科學譯叢

——數學：第11種——

三十年來的蘇聯數學

(1917—1947)

偏微分方程

中國科學院出版

科學譯叢

——數學：第11種——

三十年來的蘇聯數學

(1917—1947)

偏微分方程

С. Л. 索波列夫著

孫 以 豐 譯

中國科學院出版

1954年8月

三十年來的蘇聯數學

(1917—1947)

偏微分方程

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
В ЛАСТНЫХ ПРОИЗВОДНИХ

原著者　С.　Л.　Соболев

翻譯者　孫　以　豐

編輯者　中國科學院編譯局

出版者　中　國　科　學　院
北京(7)文津街3號

印刷者　北京新華印刷廠

裝訂者　北京源豐裝訂廠
和外楊梅竹斜街62號

發行者　新　華　書　店

(譯) 54048　　1954年8月第一版
(自然) 053　　1954年8月第一次印刷
(京) 0001—3,700　　開本：787×1092 $\frac{1}{25}$
字數：28千字　　印張：1$\frac{23}{25}$

定價：3,000元

目　　錄

偏微分方程

§1 總　　覽

偏微分方程論，特別是它的那一個叫作數學物理的分枝，是一門古典數學。不過，一直到最近幾十年這門科學才高度地向前發展。這方面的成就中，蘇維埃數學家們的功績佔據了一個突出的部分。在這篇報告裏，我們嘗試對三十年來在蘇聯所作的在這方面比較主要的結果給一個概覽。我們所要作的，對於資料陳述的完全性方面，將不像對於偏微分方程論發展的主要方向給一個輪廓方面那樣着重。自然，由於這個緣故，許多即使是非常有價值，但在這門科學發展的主幹上找不到一個適當位置的結果就不能够在這樣一篇短短的報告裏反映出來。材料的選擇以及在各分枝的敍述上詳細程度的不同，也不可避免地帶有主觀性。

首先，我們得比較詳細地敍述數學物理中的主題，以及在二十世紀初期這門科學的情況。數學物理，作爲一種科學，它的內容是去尋找並且研究許多不同的微分方程和積分方程的解，通常是研討那一類的解，它們滿足一些附加的條件，即所謂邊界條件。許多物理現象都引到這一類(多半是二階的)方程；對這些方程的研究，也正是數學物理之所由發生。早在十八世紀，人們就已經找到某些偏微分方程論裏的問題的解，這些問題是

以它們所描寫的物理現象來命名的。曾解決的如同：無限長或有限長細索振動的問題、在某種介質中熱之傳播的問題、在各種不同形狀的物體中熱之平衡的問題等等。其後，在十九世紀初期又添加了一般的一階偏微分方程的解。不過，大體上說，十九世紀上半的特徵是累積了許許多多各種特殊問題的解。

到了十九世紀的下半，情形就開始轉變了。在這個時期中人們創立了二階偏微分方程的一般理論。這個理論是逐漸發生的。最初是研究典型的微分方程最簡單的通性，然後一步一步地走向對解的性質的比較精深的研究。同時，在過去的年代中所得到的結果被擴張和一般化了。

很早人們就知道，對於不同類型的二階微分方程，其邊值問題的提法是完全不同的。並且也知道，這些方程的解的性質在本質上是各不相同的。例如，振動論的方程式具有表示波之傳播的解；熱擴散和熱傳導的方程具有那樣的解，個別的擾動漸趨分散同時也漸趨消失；而位勢論方程具有那樣的解，它在定義域以內是平滑的，可是當趨近邊界時，平滑性就失去了。這些事實都是在這門科學發展的早期就知道了的。

逐漸地，直到 1917 年，由於數學的增長和發展，得到了許多主要的結果，這些結果是需要列舉出來的。人們開始知道，具有一個未知函數的二階偏微分方程的性質依賴於一個對稱方陣的性質，這個方陣以方程中未知函數主要的幾個二次偏導數的係數爲元素。說得更精確一些，如果方陣所對應的二次型經過一個實踐性變換變成了平方和，那麼在這個平方和中所出現的正號的數目和負號的數目是不變量，方程式的性質依賴於這個

不變量，並以這個不變量來分類。主要，人們開始明瞭，哪一些問題對於三種最重要類型的二階偏微分方程可被很好地提出並得到解決：三種類型是橢圓型，法抛物型及法雙曲型。關於雙曲型及法抛物型的問題是：柯西問題及混合問題；關於橢圓型方程的問題是：邊界問題：狄利克萊問題、諾意曼問題及混合問題以及介於它們之間的問題。

