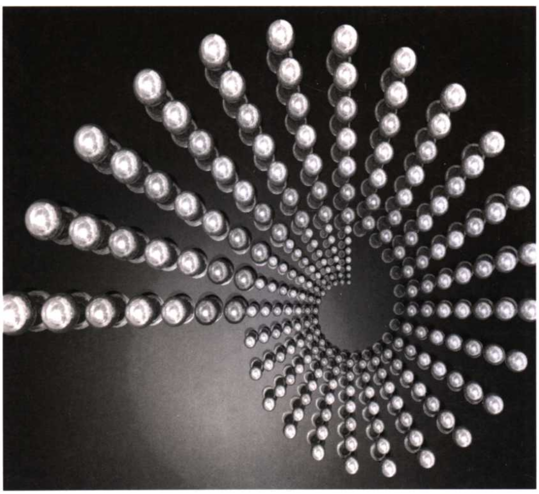
经典教材辅导用书
数学系列

高等代数
习题详解

高教版·《高等代数》（第四版）（张禾瑞　郝锕新编）

陈光大　编



华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

经典教材辅导用书·数学系列丛书

高等代数习题详解

高教版·《高等代数》(第四版)
(张禾瑞　郝锕新编)

陈光大　编

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等代数习题详解/陈光大　编

武汉:华中科技大学出版社,2006 年 7 月

ISBN 7-5609-3736-5

Ⅰ. 高…

Ⅱ. 陈…

Ⅲ. 高等代数-解题

Ⅳ. O15

高等代数习题详解　　陈光大　编

责任编辑:周芬娜　　封面设计:潘　群

责任校对:朱　霞　　责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社

武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87557437

录　排:武汉佳年华科技有限公司

印　刷:武汉市新华印刷有限责任公司

开本:850×1168　1/32　印张:12.875　字数:307 000

版次:2006 年 7 月第 1 版　印次:2006 年 7 月第 1 次印刷　定价:19.00 元

ISBN 7-5609-3736-5/O・390

内 容 简 介

本书对张禾瑞、郝钢新编的、高等教育出版社出版的《高等代数》(第四版)的全部习题作了详细解答，并在各章题解前对该章主要内容、知识要点进行了综合、简明、扼要的阐述与概括. 编排方式与教材一致. 全书思路清晰、理论严密、方法新颖、步骤详实，力图让读者获得科学的指导，同时感受切实的便利.

书末选编的大量的综合练习题与解答，视野广阔、内容精炼、构思巧妙，同样会给读者诸多补益.

本书适合高等师范及其它各类院校的学生学习高等代数、线性代数，也可供电大、函大、职大、教育学院、管理学院相关专业的学生和教师参考，还可作准备参加硕士研究生入学考试的考生的辅导书.

前　言

高等教育出版社出版的张禾瑞、郝钢新编的《高等代数》曾获国家教委高等学校优秀教材一等奖，长期以来在全国高等师范院校被广泛用作教科书.

本书对《高等代数》(第四版)中的习题作了详尽的解答. 作为教学辅助读物，希望能给广大读者的学习和使用带来帮助和便利.

本书的特点是：

1. 每章题解之前，对该章知识要点做了简明、扼要、综合的阐述，便于读者理解、回顾和掌握主要内容、知识要领和单元概貌；

2. 对新增题和其它部分习题给出了独立的全新的解答或解答方法，从中特别注意了科学的严密性和可接受性，一切分析论证都以所服务的教材及其它已学知识为依据和出发点；

3. 对各种与计算有关的问题，不仅给出结果，也给出周密的解答过程，以求更全面地揭示解题思路、方法与步骤，便于读者检查、比较和参考；

4. 对有多种解法的习题尽可能选用一种最优解法，对每题的解答都作过认真的检验和审校；

5. 书末选编了八套近一百道综合练习题及其全部解答，这些题都出自一些著名高校、科研院所的考试用题和全国历届考研试题，相信读者从中会得到有益的训练和启示.

本书编写过程中得到华中科技大学周芬娜同志和武汉科技学院黄光谷同志的热情帮助与指导，谨向他们致以深切的谢意.

由于时间仓促，水平所限，书中难免存在种种疏漏之处，恳请各位读者提出宝贵意见.

