（上册）

高等数学

主　编　何水明
副主编　张益群　田木生

中国地质大学出版社

高 等 数 学

（上册）

主　编　何水明

副主编　张益群　田木生

中国地质大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（上册）/何水明主编；张益群，田木生副主编. —武汉：中国地质大学出版社，2003.9

ISBN 7-5625-1780-0

Ⅰ. 高…

Ⅱ. ①何…②张…③田…

Ⅲ. 数学-高校-教材

Ⅳ. O17

高等数学（上册）

主　编　何水明

副主编　张益群　田木生

责任编辑：方　菊　　　　责任校对：张咏梅

出版发行：中国地质大学出版社（武汉市洪山区鲁磨路388号）　邮编：430074

电话：(027)87482760　传真：87481537　**E-mail**：cbo@cug.edu.cn

开本：850毫米×1168毫米 1/32　　字数：190千字　印张：7.25

版次：2003年9月第1版　　印次：2003年9月第1次印刷

印刷：中国地质大学出版社印刷厂　　印数：1—3 600册

ISBN 7-5625-1780-0/O·57　　定价：13.50元

前　言

本书是在《高等数学课程教学基本要求》的指导下，结合我校文科高等数学的特点编写而成的. 因此，适合各类工科院校文科各专业及高职院校作教材. 众所周知，高等数学在经济科学、管理科学中有着广泛的应用. 学好这一门课程不仅对学习后续课程是必不可少的，而且对掌握现代经济管理理论并应用于实际也是很有必要的.

本书力求以通俗的语言向读者介绍高等数学中最基础的知识. 全书以微积分学为核心内容，一元函数和多元函数是微积分研究的主要对象，微分方程则作为微积分学的延伸和应用. 本书除每节后有少量习题外，在每一章的末尾，都配有总习题，以便使读者易于抓住每章的重点并测试自己对基本内容的掌握程度.

本书由杜伯仁教授主审. 本书的完成得到了系、教研室领导及全体教师的大力支持. 杜伯仁教授在百忙之中仔细审阅了全稿，同时也得到了出版社的积极配合，在此一并致谢! 由于作者水平有限，书中难免存在错误和不足之处，恳请读者批评指正.

编者

2003. 8

目　　录

第一章　函数与极限

第一节　函　数

高等数学研究的对象是变量及函数，极限是研究变量及函数的一种基本方法，因此函数及极限是这一章研究的两个基本内容.

一、常量、变量及其表示(集合内容略)

在观察自然、社会现象或技术过程时，会遇到各种不同的量，其中有的量在研究过程中不起变化(即保持一定的数值)的量叫**常量**；还有一些量在研究过程中是变化的，也就是可取不同的数值，这种量叫**变量**.

例如，一昼夜的温度、物体在运动过程中所经历的时间和路程均为变量. 而固定物体之间的距离、等速运动的速度均为常量.

习惯上，常用字母 a、b、c 等表示常量，常用字母 x、y、z 等表示变量.

设 a、b 是二实数，且 $a<b$，则满足不等式 $a<x<b$ 的一切实数 x 称为**开区间**，用 (a,b) 表示. 在数轴上，(a,b) 表示点 a 与点 b 之间(不包括点 a 与点 b)的线段，还可以用集合表示开区间 $(a,b)=\{x|a<x<b\}$.

类似地可说明 $[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$，称 $[a,b]$ 为**闭区间**.

类似地还可说明 $[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$ 及 $(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$，$[a,b)$、$(a,b]$ 都称为**半开半闭区间**.

上述区间都称为**有限区间**. 数 $b-a$ 称为**区间的长**.

满足不等式 $x \leqslant b, x < b, x \geqslant a, x > a$ 以及 x 取一切实数的区间都称为**无限区间**，它们分别用 $(-\infty, b]$，$(-\infty, b)$，$[a, +\infty)$，$(a, +\infty)$，$(-\infty, +\infty)$ 表示，其中 $+\infty$ 读作正无穷大，$-\infty$ 读作负无穷大.