最初，數學物理裏的問題僅僅對於特別形狀的區域得到解決。後來，主要是靠了積分方程論的幫助，知道不僅對於像圓，圓柱體，球等區域，並且對任何具有適當平滑的邊界的區域解都是存在的。假設邊界上已給定的未知函數值及它的導函數是適當的平滑，對於這類區域，方程的解的存在是被證明了。

二十世紀的二十年代，一聯串新的思想滲入到不同的數學領域，這些思想形成了一個獨立的數學領域——汎函分析。過去只考慮個別的函數，現在轉而研究函數的集合。新觀點意味着對問題看法的改變。這些思想也滲入了數學物理。作爲偏微分方程論某一問題之解的函數，開始不是孤立地拿來考慮，而是和整個一類其它的函數一起作爲某一個函數空間的元素來考慮。不難想見，去尋找一個函數，僅僅依靠它自己獨個兒的性質，是比從一個已經很好地研究過的集體中把它尋找出來更爲困難。舉一個簡單通俗的比喻或許可以較好地說明究竟是怎麼一回事。設有一人初次到某大城市來，他想靠一張照片來找他所需要找的一個人。這是很困難的一件事。如果又知道這個人和一些其他人的關係，知道他的職位或住處，知道他的一些熟人，那麼我們這位新來的客人大概可以很快地找到他所要找的

人。恰好如此，如果知道某一未知函數在其它一些函數之中的位置，就可以比較容易找到它。

開始對各種函數空間進行研究，是和實變數函數論的發展密切關聯的。各種函數空間：可積分函數的空間、平方可積分函數的空間等的產生是和勒貝克積分理論的出現同時的，並且也對這種積分理論的出現起了相當的刺激作用。函數空間之間的差異，不僅在於它們由不同的元素所組成，而且也在於它們的拓樸結構的不同。在它們之中，鄰近和趨近於極限的觀念以不同的方式定義。例如，在希爾柏特空間中，如果兩個函數之差的絕對值的平方的積分很小的話，他們就可以看作很鄰近。在連續函數空間中，相鄰近的函數即差的絕對值很小的函數。

上面所談的是用函數空間裏的點來表示函數，與此同時又出現了函數空間之間的連續對應的觀念。設某一函數空間 F 中的每一元素 f 都對應另一函數空間 U 的一個元素 u。也可說，u 倚着 f 而變。如果鄰近於 f 的元素也對應到鄰近於 u 的元素，則這個對應稱為連續對應。與這個觀念的出現一起，並且也相當刺激了這一觀念的出現，在偏微分方程論中產生了這樣的問題，即是否某一數學物理問題的解，在某種意義之下，連續地隨着邊界條件而變；如果是的，問如何變？這樣，由於對函數的新看法就使得近代偏微分方程論的面貌起了決定性的改變，轉而提出了一聯串新問題：作為一個解的函數的定性研究以及對應的連續性研究等等。當數學物理各個領域的一個統一的景像被明確起來以後，方才明白，與解的存在及唯一性同樣，關於邊界值與解之間對應的連續性也是基本問題。這種連續性

的考慮使人可以分辨那些問題的提法是恰當的，那些是不恰當的。從這種觀點來看，以羃級數法解柯西問題，如同卡瓦列夫斯卡婭所完成的，是應該受到適當批評的。對於好幾類方程(例如，對拉普拉斯方程)這種解就不具有上述的連續性，而從物理的觀點來看，連續性是必要的。因此，柯西問題對於拉普拉斯方程是沒有甚麼意義。

新思想在其它有關方面也產生了後果。由解的集合的拓撲性質不僅常常可以得出存在定理和唯一性定理，並且常常得到尋找解的手續。

這就是二十世紀三十年代以前的情况。到這個時候偏微分方程論在俄國已有了優越的傳統，這個傳統在蘇維埃政權下的三十年來，被保持下來並且不斷地得到發揚光大。譬如，在俄國學者的大力參與下完成了從對各種特殊區域：例如，圓，球等提出問題到對一般(具有適當平滑邊界)的區域解決存在問題及邊值問題的過渡。A. M. 里亞普諾夫的工作在位勢論中跨進了一大步。B. A. 斯台克洛夫的卓越觀念顯出是很有成果的，斯台克洛夫用他的封閉性理論(雖然他本人並沒有意識到這一點)預示了現代的汎函分析和希爾柏特空間理論的概念及定理，因此創立了後來它們繁榮發展的基礎。

