

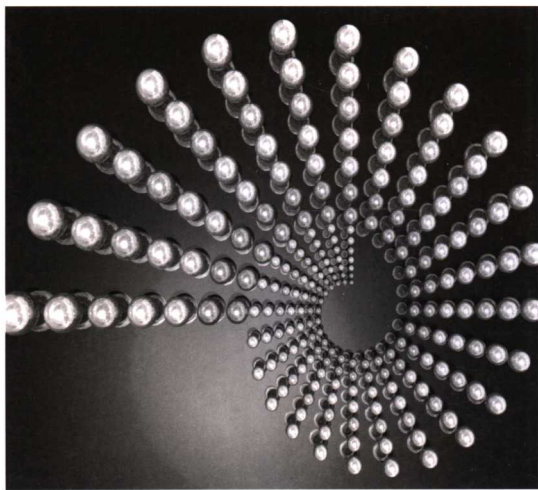


经典教材辅导用书
数学系列

高等代数 习题详解

高教版·《高等代数》(第四版)(张禾瑞 郝钢新编)

陈光大 编



华中科技大学出版社
<http://www.hustp.com>

经典教材辅导用书·数学系列丛书

高等代数习题详解

高教版·《高等代数》(第四版)

(张禾瑞 郝炳新编)

陈光大 编

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等代数习题详解/陈光大 编

武汉:华中科技大学出版社,2006年7月

ISBN 7-5609-3736-5

I. 高…

II. 陈…

III. 高等代数-解题

IV. O15

高等代数习题详解

陈光大 编

责任编辑:周芬娜

封面设计:潘 群

责任校对:朱 霞

责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社

武昌喻家山

邮编:430074

电话:(027)87557437

录 排:武汉佳年华科技有限公司

印 刷:武汉市新华印刷有限责任公司

开本:850×1168 1/32

印张:12.875

字数:307 000

版次:2006年7月第1版

印次:2006年7月第1次印刷

定价:19.00元

ISBN 7-5609-3736-5/O·390

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

内 容 简 介

本书对张禾瑞、郝钊新编的、高等教育出版社出版的《高等代数》(第四版)的全部习题作了详细解答,并在各章题解前对该章主要内容、知识要点进行了综合、简明、扼要的阐述与概括.编排方式与教材一致.全书思路清晰、理论严密、方法新颖、步骤详实,力图让读者获得科学的指导,同时感受切实的便利.

书末选编的大量的综合练习题与解答,视野广阔、内容精炼、构思巧妙,同样会给读者诸多补益.

本书适合高等师范及其它各类院校的学生学习高等代数、线性代数,也可供电大、函大、职大、教育学院、管理学院相关专业的学生和教师参考,还可作准备参加硕士研究生入学考试的考生的辅导书.

前 言

高等教育出版社出版的张禾瑞、郝炳新编的《高等代数》曾获国家教委高等学校优秀教材一等奖,长期以来在全国高等师范院校被广泛用作教科书。

本书对《高等代数》(第四版)中的习题作了详尽的解答. 作为教学辅助读物,希望能给广大读者的学习和使用带来帮助和便利.

本书的特点是:

1. 每章题解之前,对该章知识要点做了简明、扼要、综合的阐述,便于读者理解、回顾和掌握主要内容、知识要领和单元概貌;

2. 对新增题和其它部分习题给出了独立的全新的解答或解答方法,从中特别注意了科学的严密性和可接受性,一切分析论证都以所服务的教材及其它已学知识为依据和出发点;

3. 对各种与计算有关的问题,不仅给出结果,也给出周密的解答过程,以求更全面地揭示解题思路、方法与步骤,便于读者检查、比较和参考;

4. 对有多种解法的习题尽可能选用一种最优解法,对每题的解答都作过认真的检验和审校;

5. 书末选编了八套近一百道综合练习题及其全部解答,这些题都出自一些著名高校、科研院所的考试用题和全国历届考研试题,相信读者从中会得到有益的训练和启示.

本书编写过程中得到华中科技大学周芬娜同志和武汉科技学院黄光谷同志的热情帮助与指导,谨向他们致以深切的谢意.

由于时间仓促,水平所限,书中难免存在种种疏漏之处,恳请各位读者提出宝贵意见.

