些为数不多的基本等值式，然后利用这些基本等值式推导出众多的等值式.

在下一节里，应用推导法，我们将着重讨论重言式和由重言式产生的其他的等值式.

1.2 重 言 式

显然，重言式具有以下特点：

(1) 重言式的否定是矛盾式，矛盾式的否定是重言式. 所以在重言式和矛盾式两者中，我们仅只研究其一，就可知其二.

(2) 重言式的合取、析取、蕴含、等值都是重言式. 这样，我们可以由简单的重言式推导出复杂的重言式.

(3) 由重言式可以产生出许多非常有用的等值式和蕴含式.

在重言式的研究中，特别能引起我们兴趣的是等值式和蕴含式.

1.2.1 等值式

设 P 和 Q 是两个命题公式，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是在 P 和 Q 中出现的全部命题变元. 如果对于命题变元 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的任意一组真值指派，命题公式 P 和 Q 的取值都相同，那么就称命题公式 P 和 Q 是**等值式**，记为 $P \Leftrightarrow Q$.

显然，当且仅当 P 和 Q 的真值表完全相同时，P 和 Q 是等值式的公式. 例如，P 和 $\neg(\neg P)$ 是等值式，$P \vee P$ 和 P 是等值式，$P \wedge Q$ 和 $\neg P \vee \neg Q$ 是等值式等.

这里需要指出的是，等值式符号“$\Leftrightarrow$”与等值的符号“$\leftrightarrow$”是两个意义完全不同的符号. “$\Leftrightarrow$”不是命题联结词，而是命题公式间的关系符号. 因此，它是没有运算功能的，不能由于它而产生命题公式. 如 $A \Leftrightarrow B$ 不能表示命题公式，仅表示命题公式 A 与命题公式 B 之间有等值的关系. 而“$\leftrightarrow$”是命题联结词，具有运算功能，可以产生命题公式. 如 $A \leftrightarrow B$ 就是一个命题公式，表示某个命题. 然而，这两者之间有着十分密切的联系，即满足 $A \Leftrightarrow B$ 的充要条件是命题公式 $A \leftrightarrow B$ 为重言式.