§2 新　方　法

以逼近法求解往往是偏微分方程論問題的一般理論方法，這些方法隨着把解看作何種函數空間裏的元素而各異。任何函數空間都有它自己的趨近的方式。對每一個數學物理問題

都有一個最爲自然的的函數空間與之相應。例如,許多科學家的工作表明,拉普拉斯方程的狄利克萊問題就與邊界條件所在的函數空間密切有關。設將未知函數的指定邊值用一敍列其它函數代替。對於每一個情形解這個問題即得到一敍列的解。若邊界條件一致收斂於一極限,則相應的諸解也一致收斂於某一極限。若邊界條件平均收斂於某一極限,則相應諸解也平均收斂於某一極限。

對在各種流形上給定初始條件及邊界條件的、關於有限介質振動的混合問題,希爾柏特空間常常是最自然的空間。在其中,兩個函數距離的平方是定義爲它們之差的絕對值取平方再積分。如我們在前面已經說過,函數空間裏趨近的概念,提供了一聯串解決數學物理中問題的新方法。

在這些方法中首先有:

1)按參數連續拓展法。

2)變分學中的直接法。

與新觀點有某種程度的關係,可是並不那麼樣直接的,尙有其它兩種方法即:

3)上函數及下函數法,

4)有限差分法,

也產生於最近幾十年。

不僅如此,老的方法也得到不少改進及發展。

用按參數連續拓展的方法來解不能直接解出的各種類型的方程,首先爲 C. H. 柏恩史坦在本世紀初所創立。

C. H. 柏恩史坦[1,3]的方法是基於他所證明的關於橢圓型

方程式解的解析性的一個重要定理。代替去考慮一個已給的方程，他先考慮一族含有參數的方程

$$F\left(\alpha; x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0 \qquad (1)$$

這裏的 α 在間隔 $a\leqslant\alpha\leqslant b$ 內變動。先證明對於已知邊界條件，方程的解是在整個間隔 $[a, b]$ 內參數 α 的解析函數；建立了這個結果以後，他就可以由 $\alpha=a$ 時解的存在推出當 $\alpha=b$ 時解也存在。為了要說明當 α 變動時，解的拓展可能性，C. H. 柏恩史坦證明，如果對於某一個 α_0 解存在，它就可以在 α_0 附近展開為級數，其收斂半徑 Σ 僅僅與函數以及它的到二級為止的偏導數在所討論區域中的最大絕對值有關。然後，對於解的偏導數在區域內作了極為精深的估計，他證明，二階以下的偏導函數在區域中對於所有的 α 為一致有界。這就給定了收斂圓的下界；由這個論證建立了在整個間隔中解的解析拓展的可能性。

C. H. 柏恩史坦所提供的方法非常有成效。C. H. 柏恩史坦自己曾指出，沒有太大困難就可把方法的運用範圍推廣。後來的作者們也作了這種推廣，不再需要按參數進行解析拓展，僅僅用到參數的連續變動就得到結果。

偏微分方程論近幾十年來的主要成就之一，就是在解決基本問題時的有限差分法和變分學直接法的出現；這些方法與略微早些出現的積分方程方法促成了二十世紀本門科學的重大進展。

與解常微分方程所用的有限差分法比較，以有限差分法解偏微分方程具有很多特點。

在常微分方程的情形，我們總可以用有限差的比來代替導函數，解相應的差分方程而得到原來微分方程式的近似解。這裏，精確度要看我們把獨立變數活動區域所分割成的線段的大小而定。

對於偏微分方程，情形就大不相同。如果作的不適當，常常可能當分割獨立變數的區域愈來愈細時，近似的精確度反而減低了。

自從 Л. А. 劉斯特尼克[1、2]考慮關於差分方程式解的整體性質起，有限差分法就成爲解偏微分方程問題的一個有力武器。同時他又考慮非常重要的方程（拉普拉斯方程），以及與它近似的差分方程。

