湖南师范学院数学函授专修科

代数自学指导

（下 册）

王孝迪编

湖南人民出版社

編号：(湘)1891

湖南师范学院数学函授专修科

代数自学指导（下册）

編　者：王　孝　達

出版者：湖南人民出版社
（湖南省书刊出版业营业許可証出字第一号）
長沙市新村路

印刷者：湖南省新生印刷厂
長沙市[illegible]

发行者：湖南省新华书店

开本：787×1092毫 1/32　　1959年10月第一版

印张：4 3/4　　1959年10月第2次印刷

字数：102,000　　印数：5,991—28,000

统一书号：7109·347

定价：(7)四角二分

説　明

这本代数自学指导是为了中等学校的教师們自学湖南师范学院函授专修科講义代数課本下册而写的，在每一章里，首先对代数課本的一章內容作了概括的介紹，使讀者知道每章主要內容是什么。接着指出了每节的主要內容，提出学习每节的要求，对每节的难点和疑点作了說明解释，适当地添了一些例子，有时候联系到中学教材。最后改正了代数課本里的錯誤，附有学习每节的思考題和練习題。

亲爱的讀者們：我希望通过这本書的学习能对讀者們在代数課本的学习中有所帮助，但这本書还是第一次印刷，由于时間忽忙，加之我的水平有限，缺点和錯誤一定很多，不能滿足讀者的要求。因此我迫切地誠懇地希望讀者們随时向我提出意見，以便进一步修改，使这本書发揮应有的作用。

編　者 于1959年8月1日

目　录

第六章 綫性方程組

一 全章主要內容

这章主要內容是研究含有未知数的个数与方程的个数相等的一次方程組，并且它的系数行列式不为零的。但实际上，我們常会遇到系数行列式等于零，以及方程的个数与未知数的个数不相等的情形，我們这章研究的綫性方程組不是一般的綫性方程組，是特殊的綫性方程組。所以一般地討論綫性方程組主要的是判定一个方程組是否有解，假如有解，确定解的个数并求出一切解来。关于这些普遍的理論將在高等代数里討論。我們这一章里，只討論方程的个数等于未知数的个数，而且仅有一个解的特殊情形。

首先是一般地解二元一次方程組与三元一次方程組，从而引入二阶和三阶的行列式的概念，用行列式表达出二元一次方程組和三元一次方程組的一般解的形式，所以行列式的概念起源于解含有两个或三个未知数的綫性方程組。于是应用行列式，根据克萊姆規則，可以求出二元一次方程組和三元一次方程組的解，这种求解法是比較簡便的。

我們为了研究方程組的未知数的个数与方程的个数不只限于 2 个或 3 个的情況，就把二阶与三阶行列式的概念推广到 n 阶行列式，我們必須学习关于有限集合的一些概念和性質，因而引入了关于排列的反序及对換的概念与研究它們的性質，而它們也就是行列的理論基礎。n 阶行列式是本章中最重要的概念

之一，必須深入理解并掌握它的基本性質。

直接应用 n 阶行列式的定义和其性質来計算行列式显然是很繁难的，特别是对 n 的較大的数值，因此我們引入了子式及代数余子式的概念，并研究了行列式的各种展开法。这样一来，就可以把 n 阶行列式化为較低阶的行列式来表出。我們应当很好的掌握这些方法并且熟練地应用它們去計算行列式。

最后，我們应用 n 阶行列式的理論去解系数行列式不为零的含 n 个未知数与 n 个方程的綫性方程組，而这个特殊情况的研究是高等代数里討論綫性方程組一般情况的基础。

二 各节主要內容、学习要求和課文說明

§1. 二阶和三阶行列式

(一)主要內容：这一节是一般地解二元一次方程組与三元一次方程組，从而导出二阶和三阶行列式的概念，用行列式表达出二元一次方程組及三元一次方程組的一般解的形式。于是得到了关于两个未知数两个方程的綫性方程組之求解法則（克萊姆法則）和三个未知数三个方程的綫性方程組之求解法則（克萊姆法則）。