邻域是一个常用的概念，以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域，记作 $U(a)$.

设 δ 是任一正数，则开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 就是点 a 的一个邻域，这个邻域称为点 a 的 **δ 邻域**，记作 $U(a,\delta)$. 见图 1-1.

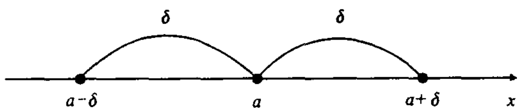

图 1-1

即 $U(a,\delta) = \{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}$.

点 a 称为这个邻域的中心，δ 称为这个邻域的半径.

由于 $a-\delta < x < a+\delta$ 相当于 $|x-a| < \delta$，因此 $U(a,\delta) = \{x \big| |x-a| < \delta\}$. 而因 $|x-a|$ 表示点 x 与点 a 的距离，所以 $U(a,\delta)$ 表示与点 a 距离小于 δ 的一切点的全体.

称 $U^0(a,\delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$ 为点 a 的去心的 δ 邻域.

二、函数概念

定义　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，如果对于每个数 $x \in D$，变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作 $y = f(x)$. 数集 D 叫做这个函数的**定义域**，记作 D，x 叫做**自变量**，y 叫做**因变量**.

当 x 取数值 $x \in D$ 时，与 x 对应的数值为函数 $y = f(x)$ 在 x 处

的函数值，记作 $f(x)$.

称函数值的全体 $W=\{y \mid y=f(x), x \in D\}$ 为函数的**值域**. 如图 1-2.

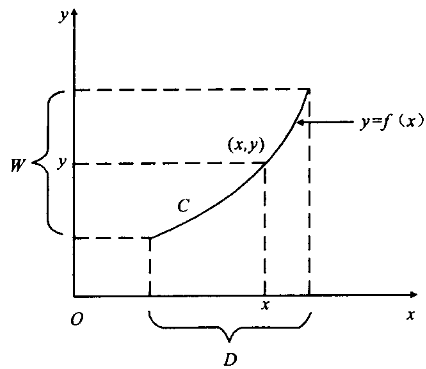

图 1-2

例 1　函数 $y=\ln x$ 定义域为 $x>0$.

例 2　设有半径为 r 的圆，考虑内接于该圆的正 n 边形的周长 S_n，易看出 $S_n=2nr\sin a_n$，其中 $a_n=\pi/n$，于是内接于该圆的正 n 边形的周长 S_n 与边数 n 的关系由公式

$$S_n=2nr\sin(\pi/n)$$

得出. 这就确定了边数与周长之间的函数关系，其定义域为 N.

在数学中，有时不考虑函数的实际意义，而抽象地研究用算式表达的函数，这时我们约定：函数定义域是自变量所能取得的使算式有意义的一切实数值(自然定义域).

如 $y=\log_{10}(x^2-1)$ 的定义域是 $|x|>1$；

$y=1/\sqrt{1-x^2}$ 定义域是开区间 $(-1,1)$.

在函数定义中，没有要求当自变量取不同值时，因变量一定也要取不同的值；而只要它有确定的对应值. 因此 $y=c$(c 是常数)也是一

个函数. 即常量可以看成是变量 x 的函数,其定义域为实数集合 R.

函数的表示方法一般有三种:图形表示法、表格表示法(数学用表是其中的例子)、数学式子(解析法)表示法. 本课程中解析法用得较多.

值得注意的是有些函数关系需用几个式子来表示. 如下例就是定义在区间$(-\infty,+\infty)$上的几个函数,如图 1-3 和图 1-4 所示.

此处不能把它理解为几个函数,而是用几个式子表示的一个函数. 习惯上称之为分段定义函数,简称**分段函数**.

例 3 $y=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, x>0,\\ 0, x=0,\\ -1, x<0.\end{cases}$ 该函数常称为符号函数. 图形如图 1-3 所示.

例 4 函数 $y=|x|=\begin{cases}x, x\geqslant 0\\ -x, x<0\end{cases}$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$[0,+\infty)$. 称该函数为绝对值函数. 图形如图 1-4 所示.