编　者

2006 年 2 月

目　　录

第一章 基本概念

知识要点

1. 适合一定条件的事物的全体称为**集**或**集合**. 组成集合的事物叫做该集合的**元素**. 如果a是集合A的元素，就说a**属于**A，记作$a\in A$；或者说A包含a，记作$A\ni a$. 否则，就说a**不属于**A，记作$a\notin A$；或者说A不包含a，记作$A\not\ni a$. 含有有限多个元素的集合称为**有限集合**，由无限多个元素组成的集合称为**无限集合**，不含任何元素的集合称为**空集**，记为$\varnothing$. 如果一个集合A是由一切具有某一性质的元素所组成的，就用记号$A=\{x\mid x$ 具有某一性质$\}$来表示.

如果集合A的每一元素都是集合B的元素，就说A是B的**子集**，记作$A\subseteq B$，或$B\supseteq A$. 约定空集是任意集合的子集. 如果集合A与B是由完全相同的元素组成的，就说A与B**相等**，记作$A=B$.

由集合A的一切元素和集合B的一切元素所组成的集合叫做A与B的**并集**，记作$A\cup B$；由集合A与B的公共元素所组成的集合叫做A与B的**交集**，记作$A\cap B$.

设A、B是两个集合，$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$称为$A$与$B$的**笛卡尔积**(简称积).

2. 设A、B是两个非空集合. A到B的一个**映射**指的是一个对应法则，通过这个法则，对于集合A中每一元素x，有集合B中一个唯一确定的元素y与它对应. 常用字母$f,g,\cdots$表示映射，用记号

$f:A\to B$表示f是A到B的一个映射. 如果通过映射f,与A中元素x对应的B中元素是y,就写为$f:x\mapsto y$,y叫做元素x在f之下的象,记作$f(x)$. A中一切x的象作成B的一个子集,用$f(A)$表示,即$f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$,它叫做**A在f之下的象**,或**映射f的象**. 如果$f(A)=B$,就称f是A到B上的一个**满射**. 如果对于A中任意两个元素x_1和x_2,只要$x_1\neq x_2$,就有$f(x_1)\neq f(x_2)$,就称f是A到B的一个**单射**. 如果$f:A\to B$既是满射,又是单射,就称f是A到B的**双射**. 如果存在集合A到B的一个双射,也说在A与B的元素之间存在着**一一对应**.

设$f:A\to B$是A到B的一个映射,$g:B\to C$是B到C的一个映射,规定$g\circ f:A\to C$;对一切$x\in A$,$(g\circ f)(x)=g(f(x))$. $g\circ f$称为f与g的**合成**.

若给定映射$f:A\to B$,$g:B\to C$,$h:C\to D$,那么$h\circ(g\circ f)$和$(h\circ g)\circ f$都是A到D的映射,且$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$.

设j_A、j_B分别是非空集合A、B上的**恒等映射**,令$f:A\to B$是集合A到B的一个映射,那么以下两个条件等价:(i) f是一个双射;(ii) 存在B到A的一个映射g,使得$g\circ f=j_A$,$f\circ g=j_B$. 并且当条件(ii)成立时,映射g是由f唯一确定的. 满足条件(ii)的映射$g:B\to A$叫做f的**逆映射**,记作f^{-1}.

设A是一个非空集合. $A\times A$到A的映射叫做集合A的一个**代数运算**.

3. 正整数集$\mathbf{N}^+$的任意一个非空子集S必含有一个最小数,也就是这样一个数$a\in S$,对于任意$c\in S$,都有$a\leqslant c$.

设有一个与正整数n有关的命题. 如果(i) 当$n=1$时,命题成立;(ii) 假设$n=k$时命题成立,则$n=k+1$时命题也成立;那么这个命题对于一切正整数n都成立. 这就是被广泛应用的**第一数学归纳法原理**. 至于第二数学归纳法原理,只要将上面的假定(ii)换

成“假定命题对于一切小于 k 的自然数成立，则命题对于 k 也成立”，其余不做任何改动即可得到.