(二)学习要求：学习这节后，能够熟練地用行列式求二元一次方程組与三元一次方程組的解。

(三)課文說明：

1.我們要弄清楚方程或方程組的解是什么意思。所謂方程的解，是使方程左右两边的值相等的未知数的值，叫做这个方程的解，即是能滿足方程的未知数的值叫做所給方程的解。含有一

个未知数的方程的解也叫做方程的根。求方程的根或者确定方程沒有根的过程,叫做解方程。所謂方程組的解,是方程組里各个方程的公共解,叫做这个方程組的解,即是能滿足方程組的未知数的值叫做所給方程組的解。求方程組的解或者确定方程組沒有解的过程,叫做解方程組。

2.課本里第2頁解方程組$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases}$的过程实际上就是中学課本里的消去法。

3.所謂二阶行列式$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$就是指式子:

$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$,三阶行列式$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$就是指式子:

$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$。用行列式这个形式(符号)来表示这个式子,是为了記忆方便。我們用两个足碼来区别行列式里的文字(元素),也是为了書写和記忆的方便。第一个足碼是指这个文字所在的行,第二个足碼是指这个文字所在的列。很明显地看出,綫性方程組的每个文字系数也用两个足碼是为着書写和記忆方程組的系数行列式的方便;对方程組来説,第一个足碼是指这个文字系数是方程組的那个方程的系数,第二个足碼是指这个文字系数是所在方程里那个未知数的系数。

4.解綫性方程組$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}$时,要同时

消去 x_2 和 x_3，就以 $a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}$、$a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33}$、$a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}$分别乘第一、第二、第三个方程，而后将三个方程相加呢？因为从方程組消去两个未知数 x_2 和 x_3 。用 l、m、n 顺次乘原有的三个方程并相加，要决定所导入的乘数，使得 x_2 和 x_3 的系数都等于零。这样一来，首先得到：

$$(a_{11}l+a_{21}m+a_{31}n)x_1+(a_{12}l+a_{22}m+a_{32}n)x_2+$$
$$(a_{13}l+a_{23}m+a_{33}n)x_3=b_1l+b_2m+b_3n_{\circ}$$

令

$$\left.\begin{array}{l} a_{12}l+a_{22}m+a_{32}n=0 \\ a_{13}l+a_{23}m+a_{33}n=0 \end{array}\right\} \qquad (A)$$

便得到方程

$$(a_{11}l+a_{21}m+a_{31}n)x_1=b_1l+b_2m+b_3n_{\circ} \qquad (B)$$

把方程組(A)的 n 的项移到右边，得：

$$\left.\begin{array}{l} a_{12}l+a_{22}m=-a_{32}n \\ a_{13}l+a_{23}m=-a_{33}n \end{array}\right\} \qquad (C)$$

就 l 和 m 求出方程組(C)的解（用克莱姆规則），得

$$\therefore\ l=\frac{\begin{vmatrix} -a_{32}n & a_{22} \\ -a_{33}n & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}}=\frac{a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}}{a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}}n,$$

$$m=\frac{\begin{vmatrix} a_{12} & -a_{32}n \\ a_{13} & -a_{33}n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}}=\frac{a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33}}{a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}}n,$$

式中n是任意的。

故

$$\frac{l}{a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}}=\frac{m}{a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33}}$$

$$=\frac{n}{a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}}=k,$$

式中k是任意的比例因数，我們不妨取定$k=1$，那末得：

$$l=a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32},\ m=a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33},$$

$$n=a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}。$$

把这些值代入方程(B)，即得課本第5頁等式(7)。这就答复了前面所提出的問題。我們还可解释如下：

5、課本第4頁解綫性方程組

$$(6)\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 & (1)\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 & (2)\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 & (3)\end{cases}$$