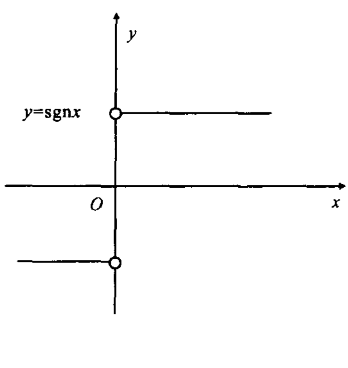

图 1-3

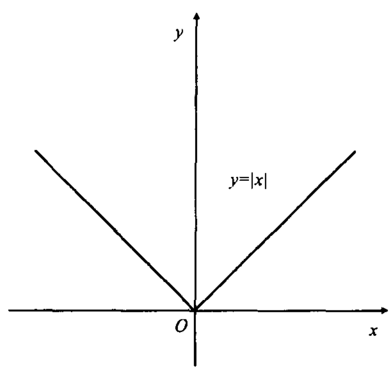

图 1-4

例 5 $y=f(x)=[x]$,$[x]$是不超过 x 的最大整数部分. 如 $[5/7]=0$,$[\pi]=3$,$[-4.2]=-5$,定义域为全体实数,值域为全体

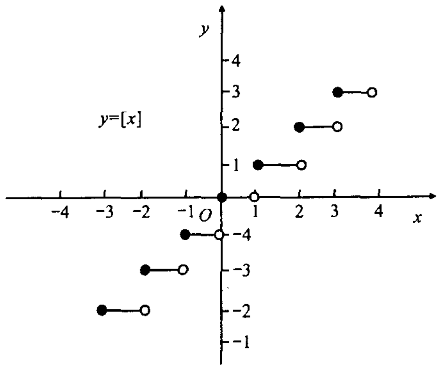

图 1-5

整数. 如图 1-5.

三、函数的几种特性

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 在 D 内有定义(D 可以是函数的定义域,也可以是定义域的子集). 若存在正数 M,对任意 $x \in D$,对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)| < M.$$

就称函数在域 D 内**有界**;如果这样的 M 不存在,就称函数在域 D 内**无界**.

例如,函数 $f(x) = \sin x$ 在$(-\infty, +\infty)$内是有界的. 因为,无论 x 取何值,$|\sin x| \leqslant 1$ 都能成立. 这里 $M = 1$(当然,也可以取大于 1 的任何数作为 M,而 $|\sin x| < M$ 成立).

函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在开区间$(0,1)$内是无界的. 因为 x 可取充分接近零的正数,使$\dfrac{1}{x}$ 大于任意预先给定的大正数 N,也就是说,不存在

这样的正数 M,使

$$\left|\frac{1}{x}\right| \leqslant M$$

对于(0,1)内的一切 x 都成立,但 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在区间(1,2)内是有界的,例如可取 $M=1$,显然 $\left|\frac{1}{x}\right| \leqslant M$ 对于区间(1,2)内的一切 x 值都成立.

2. 函数的单调性

如果函数在区间 I 内随 x 增大而增大,即对于 I 内任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1 < x_2$ 时,有 $f(x_1) < f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是单调增加的. 如图 1-6.

如果函数 $f(x)$ 在区间 I 内随 x 增大而减小,即对于 I 内任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1 < x_2$ 时,有 $f(x_1) > f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是单调减少的. 如图 1-7. 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

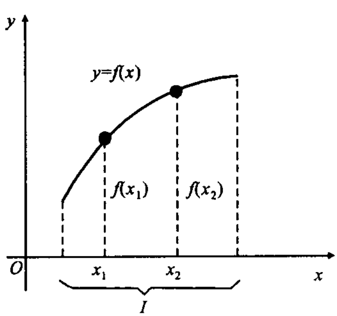

图 1-6

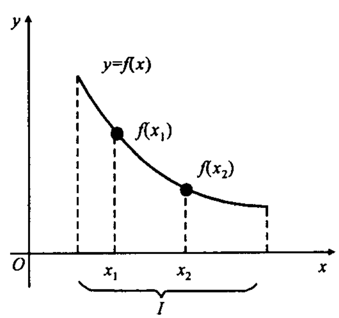

图 1-7

例 6 函数 $y=f(x)=x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 内是单调增加的.