4. 设 a,b 是两个整数. 如果存在一个整数 d，使得 $b=ad$，就说 a **整除** b（或 b 被 a 整除），用符号 $a|b$ 表示，这时 a 叫做 b 的一个**因数**，b 叫做 a 的一个**倍数**. 如果 a 不整除 b，就记作 $a\nmid b$. 整除有许多基本性质，如 $a|b$ 且 $b|a\Rightarrow b=a$ 或 $b=-a$ 等.

设 a,b 是整数且 $a\neq 0$，那么存在一对整数 q 和 r，使得 $b=aq+r$ 且 $0\leqslant r<|a|$. 满足以上条件的整数 q 和 r 是唯一确定的. q 和 r 分别称为 a 除 b 所得的**商**和**余数**.

设 a,b 是两个整数. 满足下列条件的整数 d 叫做 a 与 b 的一个**最大公因数**：(i) $d|a$ 且 $d|b$；(ii) 如果 $c\in\mathbf{Z}$，且 $c|a$，$c|b$，则 $c|d$. $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的最大公因数类似定义. 如果 d 是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的一个最大公因数，那么 $-d$ 也是一个最大公因数；$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的两个最大公因数至多相差一个符号，非负的那一个记作 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$. 如果 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)=1$，就说这 n 个整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ **互素**.

设 d 是整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的一个最大公因数，那么存在整数 $t_1,t_2,\cdots,t_n$，使得 $t_1a_1+t_2a_2+\cdots+t_na_n=d$. n 个整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 互素的充要条件是存在整数 $t_1,t_2,\cdots,t_n$，使得 $t_1a_1+t_2a_2+\cdots+t_na_n=1$.

一个正整数 $p>1$ 叫做**素数**，如果除 ± 1 和 $\pm p$ 外，没有其它的因数. 一个素数如果整除两个整数 a 与 b 的乘积，那么它至少整除 a 与 b 中的一个.

5. 设 S 是复数集 $\mathbf{C}$ 的一个非空子集. 如果对于 S 中任意两个数 a,b 来说，$a+b,a-b,ab$ 都在 S 内，那么就称 S 是一个**数环**. 设 F 是一个数环，又：(i) F 含有一个不等于零的数；(ii) 如果 $a,b\in F$，且 $b\neq 0$，则 $\frac{a}{b}\in F$；那么就称 F 是一个**数域**. 任何数域都包含有理数域 $\mathbf{Q}$.

习题解答

1.1 集 合

1. 设 $\mathbf{Z}$ 是一切整数的集合，X 是一切不等于零的有理数的集合. $\mathbf{Z}$ 是不是 X 的子集？

答 不是. 因为 $0\in\mathbf{Z}$，但 $0\notin X$.

2. 设 a 是集合 A 的一个元素. 记号 $\{a\}$ 表示什么？写法 $\{a\}\in A$ 对不对？

答 $\{a\}$ 表示仅有一个元素 a 构成的集合. $\{a\}\in A$ 写法不对，应为 $\{a\}\subseteq A$.

3. 设

$$A=\{x\mid x\in\mathbf{R},-1\leqslant x\leqslant 1\};$$
$$B=\{x\mid x\in\mathbf{R},x>0\};$$
$$C=\{x\mid x\in\mathbf{R},-1<x<2\};$$

写出 $A\cap(B\cup C)$ 和 $A\cup(B\cup C)$.

解 由 $B\cup C=\{x\mid x\in\mathbf{R},-1<x<+\infty\}$，进一步得到

$$A\cap(B\cup C)=\{x\mid x\in\mathbf{R},-1<x\leqslant 1\};$$
$$A\cup(B\cup C)=\{x\mid x\in\mathbf{R},-1\leqslant x<+\infty\}.$$

4. 写出含有四个元素的集合 $\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ 的一切子集.

解 共有 2^4 个子集. 它们是 $\varnothing$，$\{a_1\}$，$\{a_2\}$，$\{a_3\}$，$\{a_4\}$，$\{a_1,a_2\}$，$\{a_1,a_3\}$，$\{a_1,a_4\}$，$\{a_2,a_3\}$，$\{a_2,a_4\}$，$\{a_3,a_4\}$，$\{a_1,a_2,a_3\}$，$\{a_1,a_2,a_4\}$，$\{a_1,a_3,a_4\}$，$\{a_2,a_3,a_4\}$，$\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$.

