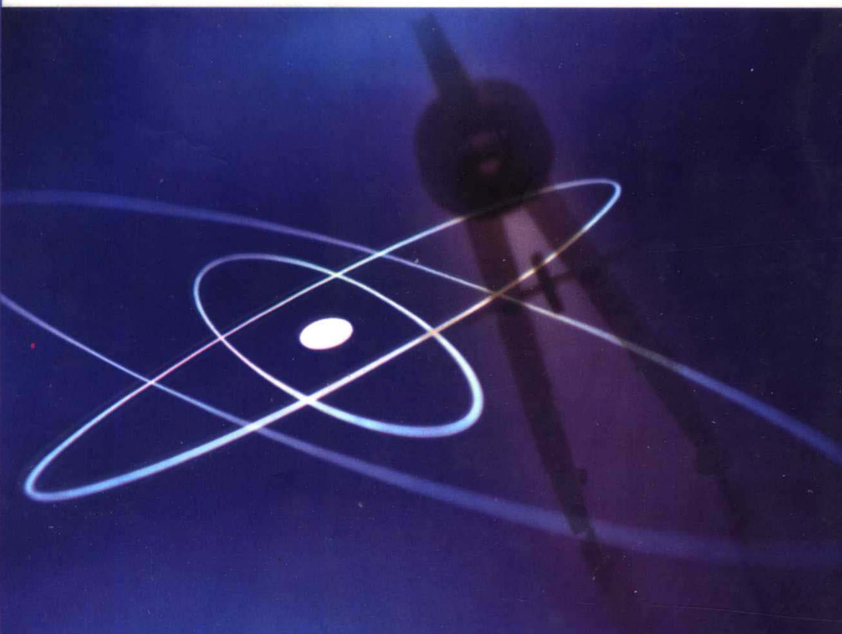
GAOGUANDIANXIA DE
CHUDENG SHUXUE GAINIAN

高观点下的
初等数学概念

沈 钢 编著



浙江大學出版社

GAOGUANDIANXIA DE CHUDENG SHUXUE GAINIAN

高观点下的初等数学概念

沈　钢　编著

浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高观点下的初等数学概念 / 沈钢编著 . —杭州:浙江大学出版社,2001.7
ISBN 7-308-02766-X

Ⅰ. 高... Ⅱ. 沈... Ⅲ. 初等数学—中学—教学参考资料 Ⅳ. G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 040833 号

出版发行 浙江大学出版社
(杭州浙大路 38 号 邮政编码 310027)
(E-mail:zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址:http://www.zjupress.com)
责任编辑 田 华
排 版 者 浙江大学出版社电脑排版中心
印 刷 浙江上虞印刷厂
经 销 浙江省新华书店
开 本 850mm×1168mm 1/32
印 张 5.25
字 数 132 千
版 印 次 2001 年 7 月第 1 版第 1 次印刷
印 数 0001—4000
书 号 ISBN 7-308-02766-X/G·402
定 价 8.00 元

前　　言

数学中有不少概念、结论和方法由于受学生认识水平和接受能力的限制，在中小学数学教材中都被简化处理，或以公理的形式给出，或通过个别事例的分析、图形的观察作一般性推断. 本书则将结合现代数学思想方法，对中学数学教材中那些讲得不透彻的、薄弱的内容，加以分析、充实、提高，帮助中学教师更好地把握中学数学教材.

全书共分八章. 第一章通过用集合的概念表述自然数，将自然数置于集合论中，以更好地揭示自然数的本质规律，并且使得通过数学归纳法来证明有关自然数的命题成为合理. 第二章介绍了数系扩张以及不同数集在代数结构下的性质，使中学教材中被广泛使用的有理数运算律得以证实. 第三章通过极限来引入实数概念，能对实数有更深刻的理解. 进而引入的实数指数幂，使原本只能从图中看出的指数函数单调性的证明成为可能. 第四章介绍方程及方程组的同解变形原理，旨在减少解方程过程中验根的盲目性. 中学解方程中的方程变形注重的是方程存在解的必要条件，很少探究其充分条件. 其实，如果方程的每一步变形都是可逆的，均以同解原理为依据，则验根就没有必要. 第五章介绍了欧几里得几何的公理体系，以此来重新审视中学平面几何，从而更深刻地把握平面几何中各个命题内在的逻辑关系. 第六章通过积分使各个度量概念定义严格化，从而证明了矩形、长方体、圆、球等的求积公式. 而线段长度概念的引入使实数与直线上的点建立一一对应关系得以实现. 第七章在明确初等几何变换（平移、旋转、反射和相似）概念