编 者

2006 年 2 月

目 录

第一章 基本概念	(1)
知识要点	(1)
习题解答	(4)
1.1 集合	(4)
1.2 映射	(6)
1.3 数学归纳法	(9)
1.4 整数的一些整除性质	(12)
1.5 数环和数域	(13)
第二章 多项式	(17)
知识要点	(17)
习题解答	(23)
2.1 一元多项式的定义和运算	(23)
2.2 多项式的整除性	(24)
2.3 多项式的最大公因式	(27)
2.4 多项式的分解	(38)
2.5 重因式	(40)
2.6 多项式函数 多项式的根	(44)
2.7 复数和实数域上多项式	(50)
2.8 有理数域上多项式	(53)
2.9 多元多项式	(56)
2.10 对称多项式	(58)
第三章 行列式	(64)
知识要点	(64)

习题解答	(67)
3.1 线性方程组和行列式	(67)
3.2 排列	(67)
3.3 n 阶行列式	(68)
3.4 子式和代数余子式 行列式的依行依列展开	(73)
3.5 克拉默法则	(81)
第四章 线性方程组	(87)
知识要点	(87)
习题解答	(93)
4.1 消元法	(93)
4.2 矩阵的秩 线性方程组可解的判别法	(99)
4.3 线性方程组的公式解	(104)
4.4 结式和判别式	(110)
第五章 矩阵	(118)
知识要点	(118)
习题解答	(122)
5.1 矩阵的运算	(122)
5.2 可逆矩阵 矩阵乘积的行列式	(128)
5.3 矩阵的分块	(136)
第六章 向量空间	(141)
知识要点	(141)
习题解答	(146)
6.1 定义和例子	(146)
6.2 子空间	(150)
6.3 向量的线性相关性	(153)
6.4 基和维数	(158)
6.5 坐标	(162)

6.6 向量空间的同构	(168)
6.7 矩阵的秩 齐次线性方程组的解空间	(168)
第七章 线性变换	(173)
知识要点	(173)
习题解答	(178)
7.1 线性映射	(178)
7.2 线性变换的运算	(183)
7.3 线性变换和矩阵	(187)
7.4 不变子空间	(193)
7.5 本征值和本征向量	(196)
7.6 可以对角化的矩阵	(208)
第八章 欧氏空间和酉空间	(216)
知识要点	(216)
习题解答	(220)
8.1 向量的内积	(220)
8.2 正交基	(224)
8.3 正交变换	(236)
8.4 对称变换和对称矩阵	(245)
8.5 酉空间	(251)
8.6 酉变换和对称变换	(255)
第九章 二次型	(262)
知识要点	(262)
习题解答	(265)
9.1 二次型和对称矩阵	(265)
9.2 复数域和实数域上的二次型	(270)
9.3 正定二次型	(278)
9.4 主轴问题	(282)

第十章 群、环和域简介	(288)
知识要点	(288)
习题解答	(291)
10.1 群	(291)
10.2 剩余类加群	(298)
10.3 环和域	(301)
附录 向量空间的分解和矩阵的若尔当标准形式	(311)
知识要点	(311)
习题解答	(315)
§1 向量空间的准素分解 凯莱-哈密顿定理	(315)
§2 线性变换的若尔当分解	(318)
§3 幂零矩阵的标准形式	(323)
§4 若尔当标准形式	(323)
综合练习题及解答	(328)
综合练习题	(328)
综合练习题(一)	(328)
综合练习题(二)	(330)
综合练习题(三)	(332)
综合练习题(四)	(334)
综合练习题(五)	(336)
综合练习题(六)	(338)
综合练习题(七)	(340)
综合练习题(八)	(342)
综合练习题解答	(344)
综合练习题(一)解答	(344)
综合练习题(二)解答	(351)
综合练习题(三)解答	(358)

综合练习题(四)解答.....	(364)
综合练习题(五)解答.....	(372)
综合练习题(六)解答.....	(378)
综合练习题(七)解答.....	(386)
综合练习题(八)解答.....	(393)
参考文献	(400)

第一章 基本概念

知识要点

1. 适合一定条件的事物的全体称为集或集合. 组成集合的事物叫做该集合的元素. 如果 a 是集合 A 的元素, 就说 a 属于 A , 记作 $a \in A$; 或者说 A 包含 a , 记作 $A \ni a$. 否则, 就说 a 不属于 A , 记作 $a \notin A$; 或者说 A 不包含 a , 记作 $A \not\ni a$. 含有有限多个元素的集合称为有限集合, 由无限多个元素组成的集合称为无限集合, 不含任何元素的集合称为空集, 记为 $\emptyset$. 如果一个集合 A 是由一切具有某一性质的元素所组成的, 就用记号 $A = \{x | x \text{ 具有某一性质}\}$ 来表示.