事实上,对 $(0,+\infty)$ 内任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1 < x_2$ 时,有

$f(x_2)-f(x_1)=x_2^2-x_1^2=(x_2+x_1)(x_2-x_1)>0$,所以 $f(x_1)<f(x_2)$.

即 $f(x)=x^2$ 在$(0,+\infty)$内是单调增加的.

同理可证:$f(x)=x^2$ 在$(-\infty,0)$内是单调减少的.

3. 函数的奇偶性

如果函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,且对任意 $x\in D$ 都有 $f(-x)=f(x)$,则称函数 $y=f(x)$ 为**偶函数**;如果都有 $f(-x)=-f(x)$,则称函数 $y=f(x)$ 为**奇函数**.

几何上,偶函数的图形对称于 y 轴,如图 1-8;奇函数的图形对称于原点,如图 1-9.

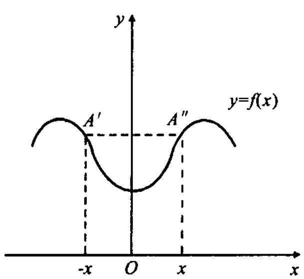

图 1-8

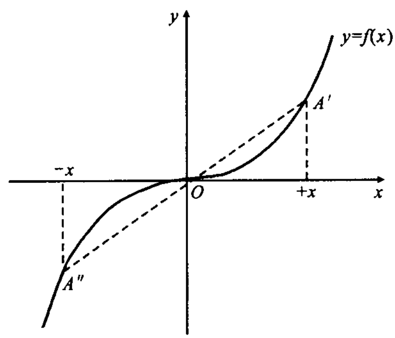

图 1-9

例 7 证明 $y=f(x)=\dfrac{1}{2(e^x-e^{-x})}$ 是奇函数. 其中常数 $e=2.718\,281\,82\cdots$.

证明 函数 $y=f(x)$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$有

$$f(-x)=\frac{1}{2(e^{-x}-e^{x})}=-\frac{1}{2(e^x-e^{-x})}=-f(x),$$

所以 $y = f(x) = \dfrac{1}{2(e^{x} - e^{-x})}$ 是$(-\infty, +\infty)$内的奇函数.

4. 函数的周期性

如果存在一个不为零的实数 L 使得对定义域中的任何 x 恒有 $f(x+L) = f(x)$,则称 $f(x)$ 为**周期函数**. L 称为 $f(x)$ 的周期.

通常我们说的周期函数的周期是指最小正周期. 如我们熟悉的正弦和余弦函数,有性质

$$f(x + 2k\pi) = \sin(x + 2k\pi) = \sin x = f(x),$$
$$g(x + 2k\pi) = \cos(x + 2k\pi) = \cos x = f(x).$$
$$k = \pm 1, \pm 2.$$

故它们都是周期函数,周期为 2π.

又如我们定义函数 $y = f(x)$,当 $x \in [-1,1]$时,$f(x) = |x|$, $f(x)$ 的完整图形如图 1-10 所示,则函数 $y = f(x)$ 是周期为 2 的函数.

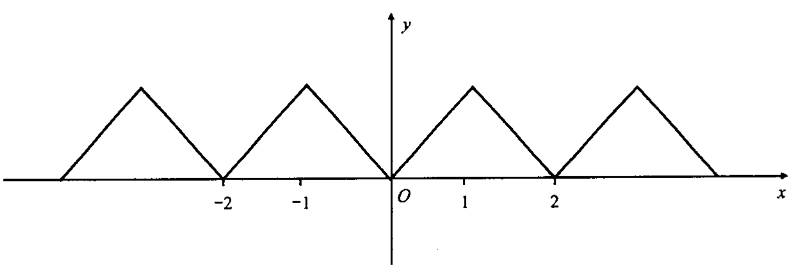

图 1-10

四、反函数

在两个变量之间的依从关系中,可根据问题的需要选定其中一个为自变量,而将另一个定为因变量. 一般地,在函数关系式 $y = f(x)$ 中,当把 y 看作自变量,x 看作因变量时,若能由关系式 $y = f(x)$ 确定 $x = \varphi(y)$,则这个由 $y = f(x)$ 确定的函数关系 $x = \varphi(y)$

叫做函数 $y=f(x)$ 的**反函数**,而 $f(x)$ 叫做直接函数.

由于习惯上多采用字母 x 表示自变量,用字母 y 表示因变量.因此,往往把 $x=\varphi(x)$ 中的自变量改写为 x,因变量 x 改写为 y.这样,$y=f(x)$ 的反函数就写成 $y=\varphi(x)$.

例 8 求 $y=4-5x$ 的反函数.

解 由 $y=4-5x$ 解出 x,得

$$x=-\frac{1}{5}(y-4).$$

即为 $y=4-5x$ 的反函数.习惯上改写成 $y=-\frac{1}{5}(x-4)$.

注意到:函数 $x=\varphi(y)$ 与 $y=\varphi(x)$ 表示同一函数,这是因为函数关系中对应规律没有变,只是表示自变量与因变量的字母互换而已.

我们指出:函数 $y=f(x)$ 是单值函数时,它的反函数 $y=\varphi(x)$ 不一定是单值的.

如 $y=x^2$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的单值函数时,它的反函数 $y=\pm\sqrt{x}$ 是定义在 $[0,+\infty)$ 上的一个双值函数.在很多情况下,为了讨论问题的方便,我们在多值函数中取出一个单值支来研究.如 $y=\sqrt{x}$ 是函数 $y=x^2$ 反函数的一个单值支.如图 1-11.

把直接函数 $y=f(x)$ 和反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形画在同一坐标平面上,这两个图形关于直线 $y=x$ 是对称的.如图 1-12.

习题 1-1

1. 下列各题中,函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同?为什么?

 (1) $f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$;

 (2) $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$;

 (3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}, g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$.

2. 设 $f(x)=\sqrt{4+x^2}$,求下列函数值:

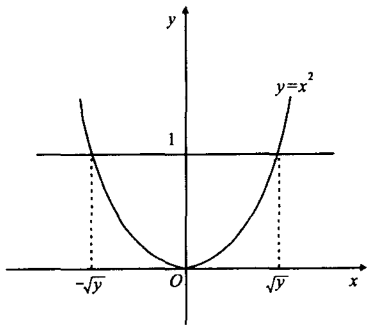

图 1-11

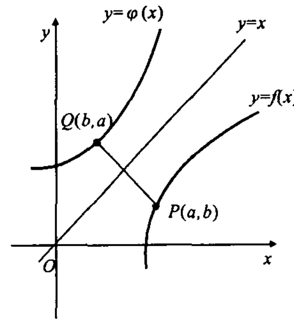

图 1-12

$$f(0),f(1),f(-1),f\left(\frac{1}{a}\right),f(x_0),f(x_0+h).$$

第二节　初等函数

一、幂函数

函数 $y=x^{\mu}$（μ 是实数），叫幂函数.

幂函数 $y=x^{\mu}$ 的定义域随 μ 而定. 例如，当 $\mu=1/2$ 时，$y=\sqrt{x}$，其定义域为$[0,+\infty)$，当 $\mu=-1/2$ 时，$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，其定义域为$(0,+\infty)$，当 $\mu=1$ 时，$y=x$，其定义域为$(-\infty,+\infty)$，在$(0,+\infty)$上不论 μ 取什么值，函数都有意义，它们的图形都通过点$(1,1)$，常见的幂函数见图 1-13(a)、(b)、(c).

二、指数函数

函数 $y=a^x$（$a>0,a\neq 1$），叫指数函数.