的基础上分别导出它们的代数表示式，这既有利于理解这些初等几何变换的涵义，又便于揭示这些变换的性质.第八章二次曲线的分类是对中学二次曲线分类的补充. 从坐标变换的不变量引出二次曲线方程中内在的规律性，使得不必对二次曲线的方程进行标准化，即能判断二次曲线的形状.

本书可作为中学数学教师继续教育“现代数学与中学数学”类课程的教材，也可作为师范院校数学系“初等数学研究”、“数学教材教法”等课程的参考书.

由于作者水平有限，书中难免会有错误和疏漏，敬请读者批评指正.

作　者

2001年4月

目　录

第一章

集合观点下的自然数

§1.1 集合概念表达自然数

我们要把自然数从0开始计起的各数

$$0,1,2,3,\cdots$$

看成各个集合，表示成

$$\tilde{0},\tilde{1},\tilde{2},\tilde{3},\cdots$$

且这些集合本身及相互之间的关系都应反映自然数产生的规律．自然数产生于“数个数”，而“数个数”每次总是把前面所数过的个数包含在里面．每一个自然数不但说明它是第几个，而且，还要反映出它包含了多少个．前者是集合论中序数的概念，后者则是集合理论中基数的概念(0在“数个数”的意思中代表没有)．

1908年策墨罗(Ernst Zermelo)的表示法是

$$\tilde{0}:=\varnothing(\varnothing\text{表示空集}),$$
$$\tilde{1}:=\{\varnothing\},$$
$$\tilde{2}:=\{\{\varnothing\}\},$$
$$\tilde{3}:=\{\{\{\varnothing\}\}\},$$
$$\cdots\cdots$$

用这种表示法只说明了前者为后者的元，也就是

$$\tilde{0}\in\tilde{1},\tilde{1}\in\tilde{2},\tilde{2}\in\tilde{3},\cdots$$

但“属于”这个逻辑概念未必有“传递性”．由 $\tilde{1}\in\tilde{2},\tilde{2}\in\tilde{3}$未必有 $\tilde{1}\in\tilde{3}$．这样，策墨罗表示自然数的方法也不能使自然数有“属于”的传递性．没有这种传递性就失掉了自然数原有的性质．

1924 年匈牙利数学家冯・诺伊曼提出的表示法是

$$\begin{aligned}
&\tilde{0}:=\varnothing(\varnothing\text{表示空集}),\\
&\tilde{1}:=\{\varnothing\},\\
&\tilde{2}:=\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\\
&\tilde{3}:=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\},\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

这样

$$\begin{aligned}
&\tilde{0}:=\varnothing,\\
&\tilde{1}:=\{\tilde{0}\},\\
&\tilde{2}:=\{\tilde{0},\tilde{1}\},\\
&\tilde{3}:=\{\tilde{0},\tilde{1},\tilde{2}\},\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

前者恒属于后面发展出的各数集合，也就是有“属于”的传递性，即从

$$\tilde{0}\in\tilde{1}\in\tilde{2}\in\tilde{3}\in\cdots$$

也有

$$\tilde{0}\in\tilde{2},\tilde{0}\in\tilde{3},\cdots,\tilde{1}\in\tilde{3},\cdots$$

这种可传递性的由来是因为诺伊曼表示法具有“包含”关系

$$\tilde{0}\subseteq\tilde{1}\subseteq\tilde{2}\subseteq\tilde{3}\subseteq\cdots,$$

而包含关系总具有传递性．

这样，用诺伊曼表出各自然数的表示方法能够从“个数”和“次序”两个方面刻画各个自然数之间的关系．这种刻画方法的本身说明我们可以对自然数从构造的观点来阐明它的意义．

另外，诺伊曼表示法可写为

$$\begin{aligned}&\tilde{0}=\varnothing,\\&\tilde{1}=\tilde{0}\cup\{\tilde{0}\},\\&\tilde{2}=\tilde{1}\cup\{\tilde{1}\},\\&\tilde{3}=\tilde{2}\cup\{\tilde{2}\},\\&\cdots\cdots\end{aligned}$$

可见这是自然数的一般规律，故可有

定义 1.1 对于任何一个集合 a，它的后继是一个集合，定义为 a 与 $\{a\}$ 的并，用 a^+ 表示，即 $a^+=a\cup\{a\}$.