如果集合 A 的每一元素都是集合 B 的元素, 就说 A 是 B 的子集, 记作 $A \subseteq B$, 或 $B \supseteq A$. 约定空集是任意集合的子集. 如果集合 A 与 B 是由完全相同的元素组成的, 就说 A 与 B 相等, 记作 $A = B$.

由集合 A 的一切元素和集合 B 的一切元素所组成的集合叫做 A 与 B 的并集, 记作 $A \cup B$; 由集合 A 与 B 的公共元素所组成的集合叫做 A 与 B 的交集, 记作 $A \cap B$.

设 A, B 是两个集合, $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$ 称为 A 与 B 的笛卡尔积(简称积).

2. 设 A, B 是两个非空集合. A 到 B 的一个映射指的是一个对应法则, 通过这个法则, 对于集合 A 中每一元素 x , 有集合 B 中一个唯一确定的元素 y 与它对应. 常用字母 $f, g, \dots$ 表示映射, 用记号

$f: A \rightarrow B$ 表示 f 是 A 到 B 的一个映射. 如果通过映射 f , 与 A 中元素 x 对应的 B 中元素是 y , 就写为 $f: x \mapsto y$, y 叫做元素 x 在 f 之下的象, 记作 $f(x)$. A 中一切 x 的象作成 B 的一个子集, 用 $f(A)$ 表示, 即 $f(A) = \{f(x) | x \in A\}$, 它叫做 A 在 f 之下的象, 或映射 f 的象. 如果 $f(A) = B$, 就称 f 是 A 到 B 上的一个满射. 如果对于 A 中任意两个元素 x_1 和 x_2 , 只要 $x_1 \neq x_2$, 就有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 就称 f 是 A 到 B 的一个单射. 如果 $f: A \rightarrow B$ 既是满射, 又是单射, 就称 f 是 A 到 B 的双射. 如果存在集合 A 到 B 的一个双射, 也说在 A 与 B 的元素之间存在着——对应.

设 $f: A \rightarrow B$ 是 A 到 B 的一个映射, $g: B \rightarrow C$ 是 B 到 C 的一个映射, 规定 $g \circ f: A \rightarrow C$; 对一切 $x \in A$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. $g \circ f$ 称为 f 与 g 的合成.

若给定映射 $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$, $h: C \rightarrow D$, 那么 $h \circ (g \circ f)$ 和 $(h \circ g) \circ f$ 都是 A 到 D 的映射, 且 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

设 j_A, j_B 分别是非空集合 A, B 上的恒等映射, 令 $f: A \rightarrow B$ 是集合 A 到 B 的一个映射, 那么以下两个条件等价: (i) f 是一个双射; (ii) 存在 B 到 A 的一个映射 g , 使得 $g \circ f = j_A$, $f \circ g = j_B$. 并且当条件(ii)成立时, 映射 g 是由 f 唯一确定的. 满足条件(ii)的映射 $g: B \rightarrow A$ 叫做 f 的逆映射, 记作 f^{-1} .

设 A 是一个非空集合. $A \times A$ 到 A 的映射叫做集合 A 的一个代数运算.

3. 正整数集 N^+ 的任意一个非空子集 S 必含有一个最小数, 也就是这样一个数 $a \in S$, 对于任意 $c \in S$, 都有 $a \leq c$.

设有一个与正整数 n 有关的命题. 如果 (i) 当 $n=1$ 时, 命题成立; (ii) 假设 $n=k$ 时命题成立, 则 $n=k+1$ 时命题也成立; 那么这个命题对于一切正整数 n 都成立. 这就是被广泛应用的第一数学归纳法原理. 至于第二数学归纳法原理, 只要将上面的假定(ii)换

成“假定命题对于一切小于 k 的自然数成立,则命题对于 k 也成立”,其余不做任何改动即可得到.

