大学数学的内容、方法与技巧丛书

配合东北师大数学系《常微分方程》

常微分方程
内容、方法与技巧

孙清华　李金兰　孙　昊

Changweifen Fangcheng Neirong Fangfa Yu Jiqiao

华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

常微分方程

内容、方法与技巧

Changweifen Fangcheng

Neirong Fangfa Yu

Jiqiao

大学数学的内容、方法与技巧丛书

常微分方程
内容、方法与技巧

孙清华　李金兰　孙　昊

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程　内容、方法与技巧/孙清华　李金兰　孙　昊
武汉:华中科技大学出版社,2006年12月
ISBN 7-5609-3899-X

Ⅰ. 常…
Ⅱ. ①孙…　②李…　③孙…
Ⅲ. 常微分方程-高等学校-自学参考资料
Ⅳ. O175.1

常微分方程　内容、方法与技巧　　孙清华　李金兰　孙　昊

策划编辑:徐正达
责任编辑:余　涛　　封面设计:刘　卉
责任校对:刘　竣　　责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87557437

录　　排:武汉佳年华科技有限公司
印　　刷:湖北鄂东印务有限公司

开本:850×1168　1/32　印张:13.125　字数:317 000
版次:2006年12月第1版　印次:2006年12月第1次印刷　定价:17.80元
ISBN 7-5609-3899-X/O·405

内 容 简 介

本书是大学数学的内容、方法与技巧丛书之一，对常微分方程的主要内容、基本方法与常用技巧进行了全面的讨论与分析，用大量的例题对所讨论的内容与方法作了演示与论证. 全书的内容包括初等积分法、基本定理、线性微分方程、线性微分方程组、定性与稳定性概念及一阶偏微分方程. 本书用简明易懂、通俗流畅的语言深入浅出地诠释概念、解析疑难、演绎方法与技巧，帮助读者理解与熟悉常微分方程的基本概念与理论，培养读者运用常微分方程方法分析问题与解决问题的能力. 本书与教材同步，在方法与技巧上略有拓宽与提高，是大学生、工程技术人员与经济分析人员必备的、读之有益的一本好书.

前 言

常微分方程是数学的一个分支,在工程技术领域、经济分析领域及其他许多学科领域中有广泛的应用并显示出十分重要的作用. 它常常既是研究的起点,又是基本的工具. 因此,理解与熟悉常微分方程的基本理论,掌握解决常微分方程的基本方法,熟练求解常微分方程问题的常用技巧是非常必要的. 本书就是为帮助读者克服学习中的困难,尽可能更好地获取本门课程的精髓而编写的.

本书按章节编排,分为主要内容、疑难解析和方法、技巧与典型例题分析三个部分. 主要内容包括初等积分法、基本定理、线性微分方程、线性微分方程组、定性与稳定性概念及一阶偏微分方程,基本依据东北师范大学数学系编写、高等教育出版社出版的《常微分方程》凝炼归纳. 疑难解析部分则考虑到读者在学习过程中可能遇到的关于理论与方法的各种问题,进行了认真的分析解答. 方法、技巧与典型例题分析部分不仅对所选教材中的习题作了全面完整的解答外,还补充了大量的、典型的例题,对常微分方程的基本方法与常用技巧作了演绎叙述,使本书的内容比教材有所提高与拓宽. 在本书的编写中,作者力求以简明易懂、通俗流畅的语言深入浅出地诠释概念、解析疑难、展示方法与演绎技巧,帮助读者理解与熟悉常微分方程的基本概念与理论,培养读者运用常微分方程方法分析问题与解决问题的实际能力. 相信本书能成为大学生、研究生、工程技术人员感受到开卷有益的好书.

本书在编写过程中参阅了其他有关著作,在此向这些著作的

作者们表示诚挚的谢意.本书得以出版,还要感谢华中科技大学出版社领导与编辑的大力支持,编辑与出版人员为本书做了大量的精细的工作,使本书能较好地奉献给读者.

由于学识与水平所限,错漏之处在所难免,恳请读者批评指正.

作　者

2006 年 5 月

目 录

第一章 初等积分法

某些类型的微分方程的求解问题能够化为初等函数的积分问题，用积分的方法求微分方程的解，称为初等积分法. 本章将介绍一些可用初等积分法求解微分方程的类型及其方法与技巧.

第一节 微分方程与解

主要内容

1. 联系自变量、未知函数以及未知函数的某些导数(或微分)之间的关系式称为**微分方程**.

未知函数是一元函数的微分方程称为**常微分方程**，未知函数是多元函数的微分方程称为**偏微分方程**.

2. 微分方程中所含未知函数的导数的最高阶数称为微分方程的**阶**. 它是常微分方程分类的一个基本依据.

3. $F(x,y,y')=0$ 称为**一阶隐方程**.

$y'=f(x,y)$称为**一阶显方程**.

$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$ 称为**微分形式**的一阶方程.

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}) \quad ①$$

称为n **阶显式方程**.

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0 \quad ②$$

称为n **阶隐式方程**.

4. **定义1** 设函数$y=y(x)$在$[a,b]$上有定义，且存在n阶导数，能使

$$F(x,y(x),y'(x),\cdots,y^{(n)}(x))=0$$

成为区间$[a,b]$上的恒等式，则称$y=y(x)$为方程②在$[a,b]$上的一个解.

对于其他形式的方程或区间，也可作相应的叙述.

解的图像称为微分方程的**积分曲线**.

5. n阶常微分方程的含有n个任意常数$C_1,C_2,\cdots,C_n$的解

$$y=\varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$$

称为该方程的**通解**. 由隐式表出的通解称为**通积分**.

用来确定通解中任意常数的条件称为**初始条件**. n阶常微分方程的初始条件通常写成

$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y_0',\quad \cdots,\quad y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}.$$

n阶常微分方程的满足初始条件的解称为**特解**. 由隐式表出的特解称为**特积分**.

6. 求微分方程的满足初始条件的解的问题称为**初值问题**. 初值问题也常称为柯西(Cauchy)问题.

疑难解析

1. 微分方程与其他方程有何不同?

答 通常把表达未知量所必须满足某种条件的含有未知量的等式称为方程. 方程可以按对未知量所施加的数学运算进行分类，如

$$x^2-3x+1=0,\quad \sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}=1$$

中对未知量x施加了代数运算，因此它们称为**代数方程**.

$$\sin 2x+\cos 3x=1,\quad e^x=x^2-1$$

中含有未知量x的超越函数，因此它们称为**超越方程**.

$$y''-2y'-3y=e^x,\quad y'''+2y''-y'+y=\sin x+1$$

中的未知量是未知函数y，且对y施加了导数(或微分)运算，所以它们称为**微分方程**.

2. 怎样理解微分方程解的几何意义？

答 由于求解微分方程开始时常用积分方法，因而习惯称微分方程的通解为通积分. 一阶微分方程的通积分是一函数族，每个函数的图形都是一条曲线，也称为积分曲线，通积分称为曲线族. 而特解是通过特定点的一条曲线.

一般地，一阶微分方程的通积分是一个单参数的曲线族. 如 $s=\frac{1}{2}gt^2+C$ 是微分方程 $\frac{ds}{dt}=gt$ 的通积分，由 C 的不同，对应一族抛物线. 而 n 阶微分方程的通积分是含有 n 个参数的曲线族.

微分方程的解所表示的积分曲线在微分方程所确定的方向场中有几何解释，在微分方程研究中也起着重要的作用.

设有微分方程 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$，若 $f(x,y)$ 在 xOy 平面的某区域 D 上有定义，在区域 D 上任一点 $M(x_0,y_0)$，以此点的函数值 $f(x_0,y_0)$ 为斜率作一个方向（直线段），则称区域 D 连同函数 $f(x,y)$ 在 D 上各点处的方向为所给方程在 D 上的**方向场**. 方程 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 的积分曲线上每点的切线方向，均与方程所确定的方向场在该点的方向相同.

事实上，若 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 的积分曲线为 $y=\varphi(x)$，则曲线上任一点 $M(x,\varphi(x))$ 处的切线斜率为 $\frac{d\varphi(x)}{dx}=f(x,\varphi(x))$，而方向场在点 $M(x,\varphi(x))$ 的方向斜率按方向场定义也是 $f(x,\varphi(x))$. 曲线的切线斜率与方向场斜率相同，说明积分曲线在点 $M(x,\varphi(x))$ 处与方向场该点的方向相切. 反之，若在区域 D 上有一曲线 $y=\varphi(x)$ 在各点处的切线均与该点方向场的方向一致，则 $y=\varphi(x)$ 必是已知方程的一条积分曲线.

积分曲线的这一性质，提供了确定积分曲线的几何依据，方便了对解的研究. 在方程无法求解时，可通过在方向场上画积分曲线的方法找出近似解.

方法、技巧与典型例题分析

要求熟悉关于常微分方程的解、通解和特解等基本概念，能够验证微分方程的解，并学会建立一些简单的微分方程.

例 1 验证给出的函数是否为相应微分方程的解：

(1) $5\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2+5x, y=\frac{x^3}{5}+\frac{x^2}{2}+C$;

(2) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p(x)y, p(x)$ 连续, $y=Ce^{\int p(x)\mathrm{d}x}$;

(3) $(x+y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=0, y=(C^2-x^2)/(2x)$;

(4) $y''=x^2+y^2, y=1/x$.

解 只需对给出的函数求导，然后代入验证即可.

(1) 是. 因为 $y'=3x^2/5+x$，所以

$$5\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2+5x.$$

(2) 是. 因为 $y'=Ce^{\int p(x)\mathrm{d}x}p(x)$，所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=Ce^{\int p(x)\mathrm{d}x}p(x)=p(x)y.$$

(3) 是. 因为 $y'=-\frac{C^2}{2x^2}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{C^2+x^2}{x^2}\right)$，即

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{C^2+x^2}{2x}=-\frac{C^2-x^2+2x^2}{2x}=-\frac{C^2-x^2}{2x}-x=-(y+x),$$

所以

$$(x+y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=0.$$

(4) 不是. 因为 $y'=-\frac{1}{x^2}, y''=\frac{2}{x^3}$，所以

$$y''=\frac{2}{x^3}\neq x^2+y^2.$$

例 2 证明：函数 $y=\frac{1}{x^2-1}$ 在区间 $(-1,1)$ 内是方程 $y'+2xy^2=0$ 的一个解，但任何包含 -1 或 1 的点的区间不是它的定义区间.

证　在$(-1,1)$内，$y=\dfrac{1}{x^2-1}$与$y'=-\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$都有定义，代入方程得

$$y'+2xy^2=-\frac{2x}{(x^2-1)^2}+2x\left(\frac{1}{x^2-1}\right)^2=0,$$

所以，$y=\dfrac{1}{x^2-1}$在区间$(-1,1)$内是方程的一个解.

但$y=\dfrac{1}{x^2-1}$在点$x=\pm1$无定义，所以任何包含-1或1的区间都不是解的定义区间.

例3　验证所给二元方程确定的函数为所给微分方程的解：

(1) $(x-2y)y'=2x-y$，$x^2-xy+y^2=C$；

(2) $(xy-x)y''+xy'^2+yy'-2y'=0$，$y=\ln(xy)$.

解　对二元方程求导，将结果代入微分方程验证.

(1) 将方程$x^2-xy+y^2=C$两端对x求导，得

$$2x-y-xy'+2yy'=0 \Rightarrow y'=(2x-y)/(x-2y),$$

知$x^2-xy+y^2=C$确定函数是所给微分方程的解.

(2) 将方程$y=\ln(xy)$两端对x求导，得

$$y'=1/x+y'/y \Rightarrow y'=y/(xy-x),$$

$$y''=(-xy^3+2xy^2-2xy)/(xy-x)^3,$$

代入得
$$(xy-x)y''+xy'^2+yy'-2y'=0.$$

知$y=\ln(xy)$确定函数是所给微分方程的解.

例4　确定函数关系式中的参数，使满足所给初始条件：

(1) $y=(C_1+C_2x)e^{2x}$，$y(0)=0$，$y'(0)=1$；

(2) $y=C_1\sin(x-C_2)$，$y(\pi)=1$，$y'(\pi)=0$.

解　将初始条件代入函数式及其导数式，即可确定参数值.

(1) 因为$y=(C_1+C_2x)e^{2x}$，$y'=C_2e^{2x}+2(C_1+C_2x)e^{2x}$，代入初始条件得

$$\begin{cases}C_1=0,\\C_2+2C_1=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}C_1=0,\\C_2=1,\end{cases}$$

故 $$y=xe^{2x}.$$

（2）因为 $y=C_1\sin(x-C_2)$，$y'=C_1\cos(x-C_2)$，代入初始条件得

$$\begin{cases}C_1\sin(\pi-C_2)=C_1\sin C_2=1,\\ C_1\cos(\pi-C_2)=-C_1\cos C_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=1,\\ C_2=\pi/2,\end{cases}$$

故 $$y=\sin(x-\pi/2)=-\cos x.$$

n 阶微分方程的通解含有 n 个独立常数（称为参数），它在几何上表示一个有 n 个参数的曲线族．反之，一个含有 n 个独立参数的曲线族必伴随一个 n 阶微分方程．此微分方程可以由所给 n 个参数的曲线族微分 n 次，然后从 $n+1$ 个方程中消去 n 个独立参数而得到．

例 5 求下列单参数曲线族所满足的微分方程：

（1）$y=Cx+C^2$；（2）$ay^2=(x-C)^3$；

（3）$C(y+C)^2=x^3$.

解 （1）对 $y=Cx+C^2$ 两端对 x 求导，得 $C=\frac{dy}{dx}$. 代入原式，得

$$y=x\frac{dy}{dx}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

即为所求微分方程．

（2）对 $ay^2=(x-C)^3$ 两端对 x 求导，得

$$2ay\frac{dy}{dx}=3(x-C)^2,$$

代入原式，得所求微分方程为

$$ay^2=\left[\left(\frac{2}{3}ay\frac{dy}{dx}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^3 \quad 或 \quad 27y=8a\left(\frac{dy}{dx}\right)^3.$$

（3）将原式改写为 $\sqrt{C}(y+C)=x^{3/2}$，再两端对 x 求导，得

$$\sqrt{C}\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}x^{1/2} \quad 或 \quad C=\frac{9}{4}x\Big/\left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

代入原式，得所求微分方程为