5. 设 A 是含有 n 个元素的集合. A 中含有 k 个元素的子集共有多少个？

答 共有 $\binom{n}{k}$ 个.

6. 下列论断哪些是对的,哪些是错的?对于错的举出反例,并且把错误的论断改正过来.

(i) $x\in A\cup B$ 且 $x\notin A\Rightarrow x\in B$.

(ii) $x\in A$ 或 $x\in B\Rightarrow x\in A\cap B$.

(iii) $x\notin A\cap B\Rightarrow x\notin A$ 且 $x\notin B$.

(iv) $x\notin A\cup B\Rightarrow x\notin A$ 且 $x\notin B$.

解　(i)对.

(ii) 错. 例如,$A=\{1,2\}$,$B=\{2\}$,$1\in A$ 但 $1\notin A\cap B$. 应改为 $x\in A$ 或 $x\in B\Rightarrow x\in A\cup B$.

(iii) 错. 例如,A、B 同(ii)所设,$1\notin A\cap B$ 但 $1\in A$. 应改为 $x\notin A\cap B\Rightarrow x\notin A$ 或 $x\notin B$.

(iv) 对.

7. 证明下列等式:

(i) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$.

(ii) $A\cap(A\cup B)=A$.

(iii) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

证　(i) $x\in(A\cup B)\cup C\Rightarrow x\in A\cup B$ 或 $x\in C$. 当 $x\in C$ 时,$x\in B\cup C$,从而 $x\in A\cup(B\cup C)$;当 $x\in A\cup B$ 时,$x\in A$ 或 $x\in B$,即有 $x\in A$ 或 $x\in B\cup C$,从而 $x\in A\cup(B\cup C)$,故对任意 $x\in(A\cup B)\cup C$,总有 $x\in A\cup(B\cup C)$,于是

$$(A\cup B)\cup C\subseteq A\cup(B\cup C).$$

类似可证　$$A\cup(B\cup C)\subseteq(A\cup B)\cup C,$$

故　$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C).$$

(ii) 显然 $A\cap(A\cup B)\subseteq A$;又 $x\in A\Rightarrow x\in A\cup B$,所以 $x\in A\cap(A\cup B)$,于是 $A\subseteq A\cap(A\cup B)$,故 $A\cap(A\cup B)=A$.

(iii) $x\in A\cup(B\cap C)\Rightarrow x\in A$ 或 $x\in B\cap C$. 若 $x\in A$,则 $x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$,从而 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$;若 $x\in B\cap C$,则 $x\in$

B 且 $x\in C$，从而 $x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$，于是

$$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C),$$

这就证明了

$$A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

反之，若 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$，则 $x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$. 由此可知 $x\in A$，或者 $x\in B$ 且 $x\in C$，即 $x\in B\cap C$. 于是 $x\in A\cup(B\cap C)$，这就证明了

$$(A\cup B)\cap(A\cup C)\subseteq A\cup(B\cap C).$$

综合有

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

1.2 映　　射

1. 设 A 是前100个正整数所成的集. 找一个 A 到自身的映射，但不是满射.

解　令 $f:A\to A$，$f(x)=|x-50|+1$. 对任意 $x\in A$，有唯一 $f(x)\in A$ 与之对应，故 f 是 A 到自身的映射，但 $f(A)\neq A$. 例如，不存在 $x\in A$，使 $f(x)=100$，故 f 不是满射.

2. 找一个全体实数到全体正实数集的双射.

解　对任意 $x\in\mathbf{R}$，令 $f:x\mapsto 2^x$，则 f 是全体实数 $\mathbf{R}$ 到全体正实数 $\mathbf{R}^+$ 的映射. 若 $2^{x_1}=2^{x_2}$，则 $2^{x_1-x_2}=1\Rightarrow x_1=x_2$，所以 f 是单射；又对任意 $y\in\mathbf{R}^+$，存在 $x=\log_2 y\in\mathbf{R}$，使

$$f(x)=f(\log_2 y)=2^{\log_2 y}=y,$$

所以 f 是满射. 综上所述知 f 为双射.

3. $f:x\mapsto\dfrac{1}{x}$ 是不是全体实数集到自身的映射？

答　不是. 因为 $x=0$ 时，$f(0)$ 没有意义.

4. 设 f 定义如下：