4. 设 a, b 是两个整数. 如果存在一个整数 d ,使得 $b=ad$,就说 a 整除 b (或 b 被 a 整除),用符号 $a|b$ 表示,这时 a 叫做 b 的一个因数, b 叫做 a 的一个倍数. 如果 a 不整除 b ,就记作 $a \nmid b$. 整除有许多基本性质,如 $a|b$ 且 $b|a \Rightarrow b=a$ 或 $b=-a$ 等.

设 a, b 是整数且 $a \neq 0$,那么存在一对整数 q 和 r ,使得 $b=aq+r$ 且 $0 \leq r < |a|$. 满足以上条件的整数 q 和 r 是唯一确定的. q 和 r 分别称为 a 除 b 所得的商和余数.

设 a, b 是两个整数. 满足下列条件的整数 d 叫做 a 与 b 的一个最大公因数: (i) $d|a$ 且 $d|b$; (ii) 如果 $c \in \mathbb{Z}$, 且 $c|a, c|b$, 则 $c|d$. $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的最大公因数类似定义. 如果 d 是 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的一个最大公因数, 那么 $-d$ 也是一个最大公因数; $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的两个最大公因数至多相差一个符号, 非负的那一个记作 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. 如果 $(a_1, a_2, \dots, a_n)=1$, 就说这 n 个整数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 互素.

设 d 是整数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的一个最大公因数, 那么存在整数 $t_1, t_2, \dots, t_n$, 使得 $t_1a_1+t_2a_2+\dots+t_na_n=d$. n 个整数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 互素的充要条件是存在整数 $t_1, t_2, \dots, t_n$, 使得 $t_1a_1+t_2a_2+\dots+t_na_n=1$.

一个正整数 $p>1$ 叫做素数, 如果除 ± 1 和 $\pm p$ 外, 没有其它的因数. 一个素数如果整除两个整数 a 与 b 的乘积, 那么它至少整除 a 与 b 中的一个.

5. 设 S 是复数集 $\mathbb{C}$ 的一个非空子集. 如果对于 S 中任意两个数 a, b 来说, $a+b, a-b, ab$ 都在 S 内, 那么就称 S 是一个数环. 设 F 是一个数环, 又: (i) F 含有一个不等于零的数; (ii) 如果 $a, b \in F$, 且 $b \neq 0$, 则 $\frac{a}{b} \in F$; 那么就称 F 是一个数域. 任何数域都包含有理数域 $\mathbb{Q}$.

习题解答

1.1 集 合

1. 设 Z 是一切整数的集合, X 是一切不等于零的有理数的集合. Z 是不是 X 的子集?

答 不是. 因为 $0 \in Z$, 但 $0 \notin X$.

2. 设 a 是集合 A 的一个元素. 记号 $\{a\}$ 表示什么? 写法 $\{a\} \in A$ 对不对?

答 $\{a\}$ 表示仅有一个元素 a 构成的集合. $\{a\} \in A$ 写法不对, 应为 $\{a\} \subseteq A$.

3. 设
$$A = \{x | x \in \mathbf{R}, -1 \leq x \leq 1\};$$
$$B = \{x | x \in \mathbf{R}, x > 0\};$$
$$C = \{x | x \in \mathbf{R}, -1 < x < 2\};$$

写出 $A \cap (B \cup C)$ 和 $A \cup (B \cup C)$.

解 由 $B \cup C = \{x | x \in \mathbf{R}, -1 < x < +\infty\}$, 进一步得到

$$A \cap (B \cup C) = \{x | x \in \mathbf{R}, -1 < x \leq 1\};$$

$$A \cup (B \cup C) = \{x | x \in \mathbf{R}, -1 \leq x < +\infty\}.$$

4. 写出含有四个元素的集合 $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 的一切子集.

解 共有 2^4 个子集. 它们是 $\emptyset, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_4\}, \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_1, a_4\}, \{a_2, a_3\}, \{a_2, a_4\}, \{a_3, a_4\}, \{a_1, a_2, a_3\}, \{a_1, a_2, a_4\}, \{a_1, a_3, a_4\}, \{a_2, a_3, a_4\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$.

