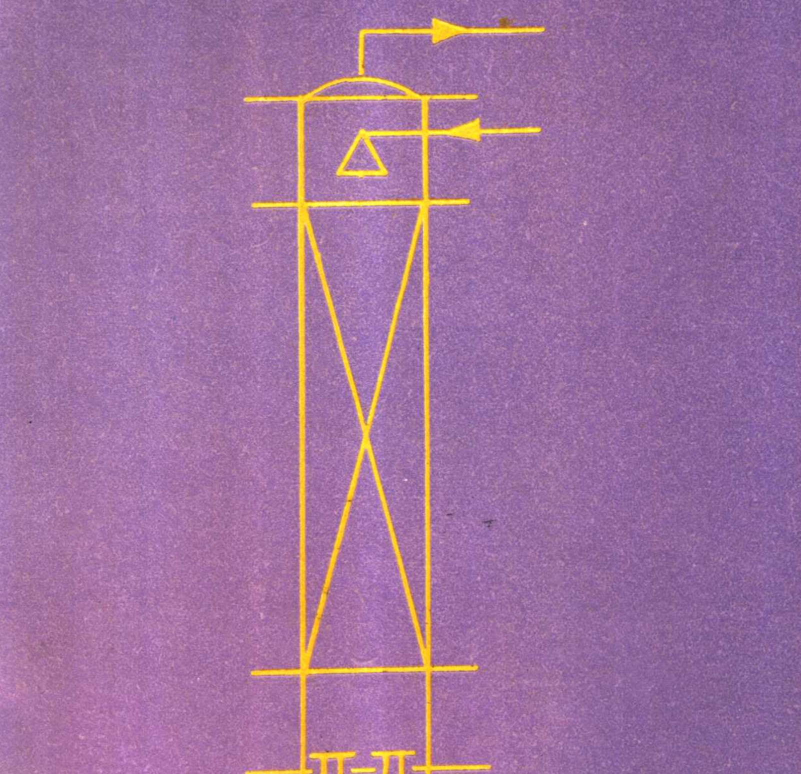
化工原理实验

HUA GONG YUAN LI SHI YAN

王书礼　吉　欣　郭新勇



河南大学出版社

化工原理实验

王书礼　吉　欣　郭新勇

河南大学出版社

(豫)新登字第 09 号

化工原理实验

王书礼　吉　欣　郭新勇

责任编辑　马尚文

河南大学出版社出版
(开封市明伦街 85 号)
河南省新华书店发行
河南大学印刷厂印刷

开本:787×1092　毫米 1/16　印张:6.875　字数:160 千字
1993 年 1 月第 1 版　　1993 年 1 月第 1 次印刷
印数:1—1500　　定价:2.30 元

ISBN7-81018-824-0/O·46

前　言

化工原理是化学工程、化学工艺类及其它相近专业的一门主干课。化工原理主要研究化工生产过程中前、后处理的物理过程。其研究方法主要是理论解析和在理论指导下的实验研究。

实验是化工原理教学中一个重要的实践环节，也可单独设课。通过实验教学，不但可以使学生巩固和加深对课堂教学内容的理解，得到化工实际技能的基本训练，同时还可以提高学生运用自然科学的原理考察、解释和处理工程实际问题的能力，从而大大加强学生的工程观点。

本书共包括演示实验、定量实验、实验数据处理方法，某些实验装置的制作，常用仪器的使用方法以及附录六部分。主要介绍反映化工原理基本概念的流体流动形态与流速分布等 10 个(直观教学手段)演示实验以及反映化工原理基本规律的流体在管路中流动阻力的测定等 10 个定量实验。

本书根据全国化工原理教学指导委员会制定的实验基本要求进行编写，每个实验都分别介绍了实验目的、实验原理、实验装置、实验步骤、实验记录与数据处理以及问题讨论等几大部分，具有较强的实用性和通用性。它既可作为高等院校化工原理的实验教材，也可作为从事化工、石油、轻工、食品等工程方面的技术人员进行科研和设计的参考书。