黎曼頭一個指出，調和函數使狄利克萊積分

$$\iint\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy \qquad (2)$$

取極小值。（在膜的平衡問題中，這個積分表示變形的位能）。

對差分比考慮相對應的二次型的極小問題，Л. А. 劉斯特尼克證明差分方程的解收斂於狄利克萊問題的解。他所考慮的區域，不限定有一個平滑的邊緣，而可以以任意的閉集作邊緣。在這時，同前面一樣，用差分方程逼近還是可能的，不過他進而討論了那種調和函數，它們並不是在邊界上的每一點都滿足邊界條件。這裏，狄利克萊問題的精確解不存在。若在某一點邊界條件能被滿足，則 Л. А. 劉斯特尼克稱之爲正則點。若在這一點，對於某任意給的邊界條件可以不被滿足，則稱之爲非正則點。Л. А. 劉斯特尼克研究了如何判斷一個邊界點的正則性。

Л. А. 劉斯特尼克所首創的有限差分法，後來爲許多其他作者用來解決各種問題。

在這個方向，蘇聯最重要的工作是И. Г. 彼得羅夫斯基[3]和А. Н. 吉洪諾夫[1、2]的研究。

部分地應用了 С. Н. 柏恩史坦關於在區域內方程解的導函數估值的觀念，以及超調和函數的一些性質，И. Г. 彼得羅夫斯基最初給了 n 維空間中狄利克萊問題的完全解。他得到某些邊界點爲正則點的很廣的充分條件。

А. Н. 吉洪諾夫研究了有限差分法在解拋物型微分方程中應用的可能性。

以變分方法來解偏微分方程論的問題是這樣的，即暫不考慮原來的方程而先去考慮某一個積分爲極小的變分問題，而這個變分問題的歐拉方程却正是原來的偏微分方程。積分的極小是在適當的函數空間裏加以研討並可以近似地求得。代入積分中使積分趨於極小值的函數敍列在這個方法中佔據重要的地位。這種函數敍列稱爲極小函數列。

變分學直接法理論中有些主要的結果是屬於蘇聯學者的。С. Л. 索波列夫[11,13,15,16]把這種方法用來解多調方程的問題，拉普拉斯方程就是一個特例。以後我們還要回到這個問題，不過現在先就他所用的方法詳述一下。

在提出求方程解的問題時，很自然地就會把所討論的函數定爲狄利克萊積分存在的函數類。不過，是否對於所有的這類函數都可以談邊界條件，則過去是不明白的。它們在邊界上的極限值很可能根本不存在。С. Л. 索波列夫證明，若多變數函

數 u 某一個階數 l 以下的導函數爲平方可積分，則函數在各種不同維數的流形上有極限值存在。 因此，他證明了：對於狄利克萊積分存在的函數類來說，狄利克萊問題以及這問題在多調和方程上的推廣，永遠是有意義的。一般而言，在邊界上所要給的極限值不一定是連續函數，而只是平方可積分函數，在平均收斂的意義下函數對這些極限值的趨近也存在因此對於具有有界狄利克萊積分的函數來提出問題，他建立了某種完整性。

不僅如此，С. Л. 索波列夫系統地發展了利用積分方程來定偏微分方程解的性質的觀念。 直接利用積分方程他證明在區域內部的任意一點，解的任意階導函數都存在。不僅如此，我們以後還要談到，這個觀念又很容易拿來作綫性方程式廣義解的理論的基礎。

所有直接法的本質都是在於證明極小函數列收斂，而其中每一項所滿足的條件，也同樣爲這函數列的極限所滿足。

例如，爲了要使得極限函數一直到邊界都是連續的，必須函數列中所有的函數一直到邊界爲同等連續。

С. Л. 索波列夫對於他所討論的函數類證明了這種同等連續性的成立(對廣義極限在各種維數的曲面上的平均緊密性)這個事實是變分學直接法研究中非常重要的一環，它的建立可說是一個主要成就。

Л. В. 康托洛維奇有價值的研究討論了比狄利克萊積分存在的函數類爲狹的一類函數。 對於這種函數，他得到緊密性成立的比較簡單的條件。

除了變分的方法以外，在直接法範圍內還必須提到 Б. В. 卡

勒金所倡議的矩量方法。 這個方法的理論基礎爲 M. B. 凱勒德史[4]所奠定，它可以使人很快地求出非自隨伴方程式

$$Ly=0$$

滿足已給邊界條件的近似解。其觀念是將解寫爲某些滿足通常邊界條件的函數的綫性組合 $y=\Sigma a_i z_i$。 決定這展開式中的係數時產生一些積分(廣義矩量)。 如果 y 是方程式 $Ly=0$ 的一個精確解，則這些積分全爲零。現在令這些積分等於零，可以得到一系具有 m 個未知數的 m 個方程，由此來決定展開式中的係數。 解這一系 m 個方程就可得近似解。

屬於直接方法的還有 C. Л. 索波列夫[12]的理論，以史瓦慈的反射原理對於兩個區域之和或兩個區域的交截來解邊界問題。 他證明，在這種情形步驟的收斂是簡單的變分學考慮的後果。

還有 H. M. 克雷洛夫與 H. H. 波果劉波夫關於變分學直接法誤差之估計的工作。

關於積分方程的方法此地將不提到，因爲這是另一文的內容。

在新的建設性的解偏微分方程的方法中，可以提到的有對於解許多波動論問題所用的函數不變解的方法，這種方法是 B. И. 斯米爾諾夫與 C. Л. 索波列夫[1,2,3,4]* 所創。這些作者指出了波動方程

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{3}$$

* 又見 C. Л. 索波列夫[4,5,6,8,10]。

特別的一類解。函數 u 屬於這一類，若不僅 u 本身是波動方程的解，並且 u 的任意函數 $f(u)$ 也是一個解。

В. И. 斯米爾諾夫與 С. Л. 索波列夫的函數不變解同時滿足兩個方程。除了波動方程之外，它還滿足特徵方程。最簡單的數學物理方程的解之中有兩類這樣的函數不變解久已爲人所知。那就是波動方程的形式如

$$x\pm at \tag{4}$$

的解及拉普拉斯方程的寫成複變數形式

$$z=x+iy \tag{5}$$

的解。第一個解的任何一個實函數仍然是一個解。第二個解的任何一個在複平面上爲解析的函數都是解。

В. И. 斯米爾諾夫與 С. Л. 索波列夫所造出的一類解是由下面的方程來決定：

$$m(u)t+\Sigma l_i(u)x_i=p(u), \tag{6}$$

此處

$$\Sigma l_i^2=m^2 \tag{7}$$

恆等地成立。在這一類解中包括了形式如平面波的解，以及形式如座標之複線性組合的解，但是這個公式所給的解的範圍異常之廣。В. И. 斯米爾諾夫與 С. Л. 索波列夫證明，對於含三個變數的問題，在這類解中包括了重要的振動起源類型的初等解。化爲波動方程後的彈性力學的方程也有這類解。

在函數不變解類型中，和代表射入彈性波的解一起也包含那種表示從平面邊界反射出來的波的解。由於這些，В. И. 斯米爾諾夫與 С. Л. 索波列夫就很方便地給了層狀介質振動一般問

題的解一個精密的形式。 各向異性介質內振動的問題爲 *B.* 斯維克洛所解決*

應用這種函數不變解，就可以在明顯的形式下解常振動的折射問題及三維空間內彈性波反射問題。就可以建立雷勒 (Rayleigh) 表面波的嚴格理論並提供一系列理論地震學方面一些定性的結果。 再加上叠置法的應用，B. И. 斯米爾諾夫因此給了許多振動問題 (球振動，圓振動等) 以新的解法。 B. И. 斯米爾諾夫與索波列夫的工作是關於平面問題 (兩個空間變數)。 H. П. 葉魯金[1]給出具三個空間變數的函數不變解的一般形式。

對於波之傳播理論的古典研究，主要是牽涉到具常數係數的方程。 C. Л. 索波列夫[3,7,14]給出解具有變數係數的法雙曲方程的新方法。 這個方法是基於把關於波動方程的所謂克契荷夫 (Kircheoff) 公式加以推廣。 在通過 x 及 t 空間某已知點的特徵錐面上，未知函數相繼兩個導函數之間存在着一種微分關係；這表現出一件事實，就是它們是不能够互相無關地給出的。 利用這些關係可以造出關於未知函數的一個伏爾特拉 (Volterra) 型積分方程，這個積分方程是可用逐次逼近法來解的。

C. Л. 索波列夫的方法使 C. A. 赫利斯蔣諾維契[1]解決了非綫性方程的柯西問題，把問題化爲一個伏爾特拉型積分方程式。

§ 3 新 問 題

從發展的觀點來看，新問題的提出和產生對於每一門數學

* 列寧格勒大學論文