5. 设 A 是含有 n 个元素的集合. A 中含有 k 个元素的子集共有多少个?

答 共有 $\binom{n}{k}$ 个.

6. 下列论断哪些是对的, 哪些是错的? 对于错的举出反例, 并且把错误的论断改正过来.

(i) $x \in A \cup B$ 且 $x \notin A \Rightarrow x \in B$.

(ii) $x \in A$ 或 $x \in B \Rightarrow x \in A \cap B$.

(iii) $x \notin A \cap B \Rightarrow x \notin A$ 且 $x \notin B$.

(iv) $x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A$ 且 $x \notin B$.

解 (i) 对.

(ii) 错. 例如, $A = \{1, 2\}, B = \{2\}, 1 \in A$ 但 $1 \notin A \cap B$. 应改为 $x \in A$ 或 $x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$.

(iii) 错. 例如, A, B 同(ii)所设, $1 \notin A \cap B$ 但 $1 \in A$. 应改为 $x \notin A \cap B \Rightarrow x \notin A$ 或 $x \notin B$.

(iv) 对.

7. 证明下列等式:

(i) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

(ii) $A \cap (A \cup B) = A$.

(iii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

证 (i) $x \in (A \cup B) \cup C \Rightarrow x \in A \cup B$ 或 $x \in C$. 当 $x \in C$ 时, $x \in B \cup C$, 从而 $x \in A \cup (B \cup C)$; 当 $x \in A \cup B$ 时, $x \in A$ 或 $x \in B$, 即有 $x \in A$ 或 $x \in B \cup C$, 从而 $x \in A \cup (B \cup C)$, 故对任意 $x \in (A \cup B) \cup C$, 总有 $x \in A \cup (B \cup C)$, 于是

$$(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C).$$

类似可证

$$A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C,$$

故

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

(ii) 显然 $A \cap (A \cup B) \subseteq A$; 又 $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$, 所以 $x \in A \cap (A \cup B)$, 于是 $A \subseteq A \cap (A \cup B)$, 故 $A \cap (A \cup B) = A$.

(iii) $x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow x \in A$ 或 $x \in B \cap C$. 若 $x \in A$, 则 $x \in A \cup B$ 且 $x \in A \cup C$, 从而 $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$; 若 $x \in B \cap C$, 则 $x \in$

B 且 $x \in C$, 从而 $x \in A \cup B$ 且 $x \in A \cup C$, 于是

$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

这就证明了

$$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

反之, 若 $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, 则 $x \in A \cup B$ 且 $x \in A \cup C$. 由此可知 $x \in A$, 或者 $x \in B$ 且 $x \in C$, 即 $x \in B \cap C$. 于是 $x \in A \cup (B \cap C)$, 这就证明了

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C).$$

综合有

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

1.2 映 射

1. 设 A 是前 100 个正整数所成的集. 找一个 A 到自身的映射, 但不是满射.

解 令 $f: A \rightarrow A, f(x) = |x - 50| + 1$. 对任意 $x \in A$, 有唯一 $f(x) \in A$ 与之对应, 故 f 是 A 到自身的映射, 但 $f(A) \neq A$. 例如, 不存在 $x \in A$, 使 $f(x) = 100$, 故 f 不是满射.

2. 找一个全体实数到全体正实数集的双射.

解 对任意 $x \in \mathbf{R}$, 令 $f: x \mapsto 2^x$, 则 f 是全体实数 $\mathbf{R}$ 到全体正实数 $\mathbf{R}^+$ 的映射. 若 $2^{x_1} = 2^{x_2}$, 则 $2^{x_1 - x_2} = 1 \Rightarrow x_1 = x_2$, 所以 f 是单射; 又对任意 $y \in \mathbf{R}^+$, 存在 $x = \log_2 y \in \mathbf{R}$, 使

$$f(x) = f(\log_2 y) = 2^{\log_2 y} = y,$$

所以 f 是满射. 综上所述知 f 为双射.

3. $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ 是不是全体实数集到自身的映射?

答 不是. 因为 $x = 0$ 时, $f(0)$ 没有意义.

4. 设 f 定义如下: