



中等专业学校教学用书

高等数学习题集

彼·米·薩夫丘克著

人民教育出版社



中等专业学校数学用书

高等数学习题集

彼·米·薩夫丘克著

呂 启 一 龙 譯

人·民·教·育·出·版·社

本书系根据苏联国立科学技术理论书籍出版社(Государственное издательство технико-теоретической литературы)出版的彼·米·薩夫丘克(П. М. Савчук)著“高等数学习题集”Сборник задач по высшей математике для техникумов) 1956 年版譯出。原书經苏联高教部中等专业教育司审定为中等专业学校数学参考书。

高等数学学习题集

彼·米·薩夫丘克著

呂 启 龙 譯

人民教育出版社出版

高等学校教材編輯部
北京宣武門內承恩寺7号

(北京市书刊出版业营业許可証出字第2号)

京华印书局印装 新华书店发行

统一书号 12010·741 开本 850×1168 $\frac{1}{32}$ 印张 4 $\frac{1}{16}$

字数 105000 印数 0001—10000 定价(4) 0.36

1960 年6月第1版 1960 年6月北京第1次印刷

序 言

这本习题集基本上是按照苏联高等教育部审定的中等专业学校高等数学教学大纲编成的。各部分的习题都是按照由易及难的原则编排的。

除一般性习题外，本书中还包含应用题。习题的数量足以保证学生课堂作业及家庭作业的需要。

Г. С. 巴拉年柯夫教授承担了这本习题集的校订工作，特向他表示深深的谢意。

我也很感谢国立技术理论书籍出版社的编辑 А. П. 拉祖莫夫斯卡娅，为了准备原稿的出版，她作了一系列有价值的修正及和有关教学法的意见。

对所有为改善这本习题集而提出意见及建议的人，作者将十分感激。

来信请寄往：Московская область, гор. Спалдиногорск,
Октябрьская ул., д. 19-А, кв. 3。

П. М. 薩夫丘克
1956年5月20日

目 录

序言	v
第一章 坐标法	1
§ 1. 直线上点的坐标	1
§ 2. 平面上点的坐标	2
§ 3. 平面上两点间的距离	4
§ 4. 分线段为已知比	5
第二章 直线	8
§ 5. 直线的斜截式方程·直线的一般方程及其特殊情形	8
§ 6. 直线的截距式方程·二直线的相交	9
§ 7. 过已知点且有定向的直线的方程·直线束·直线的两点式方程	11
§ 8. 二直线间的夹角·二直线平行与垂直的条件	13
§ 9. 点的轨迹	15
第三章 二次曲线	16
§ 10. 圆	16
§ 11. 椭圆	18
§ 12. 圆及椭圆的参数方程	20
§ 13. 双曲线	22
§ 14. 抛物线	24
第四章 极限	29
§ 15. 极限基本定理的例题	29
§ 16. 正弦与弧之比的极限	31
§ 17. 数 e ·自然对数	31
第五章 函数的概念	32
§ 18. 记号	32
§ 19. 自变量和函数的增量	33
§ 20. 函数的定义域·函数的连续性	35
第六章 导数的概念	36
§ 21. 函数的变化率	36
§ 22. 导数	37
§ 23. 导数的力学意义	38

§ 24. 曲线的切线·导数的几何意义	39
第七章 初等函数的导数	42
§ 25. 微分公式	42
§ 26. 积的导数	44
§ 27. 分式的导数	45
§ 28. 导数的简单应用	46
§ 29. 复合函数的导数	47
§ 30. 对数函数及指数函数的导数	49
§ 31. 三角函数的导数	51
§ 32. 反三角函数的导数	52
§ 33. 各种函数的导数	54
§ 34. 相对速度的计算	55
第八章 导数的应用	57
§ 35. 函数的递增与递减	57
§ 36. 函数的极大值与极小值	58
§ 37. 二阶导数及其力学意义	63
§ 38. 利用二阶导数研究函数的极大值与极小值	65
§ 39. 曲线的凸向、拐点·函数图象的作法	66
第九章 微分	68
§ 40. 无穷小的比较	68
§ 41. 微分表·函数微分的求法	69
§ 42. 微分在近似计算中的应用	71
第十章 不定积分	74
§ 43. 基本积分表·不定积分法	74
§ 44. 把微分加以线性变换后可在表中查得的积分	77
§ 45. 不定积分的简单应用	78
§ 46. 代换积分法	79
§ 47. 某些三角函数的积分法	81
§ 48. 三角代换	82
§ 49. 可化为表中积分 10 及 11 的积分	83
第十一章 定积分	84
§ 50. 利用不定积分计算定积分	84
§ 51. 定积分在几何问题中的应用	86
§ 52. 定积分在物理问题中的应用	90
§ 53. 定积分的各种应用问题	96
答案	99

第一章 坐标法

§1. 直线上点的坐标

1. 試描出点 $A(3)$ 、 $B(-5)$ 、 $C(-1)$ 、 $D(6)$ 、 $E(-2, 5)$ 及 $F(0)$ ，并确定有向綫段 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 、 $\overline{AD}$ 、 $\overline{AE}$ 及 $\overline{FB}$ 。

2. 試証：如果在直綫上有一列点 $A(4)$ 、 $B(-6)$ 、 $C(-2)$ 、 $D(7)$ 、 $E(-3, 5)$ ，則这些点之間的綫段滿足关系式：1) $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ ，2) $\overline{AC} + \overline{CD} = \overline{AD}$ ，3) $\overline{AD} + \overline{DE} = \overline{AE}$ ，4) $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} = \overline{AE}$ ，5) $\overline{AB} + \overline{BA} = \overline{AA}$ ，6) $\overline{BA} = -\overline{AB}$ 。

3. 試描出点 $A(\sqrt{2})$ 、 $B(-\sqrt{3})$ 、 $C(2\sqrt{3})$ 。

4. 一点关于：a) 原点、b) 点 $B(-3)$ 、c) 点 $C(5)$ 与点 $A(4)$ 对称的点，試求这此点的坐标。

5. 已知点 $A(6)$ 、 $B(-5)$ 、 $C(-2)$ 。应将原点移到哪一点上，才能使这些点的新坐标各等于 (3) 、 (-8) 、 (-5) ？

6. 已知点 $A(-2)$ 。如果 $\overline{AB}=5$ ， $\overline{AC}=-1$ ， $\overline{AD}=4.5$ ， $\overline{EA}=-3$ ，試求点 $B(x_1)$ 、 $C(x_2)$ 、 $D(x_3)$ 、 $E(x_4)$ 的坐标，并描出这些点。

7. 求出一點 $M(x)$ ，將点 $A(-3)$ 、 $B(7)$ 間的綫段分成比 $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = -\frac{2}{3}$ 。

8. 求出一點 $C(x)$ ，將点 $A(6)$ 、 $B(-4)$ 間的綫段分成比 $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = -\frac{1}{3}$ 。

9. 如果点 $B(-4)$ 將点 $A(x)$ 、 $C(6)$ 間的綫段分成比 $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = -\frac{3}{2}$ ，試求点 $A(x)$ 。

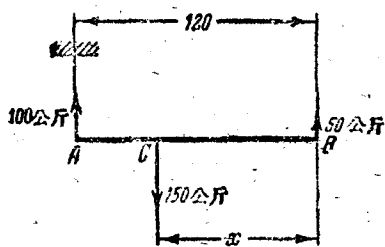


图 1

10. 一根梁横架于二支点 A, B 上, 在它上面某点处悬一重物, 其悬挂方法要使它在这点 B 上的压力, 是它在这点 A 的压力的 1.5 倍。已知梁长为 8 米, 问重物应悬在距点 A 多远的地方?

11. 将长 120 厘米的水平杆两端吊在两根绳上, 其中一绳最多能承受 50 公斤。在杆上距此端多远的地方可悬 150 公斤的重物而无危险? [杆重不计(图 1)]

12. 设有长 140 厘米、重 10 公斤的水平杆, 在它的点 A 和 B 处各加



图 2

30 公斤和 40 公斤的重物。试求此系统的重心的位置。

13. 将无重量的杆分成 9 等分(图 2)。在各分点处固定一钢球, 且其球心分别与分点重合。球的重量由 1 克开始依次增加 1 克, 最后为 10 克。须在距左端多远的地方悬起此杆, 才能使它平衡?

§2. 平面上点的坐标

14. 试按已给坐标描出点 $A(2; 3)$ 、 $B(-5; 2)$ 、 $C(-7; -3; 5)$ 、 $D(6; -2)$ 、 $E(0; 3)$ 、 $F(2; 0)$ 、 $M(\sqrt{2}; \sqrt{3})$ 。

15. 已知点 $A(2; -5)$; 同时又有一点关于: a) 横轴; b) 纵轴与点 A 对称, 试求此点的坐标。

16. 横坐标与纵坐标的绝对值相等而符号相反的点位于何处?

17. 已知点 $A(-7; 5)$ 。试求与点 A 关于原点对称的点 A_1 。

18. 下表給出一旬内完成采煤任务的計劃。

旬内日期	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
开采吨数	300	315	330	350	360	390	400	430	430	450

試作出采煤量(吨数)与時間的关系的图象。

19. 下表指出苏联在各五年計劃内某几年的生鉄产量, 以及1960年的計劃产量*:

年 次	1950	1952	1955	1957	1960 (計劃)
生鉄以百万吨計	19	?	33	?	53

試作出生鉄产量与時間的关系的图象, 并按此图象确定, 在1952年炼出了多少生鉄, 及在1957年又炼出多少?(精确到1百万吨)

20. 正方形的边等于3个单位长, 以其不平行二边作为坐标軸。試求此正方形頂点的坐标。

21. 正方形的边等于1个单位长。如取其两对对角綫作坐标軸, 試求各頂点的坐标。

22. 在图3上, OC 的投影 $OD=a$, $DC=b$; 試利用此图求正方形頂点的坐标, 并計算其面积。

23. 菱形的边等于10个单位长, 而一对角綫等于12个单位长。如取菱形对角綫作坐标軸(两种情形), 試求其頂点的坐标。

24. 物体作等速运动, 它所經過的路程以公式 $s=vt$ 来表示。取 $v=2$ 米/秒, 試作出此物体从 $t=0$ 到 $t=6$ 秒的时间內的运动的图象。

25. 一物体自20米高处自由落到地面。如果物体所經過的

* 本书原版于1956年出版, 苏联1957年生产的实际产量与1960年計劃产量已有很大的不同, 上列1960年計劃数字显然过时, 但未见到此书新版, 故仍保留——譯者。

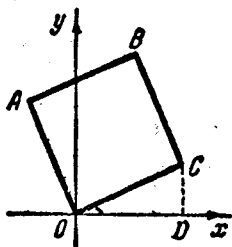


图 3

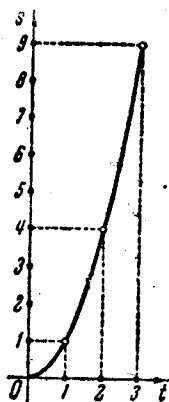


图 4

路程以公式 $s = \frac{gt^2}{2}$ 表示，其中 $g \approx 10$ 米/秒²，試作出此物体从 $t=0$ 到 $t=5$ 秒的时间的运动图象。

26. 图 4 表示某一等加速运动的路程，試求出这种情形下的 s 与 t 的关系。

提示：等加速运动公式为 $s = at^2 + b$ 。

§3. 平面上两点间的距离

27. 試求 a) $A(4; 6)$ 与 $B(7; 10)$ 、b) $C(-6; 3)$ 与 $D(-7; -2)$ 、c) $E(-3; 4)$ 与 $F(9; -7)$ 、d) $M(3; -6)$ 与 $N(-5; 0)$ 、e) $P(\sqrt{2}; 3\sqrt{7})$ 与 $Q(3\sqrt{2}; \sqrt{7})$ 两点间的距离。

28. 已知三角形顶点为 $A(-6; 11)$ 、 $B(-1; -1)$ 、 $C(2; 3)$ 。試求其周长。

29. 試証：顶点为 $A(23; 40)$ 、 $B(63; 31)$ 、 $C(23; 31)$ 的三角形是直角三角形。

30. 已知直线过点 $A(-2; 4)$ 、 $B(0; 2)$ ，試求此直线与 Ox 轴构成的角。

31 作直线运动的物体由点 $A(-4; -3)$ 移动到点 $B(5; 6)$ 。

試求所經過的路程之長，及物體所走的路綫對橫軸的斜角。

32. 一物體由點 $A(4; 0)$ 出發沿直綫移動 10 個單位長，此直綫與 Ox 軸構成 60° 角。試確定此物體運動終結時的位置。

33. 試在 Ox 軸上求到原點及點 $A(9; -3)$ 等距的點。

34. 試求到 $A(0; 2)$ 、 $B(2; -2)$ 、 $C(1; 1)$ 三點等距的點。

35. 三角形的頂點為 $A(-1; 3)$ 、 $B(2; 1)$ 、 $C(0; 1)$ ，試求其外接圓的圓心。

36. 試求距橫軸及點 $A(-7; -3)$ 各為 15 個單位長的點。

37. 試求到二坐標軸及點 $A(-6; -3)$ 等距的點。

38. 試求過點 $A(-3; 3)$ 且與橫軸切於點 $B(4; 0)$ 的圓的中心。

39. 試驗証下列三已知點是否在一直綫上：a) $A(-1; 7)$ 、 $B(2; 1)$ 、 $C(0; 5)$ ；b) $D(8; 10)$ 、 $E(-2; 0)$ 、 $F(-6; -4)$ ；c) $M(3; -1)$ 、 $N(2; 1)$ 、 $P(0; 3)$ 。

§ 4. 分綫段為已知比

40. 端點為 $A(1; 3)$ 、 $B(2; -2)$ 的綫段被點 $C(x; y)$ 分成比 $AC:CB=2:3$ 。試求分點的坐標。

41. 端點為 $A(-1; 4)$ 、 $B(1; 2)$ 的綫段被點 $M(x; y)$ 分成比 $AM:MB=2:1$ 。試求分點的坐標。

42. 已知三角形的頂點為 $A(4; -6)$ 、 $M(-2; -2)$ 、 $C(0; 4)$ 。試求其各邊中點的坐標。

43. 一均質杆的一端位於點 $A(3; 1)$ 。如果其重心位於點 $C(5; -4)$ ，試確定其另一端的坐標。

44. 將點 $A(3; 2)$ 、 $B(5; 6)$ 間的綫段分成三等分。試求分點的坐標。

45. 已知三角形各邊的中點為 $M(4; -2)$ 、 $N(-6; 5)$ 、 $Q(0; -3)$ ，

試求其頂点。

46. 已知三角形的頂点为 $A(4; 1)$ 、 $B(7; 5)$ 、 $C(-4; 7)$ 。試求角 A 的平分綫与对边 BC 的交点。

47. 平行四边形二相对頂点的坐标各为 $A(-4; -1)$ 及 $B(5; 7)$ 。另二相对頂点之一的坐标为 $C(-3; 4)$ 。試求第四个頂点。

48. 三角形三个頂点各为 $A(2; 5)$ 、 $B(0; -3)$ 、 $C(-5; 7)$ 。試求其中綫的交点(即重心)。

49. 在 $A(8; 3)$ 、 $B(-2; 5)$ 、 $C(4; -1)$ 三点各置 50 公斤、80 公斤、70 公斤的重物, 試求此系统的重心。

50. 試証, 在頂点为 $A(x_1; y_1)$ 、 $B(x_2; y_2)$ 、 $C(x_3; y_3)$ 的三角形中, 中綫交点的坐标等于

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

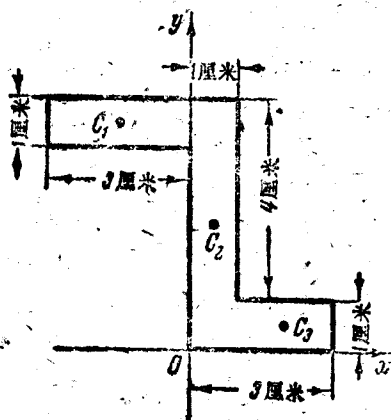


图 5

51. 已知一直綫上的兩点 $A(3; -1)$ 及 $B(-5; 7)$ 。試求此直綫上橫坐标 $x=8$ 的点。

52. 試証: 如果質点系由三質点 $A_1(x_1; y_1)$ 、 $A_2(x_2; y_2)$ 、 $A_3(x_3; y_3)$ 組成, 且在这三点处各集中了質量 m_1 、 m_2 、 m_3 , 則此質点系的重心由下列公式来确定:

$$X_0 = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad Y_0 = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + y_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

53. 試求一匀質平面图形的重心的坐标, 在图形的形状及大

小如图 5 所示。

54. 一平面桁架由 7 根匀质杆构成, 各杆之长如图 6 所示。如果各杆每一米长的重量相同, 试求此桁架重心的坐标。

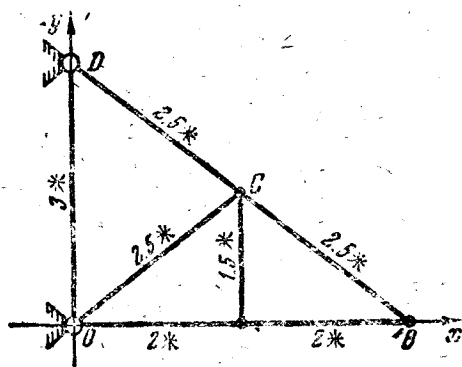


图 6

第二章 直綫

§ 5. 直綫的斜截式方程 ~ 直綫的一般方程及其特殊情形

55. 已知直綫方程: a) $15x - 8y - 60 = 0$, b) $3x + 2y + 5 = 0$,
c) $x - 4y + 1 = 0$, d) $\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y + 1 = 0$, e) $ax + 2by - 3 = 0$.

試將這些方程化成斜截式方程。

56. 一直綫在 Oy 軸上的截距等於 4 個單位, 且與 Ox 軸構成的角為: a) 45° 、b) 60° 、c) 30° 、d) 135° 、e) 180° 。試求此直綫的方程。

57. 已知直綫由下述方程確定: a) $x + y + 4 = 0$ 、b) $2x - y + 3 = 0$ 、c) $3x + 4y - 10 = 0$ 。試驗證這些直綫是否通過點 $A(2; 1)$ 、 $B(-2; -2)$ 、 $C(-1; -1)$ 、 $D(4; 1)$ 、 $E(2; 7)$ 、 $F(0; 5)$ 。

58. 如果直綫通過點 $A(3; -2)$ 及 $B(-5; 6)$, 試求此直綫的斜率及其在縱軸上的截距。

59. 對下列各直綫求出其斜率, 再求其在縱軸上的截距: a) $x - y + 1 = 0$ 、b) $3x + 5y - 10 = 0$ 、c) $4x - 2y - 3 = 0$ 、d) $x + 2y - 4 = 0$ 。

60. 試畫出方程: a) $y = 2x$ 、b) $y = 2x + 3$ 、c) $y = 4x - 1$ 、d) $y = -3x + 1$ 、e) $y = -2x - 3$ 、f) $y = x$ 、g) $y = 3.5$ 所確定的直綫。

61. 一點作等速運動, 它所經過的路程由方程 $s = s_0 + vt$ 來確定。取 $v = 2$, $s_0 = 1$, 試作所經路程的圖象。

62. 點的運動速度由方程 $v = v_0 + at$ 來確定。取 $v_0 = 3$, $a = \frac{1}{2}$, 試作點的運動速度的圖象。

63. 已知一點作等速運動, 它所走的路程與時間軸 Ox 交於點 $A(3; 0)$, 與路程軸 Oy 交於點 $B(0; -6)$ 。試求其速度。

64. 已知 Ox 轴与等腰梯形的较大的底重合, Oy 轴是其对称轴。如果梯形的底 $AD=3$ 米, $BC=2$ 米, 角 $\alpha=75^\circ$, 试求此梯形四个边的方程(图 7)。

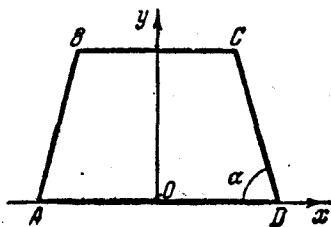


图 7

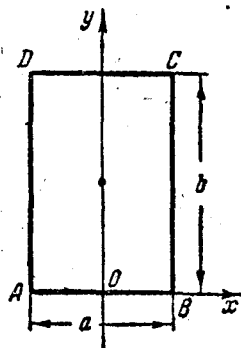


图 8

65. 矩形的边长为 a 及 b (图 8)。如果 Ox 轴与 a 边重合, Oy 轴通过矩形重心, 试求其各边的方程。

66. 三角形的位置如图 9 所示, 试求其各边的方程。

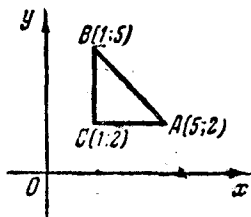


图 9

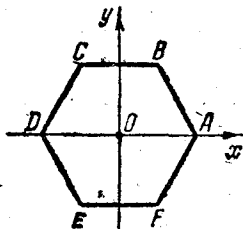


图 10

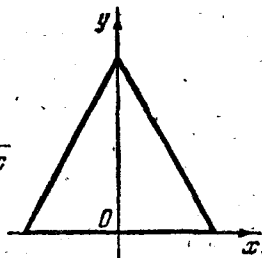


图 11

67. 如果取正六边形的一对角线作 Ox 轴, 取其对称中心作原点, 此正六边形的边长等于 2, 试求其各边的方程(图 10)。

68. 如果正三角形的边长等于 1, Ox 轴与其底边重合, Oy 轴与其高重合(图 11), 试求此等边三角形各边的方程。

§ 6. 直线的截距式方程 · 二直线的相交

69. 试将直线方程: a) $4x+3y-12=0$, b) $3x-2y+6=0$,

c) $x+2y-1=0$ 、d) $2x-3y-1=0$ 化成截距式方程。

70. 一直線在 Ox 軸上的截距等於 5 个單位長，在 Oy 軸上的截距等於 -2 个單位長，試作出此直線的方程。

71. 取正方形的對角線作坐標軸，如果此正方形邊長等於 1，試求其各邊的方程。

72. 菱形的對角線的長分別等於 4 及 6 个單位，以此兩對角線作坐標軸，試求其各邊的方程。

73. 試畫出方程： $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$ 、 $\frac{x}{4} - \frac{y}{5} = 1$ 、 $-\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$ 、

$-\frac{x}{4} - \frac{y}{5} = 1$ 所確定的直線。

74. 已知直線的方程為 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 。如果：a) $a=b$ 、b) $a=-b$ 、c) $a=-b\sqrt{3}$ ，問直線對 Ox 軸的斜角是多少？

75. 試求兩坐標軸與直線 $3x+4y-12=0$ 圍成的三角形的面積。

76. 某直線與兩坐標軸所圍成的三角形的面積等於 9 平方單位，如果此直線過點 $A(4; -2)$ ，試作此直線的方程。

77. 一直線通過點 $A(2; 3)$ 、且在兩坐標軸上的截距相等，求此直線的方程。

78. 試求下列各對直線的交點：a) $8x-3y+12=0$ 與 $3x+2y-33=0$ ；b) $5x+2y-2=0$ 與 $10x-10y+3=0$ ；c) $\frac{x+y}{2} + \frac{y-x}{2} = 8$ 與 $\frac{x+y}{3} - \frac{y-x}{4} = 11$ 。

79. 已知三角形各邊的方程為： $9x-y-23=0$ 、 $x-2y+5=0$ 、 $6x+5y+13=0$ 。試求其長。

80. 試求下列直線的交點間的距離：

$$\begin{cases} x+3=0, \\ 7x+5y+1=0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-y+5=0, \\ 5x+3y-26=0. \end{cases}$$

81. 四边形各边的方程依次为: $5x-3y-21=0$, $x-4y-11=0$, $11x-2y+47=0$, $4x+9y-51=0$. 试求此四边形顶点坐标及周长.

82. 试求直线 $x-y-2=0$, $3x-y-4=0$ 与纵坐标轴围成的三角形的面积.

83. 试求直线 $x-y-3=0$, $2x-y-12=0$ 与横坐标轴围成的三角形的面积.

84. 过两直线 $2x+3y-21=0$ 与 $x-2y+7=0$ 的交点引一直线, 使它通过原点.

85. 已知直线 $y=mx+5$. 问系数 m 取什么值时, 此直线才通过直线 $2x+y-9=0$ 与 $3x-2y+11=0$ 的交点.

§7. 过已知点且有定向的直线的方程·直线束·直线的两点式方程

86. 试证点 $A(5; -2)$, $B(-1; 4)$, $C(-4; 7)$ 在一直线上.

提示: 利用 $y=Kx+b$ 型的直线方程.

87. 设直线过点 $A(-1; -2)$ 且它对 Ox 轴的斜角为: a) 45° , b) 30° , c) 60° , d) 90° , e) 135° , 求此直线的方程.

88. 一直线过点 $A(2; 3)$, 其斜率等于直线 $5x-6y+7=0$ 的角系数, 试作此直线的方程.

89. 已知一直线过点 $A(3; -4)$, 另一直线在 Ox 轴及 Oy 轴上的截距各等于 -6 及 3 , 它们的斜率相等, 试求第一直线的方程.

90. 一直线过点 $A(2; -1)$, 且: a) 平行于坐标角的平分线, b) 平行于横轴, 试分别作出其方程.