用数$a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}$，$a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33}$，$a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}$分别乘(1)、(2)、(3)，而后把三个方程相加，则x_2和x_3都被消去。为什么呢？請見下面的解釋。

解　由方程組消去x_2和x_3，可分成下面的两步。

第一步，消去x_3。

由(1)和(2)消去x_3：(1)a_{23}－(2)a_{13}，得

$$(a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21})x_1+(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})x_2$$
$$=b_1a_{23}-b_2a_{13} \qquad (4)$$

由(2)和(3)消去x_3：(2)a_{33}－(3)a_{23}，得

$$(a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23})x_1+(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})x_2$$

$$=b_2a_{33}-b_3a_{23} \qquad (5)$$

第二步，消去 x_2，即由(4)和(5)消去 x_2:

(4)$(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})-(5)(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})$，得

$$[(a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21})(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})-(a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23})(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})]\,x_1=(b_1a_{23}-b_2a_{13})(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})-(b_2a_{33}-b_3a_{23})(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})$$

去小括号，以 a_{23} 除两边，得

$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})x_1=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32}$$

上式就是課本第5頁的(7)式。現在我們来研究怎样将上面消去 x_2 和 x_3 的两步手續合并为一步。

設 f_1, f_2, f_3 分别表示(1),(2),(3)式左边的式子，則原方程組(6)可以写为

$$\begin{cases} f_1=b_1 & (1') \\ f_2=b_2 & (2') \\ f_3=b_3 & (3') \end{cases}$$

前面第一步里的(4),(5)式可以写为

$$f_1a_{23}-f_2a_{13}=b_1a_{23}-b_2a_{13} \qquad (4')$$

$$f_2a_{33}-f_3a_{23}=b_2a_{33}-b_3a_{23} \qquad (5')$$

第二步里的第一个等式可以写为

$$[(f_1a_{23}-f_2a_{13})(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})-(f_2a_{33}-f_3a_{23})(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})]\,x_1=(b_1a_{23}-b_2a_{13})(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})-(b_2a_{33}-b_3a_{23})(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})$$

即 $a_{23}[f_1(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})+f_2(a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33})+f_3(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})]\,x_1=a_{23}[b_1(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})+b_2$

$(a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33})+b_3(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})]$

故 $f_1(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})+f_2(a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33})+f_3(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})=b_1(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})+b_2(a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33})+b_3(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})$

很容易看出，这个方程是用数 $a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}$, $a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33}$, $a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}$ 分別乘(1′),(2′),(3′) 方程，而后把所得的三个方程相加得来的，且它里只能含 x_1 不含 x_2 和 x_3。因此我們得出結論，用数 $a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}$, $a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33}$, $a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}$分別乘方程組(6)的(1),(2),(3)三个方程，而后把所得的三个方程相加，則 x_2 和 x_3 都被消去，得含 x_1 的方程。

【附】改課本的錯誤

1.課本第 1 頁倒数第 6 行，n 的前面"1"字改为","，把 n 写上一点。

2.課本第 2 頁第 8 行，阶三之間添"和"字。

3.課本第 5 頁第 5 行，数确之間添"所"字，定我之間添"的，"。

4.課本第 6 頁倒数第 2 行，"絕对"两字改为"常数"。

〔附〕思考題

1.引入行列式的概念有什么作用？

2.怎样計算二阶和三阶行列式？

3.用行列式解方程組比中学数学課本里常用的消去法是繁一点还是簡便一点？

4.叙述克莱姆规则。

〔附〕練习題

利用行列式解下列方程組

1. $5x+2y=3$, $11x-7y=1$;

2. $x\cos\alpha-y\sin\alpha=a$, $x\sin\alpha+y\cos\alpha=b$;

3. $x-2y=0$, $y-2x+3=0$;

4. $x+y-2z=-3$, $5x-2y+7z=22$, $2x-5y+4z=4$;