于是，从诺伊曼关于自然数的表示，我们有

定义 1.2 $0:=\varnothing$，$1:=0^+$，$2:=1^+$，一般地 $(n+1):=n^+$.

这样定义之后，我们就视 0,1,2,… 不单是书写的自然数符号，而且也是用后继与空集表出的各个集合. 我们把自然数全体组成的集合记为 $\mathbf{N}$.

定理 1.1 对任何 $a,b\in\mathbf{N}$，若 $a^+=b^+$，则 $a=b$.

证明 因为 $a^+=b^+$，所以 $a\in b^+=b\cup\{b\}$，则 $a\in b$ 或 $a=b$. 另一方面，$b\in a^+=a\cup\{a\}$，则 $b\in a$ 或 $b=a$. 故 $a=b$.

§1.2 归纳集与归纳原理

定义 1.3 若集合 A 有下列性质：

(1) $\varnothing\in A$；

(2) 对于任何 x，如果 $x\in A$，则 $x^+\in A$，则称 A 是一个归纳集.

无穷性公理 归纳集是存在的.

定理 1.2 存在一个最小的归纳集，该集合就是自然数集.

证明 根据无穷性公理，确有归纳集存在. 令 A 是所有归纳

集的交. 今证

(1)A 是一个归纳集. 事实上,对每一个归纳集 X,$\varnothing\in X$. 而 A 是这些 X 的交集,所以$\varnothing\in A$;若 $u\in A$,则对每一个归纳集 X,当然有 $u\in X$. 由 X 的定义知 $u^+\in X$,于是 $u^+\in A$.

(2)A 是一个最小的归纳集. 这是因为 A 是被任何归纳集所包含的一个归纳集.

(3)$A=\mathbf{N}$. 因为 $\mathbf{N}$ 是通过$\varnothing$依次作后继产生的,所以 $\mathbf{N}$ 是 A 的一个归纳子集. 而 A 是最小归纳集,所以 $A=\mathbf{N}$.

从自然数集的最小归纳集性质,得到

归纳原理 $\mathbf{N}$ 的任何一个归纳子集与 $\mathbf{N}$ 重合.

于是我们有

定理 1.3(数学归纳法) 设 $p(n)$是关于自然数 n 的命题,若

(1)$p(n)$在 $n=0$ 时成立;

(2)在 $p(k)$成立的假定下,可以推出 $p(k+1)$成立,则 $p(n)$对一切自然数 n 都成立.

证明 令 $T=\{n\in\mathbf{N}\mid p(n)\}$. 现证明 T 是一个归纳集.

由(1),$0\in T$.

由(2),当 $k\in T$ 时,$k^+\in T$.

所以 T 是 $\mathbf{N}$ 的一个归纳子集. 故 $T=\mathbf{N}$.

§1.3 自然数的运算及顺序

定义 1.4(加法) 自然数的加法是一种对应关系,它对 $\mathbf{N}$ 中任何 a,b,对应 $\mathbf{N}$ 中惟一确定的 $A_a(b)$,记为 $a+b$. 满足

(A1)$a+0=a \qquad [A_a(0)=a]$;

(A2)$a+b^+=(a+b)^+ \qquad [A_a(b^+)=A_a(b)^+]$.

定义 1.5(乘法) 自然数的乘法是一种对应关系,它对 $\mathbf{N}$ 中任何 a,b,对应 $\mathbf{N}$ 中惟一确定的 $M_a(b)$,记为 $a\cdot b$. 满足

(M1)$a\cdot 0=0$ $[M_a(0)=0]$;

(M2)$a\cdot b^+=a\cdot b+a$ $[M_a(b^+)=M_a(b)+a]$.

定理 1.4 自然数的加法是惟一存在的.

证明 存在性.

构造 $A_a(b)$. 令 $W\subseteq \mathbf{N}$ 是这样的一个子集,在 W 上可构造加法 $a+b$,使对任意 $b\in\mathbf{N}$,满足

(A1)$a+0=a$;

(A2)$a+b^+=(a+b)^+$.

(1)对于 $a=0$,令 $a+b=b$. 于是

$$a+0=0=a,$$

$$a+b^+=b^+=(a+b)^+,$$

即满足(A1)和(A2). 因此 $0\in W$.

(2)设 $a\in W$, 即存在对应 $a+b$,使(A1)和(A2)成立. 于是,对于 a^+,令 $a^++b=(a+b)^+$,有

$$a^++0=(a+0)^+=a^+,$$

$$a^++b^+=(a+b^+)^+=(a+b)^{++}=(a^++b)^+,$$

即满足(A1)和(A2). 因此 $a^+\in W$.

因此,W 是 $\mathbf{N}$ 的一个归纳子集,故 $W=\mathbf{N}$,即在 $\mathbf{N}$ 上存在对应 $a+b$,使(A1)和(A2)成立.

惟一性.

取定 $a\in\mathbf{N}$. 假设有两个满足(A1)和(A2)条件的对应 f_a,g_a,使对任何 $b\in\mathbf{N}$,$f_a(b),g_a(b)\in\mathbf{N}$. 令

$$T=\{b\in\mathbf{N}\mid f_a(b)=g_a(b)\},$$

因为 $f_a(0)=a=g_a(0)$,所以 $0\in T$.

假定 $b\in T$,则 $f_a(b)=g_a(b)$. 由定理 1.1,$f_a(b)^+=g_a(b)^+$. 由于 f_a,g_a 满足(A2)条件,所以 $f_a(b^+)=g_a(b^+)$. 从而 $b^+\in T$.

这样 T 是归纳子集,$T=\mathbf{N}$. 这说明 $f_a=g_a$.

类似地,我们有

定理 1.5 自然数的乘法是惟一存在的.

定理 1.6 对所有自然数,有下列五规律:

(1)加法结合律 $a+(b+c)=(a+b)+c$;

(2)加法交换律 $a+b=b+a$;

(3)加乘法分配律 $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$;

(4)乘法结合律 $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$;

(5)乘法交换律 $a\cdot b=b\cdot a$.

证明 (1)对于固定的 $a,b\in\mathbf{N}$,设

$$A=\{c\in\mathbf{N}\,|\,a+(b+c)=(a+b)+c\}.$$

因为从(A1)知

$$b+0=b,(a+b)+0=a+b,$$

故

$$a+(b+0)=(a+b)+0.$$

于是 $0\in A$.

若 $k\in A$,按(A2)有

$$a+(b+k)^+=(a+(b+k))^+,$$

所以

$$a+(b+k^+)=a+(b+k)^+=(a+(b+k))^+$$
$$=((a+b)+k)^+=(a+b)+k^+.$$

故 $k^+\in A$,即 $A=\mathbf{N}$.

(2)首先证明

$$0+n=n\quad(n\in\mathbf{N});\qquad ①$$
$$m^++n=(m+n)^+\quad(m,n\in\mathbf{N}).\qquad ②$$

对于①式,令

$$A=\{n\in\mathbf{N}\,|\,0+n=n\}.$$

从(A1)得 $0\in A$,即 $0+0=0$. 设 $k\in A$,则从(A2)得 $0+k^+=(0+k)^+=k^+$. 故 $k^+\in A$,即 $A=\mathbf{N}$.

对于②式,就任何固定的 $m\in\mathbf{N}$,令

$$B=\{n\in\mathbf{N}\mid m^{+}+n=(m+n)^{+}\}.$$

从(A1)得 $m^{+}+0=m^{+}=(m+0)^{+}$，即 $0\in B$. 设 $k\in B$，则从(A2)及 $k\in B$ 得 $m^{+}+k^{+}=(m^{+}+k)^{+}=(m+k)^{++}=(m+k^{+})^{+}$. 故 $k^{+}\in B$，即 $B=\mathbf{N}$.

任意固定的 $m\in\mathbf{N}$，令

$$C=\{n\in\mathbf{N}\mid n+m=m+n\}.$$

从①及(A1)得 $0+m=m=m+0$，即 $0\in C$. 设 $k\in C$，则从②，(A2)及 $k\in C$ 得 $k^{+}+m=(k+m)^{+}=(m+k)^{+}=m+k^{+}$. 故 $k^{+}\in C$，即 $C=\mathbf{N}$.

(3)任意固定的 $m,n\in\mathbf{N}$，令

$$A=\{p\in\mathbf{N}\mid m\cdot(n+p)=m\cdot n+m\cdot p\}.$$

从(A1)及(M1)得

$$\begin{aligned}
m\cdot(n+0)&=m\cdot n && (\text{由(A1)})\\
&=m\cdot n+0 && (\text{由(A1)})\\
&=m\cdot n+m\cdot 0, && (\text{由(M1)})
\end{aligned}$$

即 $0\in A$.

设 $k\in A$，则从(A2)及(M2)得

$$\begin{aligned}
m\cdot(n+k^{+})&=m\cdot(n+k)^{+} && (\text{由(A2)})\\
&=m\cdot(n+k)+m && (\text{由(M2)})\\
&=(m\cdot n+m\cdot k)+m && (\text{由 } k\in A)\\
&=m\cdot n+(m\cdot k+m) && (\text{由结论(1)})\\
&=m\cdot n+m\cdot k^{+}. && (\text{由(M2)})
\end{aligned}$$

故 $k^{+}\in A$，即 $A=\mathbf{N}$.

(4)任意固定的 $m,n\in\mathbf{N}$，令

$$A=\{p\in\mathbf{N}\mid m\cdot(n\cdot p)=(m\cdot n)\cdot p\}.$$

从(M1)得

$$m\cdot(n\cdot 0)=m\cdot 0=0;$$

$$(m\cdot n)\cdot 0=0.$$

故 $0\in A$.

设 $k\in A$,则从(M2)得

$$
\begin{aligned}
m\cdot(n\cdot k^{+}) &= m\cdot(n\cdot k+n) && \text{(由(M2))}\\
&= m\cdot(n\cdot k)+m\cdot n && \text{(由结论(3))}\\
&= (m\cdot n)\cdot k+m\cdot n && (\text{由 } k\in A)\\
&= (m\cdot n)\cdot k^{+}. && \text{(由(M2))}
\end{aligned}
$$

故 $k^{+}\in A$,即 $A=\mathbf{N}$.

(5)首先证明

$$0\cdot n=0 \quad (n\in A); \qquad ①$$

$$m^{+}\cdot n=m\cdot n+n \quad (m,n\in\mathbf{N}). \qquad ②$$

对于①式,令

$$A=\{n\in\mathbf{N}\mid 0\cdot n=0\}.$$

从(M1)得 $0\in A$, 即 $0\cdot 0=0$. 设 $k\in A$,则从(M2)得 $0\cdot k^{+}=0\cdot k+0=0+0=0$. 故 $k^{+}\in A$,即 $A=\mathbf{N}$.

对于②式,就任何固定的 $m\in\mathbf{N}$,令

$$B=\{n\in\mathbf{N}\mid m^{+}\cdot n=m\cdot n+n\}.$$

从(M1)得 $m^{+}\cdot 0=0=m\cdot 0=m\cdot 0+0$, 故 $0\in B$. 设 $k\in B$,则从(M2)得

$$
\begin{aligned}
m^{+}\cdot k^{+} &= m^{+}\cdot k+m^{+}\\
&= (m\cdot k+k)+m^{+} && (\text{由 } k\in A)\\
&= [(m\cdot k+k)+m]^{+} && \text{(由(A2))}\\
&= [(m\cdot k+m)+k]^{+} && \text{(由结论(1),(2))}\\
&= (m\cdot k+m)+k^{+} && \text{(由(A2))}\\
&= m\cdot k^{+}+k^{+}. && \text{(由(M2))}
\end{aligned}
$$

故 $k^{+}\in B$,即 $B=\mathbf{N}$.

任意固定的 $m\in\mathbf{N}$,令

$$C=\{n\in\mathbf{N}\mid n\cdot m=m\cdot n\}.$$

从①及(M1)得 $0\cdot m=0=m\cdot 0$, 即 $0\in C$. 设 $k\in C$,则从②,

(M2)及 $k\in C$ 得 $k^{+}\cdot m=k\cdot m+m=m\cdot k+m=m\cdot k^{+}$. 故 $k^{+}\in C$,即 $C=\mathbf{N}$.

定理 1.7 若 $a,b\in\mathbf{N}$,则 $a\cdot b=\overbrace{a+a+\cdots+a}^{b}$.

证明 对任意固定的 $a\in\mathbf{N}$,令

$$T=\{b\in\mathbf{N}\mid a\cdot b=\overbrace{a+a+\cdots+a}^{b}\}.$$

从(M1)$a\cdot 0=0$, 得 $0\in T$. 设 $k\in T$,则从(M2)得

$$a\cdot k^{+}=a\cdot k+a=\overbrace{a+a+\cdots+a}^{k}+a=\overbrace{a+a+\cdots+a}^{k^{+}}.$$

故 $k^{+}\in T$,即 $T=\mathbf{N}$.

§1.4 自然数的顺序关系

定义 1.6 若 $a,b\in\mathbf{N}$,且存在不为 0 的 $k\in\mathbf{N}$,使 $a=b+k$,则称 a 大于 b,记为 $a>b$. 也说 b 小于 a,记为 $b<a$.

定理 1.8 对于 $a,b\in\mathbf{N}$,$a>b\Leftrightarrow a\supset b$.

证明 只要证明对于任何不为 0 的 $k\in\mathbf{N}$,若 $a=b+k$,则 $a\supset b$.

当 $k=1$ 时,有

$$a=b+1=b+0^{+}=(b+0)^{+}=b^{+}.$$

因此 $a=b^{+}\supset b$.

假设 $k=n$ 时结论成立,即对于满足 $a=b+n$ 的 a,b,有 $a\supset b$. 对于 $k=n^{+}$,设 a,b 满足 $a=b+n^{+}$, 则

$$a=b+n^{+}=(b+n)^{+}=b^{+}+n.$$

由假设得 $a=b^{+}+n\supset b^{+}\supset b$. 从而 $a\supset b$.

定理 1.9 自然数顺序“$>$”具有全序性,即对任何 $a,b\in\mathbf{N}$,a 与 b 之间必有且仅有下列三种关系之一:

$$a=b,\quad a>b,\quad b>a. \tag{①}$$

证明 先证"必有".

任意固定 $a\in\mathbf{N}$,令 M 是①式中必有一关系成立的一切 b 所组成的集合.

对于 $b=0$,若 $a=0$,则 $a=b$ 成立;若 $a\neq0$,则 $a=0+a=b+a$,于是 $a>b$. 因此 $0\in M$.

假定 $b\in M$,即在①式中必有一关系成立,则有三种情形:

i)$a=b$. 此时 $b^+=a^+=a+1$,于是 $b^+>a$.

ii)$a>b$. 此时存在不为 0 的 $k\in\mathbf{N}$,使 $a=b+k$. 若 $k=1$,则 $a=b^+$;若 $k\neq1$,存在不为 0 的自然数 m,使 $k=m^+$. 于是

$$a=b+k=b+m^+=(b+m)^+=b^++m,$$

故 $a>b^+$.

iii)$b>a$. 此时存在不为 0 的 $k\in\mathbf{N}$,使 $b=a+k$. 于是

$$b^+=(a+k)^+=a+k^+,$$

故 $b^+>a$.

这样,在 $b\in M$ 的假定下,我们得到 $b^+\in M$. 从而 $M=\mathbf{N}$.

再证"仅有".

假设①式中有两个关系成立,如 $a>b$ 与 $a=b$ 同时成立,则 $a\supset b$ 与 $a=b$ 同时成立. 这样我们得 $a\supset a$. 这是不可能的. 同理,$a=b$ 与 $b>a$ 不能同时成立;$a>b$ 与 $b>a$ 也不能同时成立.

定理 1.10 "$>$"具有传递性.

这是因为"$\supset$"具有传递性.

根据定义,$\mathbf{N}$ 上顺序关系"$>$"还具有以下两条性质:

定理 1.11 若 $a,b,c\in\mathbf{N}$ 则

i)当 $a=b$ 时,$a+c=b+c$;

ii)当 $a<b$ 时,$a+c<b+c$;

iii)当 $a>b$ 时,$a+c>b+c$.

定理 1.12 若 $a,b,c\in\mathbf{N}$,则

i)当 $a=b$ 时,$a\cdot c=b\cdot c$;