5. $bx-ay+2ab=0$, $-2cy+2bz-bc=0$, $cx+az=0$。

§2. 排 列

(一)主要内容：在上一节里，我們由解两个未知数和三个未知数的綫性方程組引出了二阶和三阶行列式，并且看到，利用行列式来解綫性方程組是很方便的。因此就会自然地想到，是否可以定义四阶及更高阶的行列式，使得四元及更多元的綫性方程組(系数行列式不为零时)的解，也象二元和三元的綫性方程組的解一样用行列式表达出它們的一般解的形式。是可以的，这正是我們后面几节中所要討論的。四阶行列式是24个乘积的代数和，式子非常复杂，更高阶行列式当然更复杂，如果也象对二阶和三阶行列式那样从解綫性方程組引出，計算非常麻煩；此外，对任何阶的行列式都研究一番，也是不可能的。因此必須經过另外的方法，先分析怎样定义一般的n阶行列式，即对

于二阶和三阶行列式作进一步的研究，而得出它們的构造規律。利用这些規律，就可以定义n阶行列式。然后再根据行列式的性質来說明这样定义行列式确能用来解綫性方程組。为了要在下一节引入n阶行列式的概念，首先在这一节里引入反序及对换的概念，它是行列式的理論基础。

（二）学习要求：这一节我們要求①懂得排列、排列的反序数、排列的偶奇性、对换等的意义。②了解对换它对排列的奇偶性所起的作用，排列中的偶排列和奇排列的个数。

（三）課文說明：

1.什么叫代数和？在中学代数里，我們已經約定(规定)，若干个数相加减的运算，按照它們写成的順序来进行。所有不按照这种順序进行的运算都放在括号里来表明。

記录若干个按照順序进行加减法运算的代数式叫做代数和。

就形式来看，代数和是由几个代数式(数目、字母或是更复杂的式子）用+号和－号相联結起来的。

式子$2-3-4+8-7$，$a-b-c+d+e$等等，就可以用来作为代数和的例。

因为减去一个数就等于加上和这个数相反的数，把代数和的减数用和它相反的数来代替，减法运算就可以用加法运算来代替。因此任何代数和都可以写成和的形式。例如：

$$2-3-4+8-7$$
$$=2+(-3)+(-4)+8+(-7),$$
$$a-b-c+d+e$$
$$=a+(-b)+(-c)+d+e,$$

$$2-a+3-5+b=2+(-a)+3+(-5)+b。$$

在这样的写法中，所有的减数都代以和它相反的加数。

代数和的加数以及与减数相反的加数都叫做代数和的項。例如，代数和$a-b-c+d+e$的項就是a，$-b$，$-c$，d和e。

代数和就是它自己的各項的和。根据加法的变换律和結合律，代数和的各項可以按照任何順序安排，并且可以用括号把它們括起来。例如：

$$a-b-c+d+e=a+d+e-b-c$$
$$=a+e-c+d-b=(a+e-c)+(d-b)$$等等。

上述的代数和的性質，运用来計算所給的代数和的值非常方便。例如：

$$2-3-4+8-7=(2+8)+(-3-4-7)$$
$$=10+(-14)=-4。$$

2. n个不同的数碼的不同的排列共有$1\cdot2\cdot\cdots\cdots\cdot n$个，为什么是这样多？讀者可以复习高中代数就会懂得。事实上，在作n个数碼的一个排碼的一个排列时，第一位置的数碼可以取这n个数碼中的任何一个，所以有n种可能；当第一位置的数碼取定后，第二位置的数碼只能在其余$n-1$个数碼中选取，所以只有$n-1$种可能。因此第一、第二位置的数碼共有$n(n-1)$种不同的选法。这样下去，共有$n(n-1)(n-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1=n!$个不同的排列。

排列的反序数不是排列的絕对性質。实际上，排列的反序数是对某一标准排列的順序而言的。例如我們說排列312有二个反

序数，这是对标准的自然顺序而言的。如果首先沒有編出 n 个东西的标准顺序，那就无法确定这 n 个东西的排列的反序数。例如以張王李三字作排列，張王李或李張王，就无法确定它們的反序数。

标准顺序改变时，排列的反序数显然也要改变。例如以123为标准顺序时，排列321的反序数是 3，若以213为标准顺序，則排列321的反序数为 2。課本里所指的反序数都是指在以自然顺序123……n 为标准顺序的反序数。

計算反序数可以按課本上方法計算，也可以用下面的方法来算：在某排列

$$i_1 i_2 i_3 \cdots\cdots i_n$$

中，設在 i_1 的前面有 m_1 个数比 i_1 大，在 i_2 的前面有 m_2 数个比 i_2 大，在 i_3 的前面有 m_3 数个比 i_3 大……，在 i_n 的前面有 m_n 个数比 i_n 大，則反序数为 $m_1+m_2+m_3+\cdots\cdots+m_n$。例如排列

$$\begin{array}{cccccccc} 8 & 3 & 5 & 7 & 1 & 6 & 2 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 4 & 2 & 5 & 4 \end{array}$$

故反序数为 $0+1+1+1+4+2+5+4=18$，这个排列是偶排列。

3. 課本第 11 頁第 7、8 兩行指出了将排列进行对換的一个性質：利用对換，常常可以把一个排列变成同样数碼的另外任何一个排列。課本里接着举了一个例子来說明。为什么有这一个性質呢？因为由原排列的前面开始，根据需要做对換，由于数碼（元素）的个数是有限的，显然經过有限次对換，即可得到我們所要求的排列。把排列3 4 5 6 8 7 1 2变成排列8 1 7 2 5 4 3 6

所要經过的一些对換可用下法表示：

$$3\,4\,5\,6\,8\,7\,1\,2 \xrightarrow{(3,8)} 8\,4\,5\,6\,3\,7\,1\,2 \xrightarrow{(4,1)}$$

$$8\,1\,5\,6\,3\,7\,4\,2 \xrightarrow{(5,7)} 8\,1\,7\,6\,3\,5\,4\,2 \xrightarrow{(2,6)}$$

$$8\,1\,7\,2\,3\,5\,4\,6 \xrightarrow{(3,5)} 8\,1\,7\,2\,5\,3\,4\,6 \xrightarrow{(4,3)}$$

$$8\,1\,7\,2\,5\,4\,3\,6。$$

4.課本第12頁，定理1的証明分成两步，1°証明了相邻两个数碼对換使排列的奇偶性改变(即奇排列变成偶排列，偶排列变成了奇排列)；2°証明了任一对換都可以用連續施行奇数个相邻数碼的对換而得。例如

$$5\,3\,1\,2\,4 \xrightarrow{(2,5)} 2\,3\,1\,5\,4。$$

它可以用連續施行相邻数碼的对換而得：

$$5\,3\,1\,2\,4 \xrightarrow{(5,3)} 3\,5\,1\,2\,4 \xrightarrow{(5,1)} 3\,1\,5\,2\,4$$

$$\xrightarrow{(5,2)} 3\,1\,2\,5\,4 \xrightarrow{(1,2)} 3\,2\,1\,5\,4 \xrightarrow{(3,2)} 2\,3\,1\,5\,4。$$

一共施行了5个相邻数碼的对換。

5.課本第13頁定理2的証明，首先証明两个不同的排列通过同一对換所得的排列一定也不相同，这是若两个不同的排列通过同一对換例如(1,2)所得的排列相同，則将所得的两个相同的排列通过原来同一对換例如(1,2)还原为原来的两个排列，显然是相同的，这与原来两个排列不相同矛盾。其次証明在n个不同数碼的$n!$个排列中的奇排列的个数p和偶排列的个数q是相等的。先証明奇排列个数不可能比偶排列个数多，因为假如奇排列个数p比偶排列个数q要多，$p>q$。則把这p个奇排列都