由于编者水平有限，书中难免存在一些缺点和错误，望读者提出宝贵意见。

编　者

1992 年 2 月

目　　录

1　实验数据的处理方法

1.1　实验数据测量中的误差

在实验数据的测量中，由于外界条件的影响、仪器装置的优劣以及感觉器官的限制，测得的数据只能达到一定的准确度。实验测量时，事先了解测量所能达到的准确程度，以及在实验以后科学地分析和处理数据的误差，对提高实验水平可起到一定的指导作用。另外，了解误差的种类、起因和性质，就可帮助我们抓住提高准确度的关键，集中精力突破难点。通过对实验过程的误差分析，还可以帮助我们挑选合适的实验条件。实验者如缺乏误差的观点，测量过程中将带有一定的盲目性，往往得不到理想的实验结果。

1.1.1　误差类型及来源

测量误差一般可分为系统误差、偶然误差和过失误差。

1.1.1.1　*系统误差*

在相同条件下，多次测量同一物理量时，测量误差的大小和符号都不变；在改变测量条件时，它又按照某一确定规律而变化的测量误差称为系统误差。系统误差不具有抵偿性，即在相同条件下重复多次测量，系统误差无法相互抵消，产生系统误差的因素是可以被发现和加以克服的。

产生系统误差的因素主要有以下方面：

①仪器构造不完善。如温度计、移液管、压力计、电表的刻度不够准确，而又未校验。

②测量方法本身的影响。如采用了近似测量方法和近似公式。

③环境方面的影响。如需要在恒温下测量而未恒温。

④化学试剂纯度不够的影响。

⑤测量者操作习惯的影响。如滴定时等当点总是偏高或偏低。

在测量过程中，如存在着较大的系统误差，就必须认真找出产生系统误差的因素，并应尽力设法消除或减小之，其方法有：

①消除根源法　从产生误差的根源上消除系统误差是最根本的方法。它要求实验者对测量过程中可能产生系统误差的各种环节作仔细分析，找出原因并在测量前加以消除。如为了防止仪器的调整误差，在测量前要正确和严格地调整仪器；又如为了防止测量过程中仪器零点变动，在测量开始和测量结束时都应校核零点；再如为了防止在长期使用时仪器精度降低，就要定期进行严格的检验与维护。若系统误差是由外界条件变化引起的，应在外界条件比较稳定时进行测量。

②修正法　这种方法是预先将仪器的系统误差验定或计算出来，做出误差表或误差曲线，然后取与误差数值大小相同而符号相反的值做为修正值，进行误差修正。即

$$x_{真}=x_{测}+x_{修}$$

③折中法　这种方法要求进行两次测量，使两次读数时出现的系统误差大小相等符号相反。两次测得的平均值作为测量结果，以消除系统误差。例如由于仪器灵敏度的限制，测量仪器的旋钮往往由右边调近测量值与由左边调近测量值的结果不同。这时，可取两个读数的平均值作为测量值。

1.1.1.2　偶然误差

实验测量时，即使采用了最完善的仪器，选择了最恰当的方法，经过了十分精细的观测，所测得的数据也不可能每次重复。在数据的末一位或二位数字上仍会有差别，即存在着一定的误差。这是由许多偶然因素造成的，这种由于随机性因素的影响而导致的测量误差 称偶然误差。偶然误差虽可通过改进仪器和测量技术以及提高实验操作的熟练程度来减小，但有一定的限度，所以说偶然误差的存在是不可避免的。偶然误差有时大、有时小、有时正、有时负，方向不一定。偶然误差的大小和符号，一般符合正态分布规律。它可采取多次测量取平均值的办法来消除，而且测量次数越多(在没有系统误差的情况下)，平均值就越接近于“真值”。

常用的平均值有算术平均值、均方根平均值和几何平均值。

$$算术平均值\ \bar{x}=\frac{x_1+x_2\cdots+x_n}{n}$$

式中：　$x_1,x_2,\cdots$为测量值，n为测量次数。

$$均方根平均值\ x_m=\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2\cdots+x_n^2}{n}}$$

$$几何平均值\ x_g=\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}$$

在碰到的观测值中，大多为正态分布类型。在这种类型的一组等精密度测量值中，算术平均值为最佳值或最可信赖值。

1.1.1.3　过失误差

由于测量过程中明显歪曲测量结果带来的误差，称为过失误差。这种误差是由于实验者犯了某种不应犯的错误所引起的，如标度看错、记录写错等。这种错误在测量中应尽量避免。

1.1.2　误差表示方法

1.1.2.1　绝对误差

$$绝对误差=测量值-真值$$

1.1.2.2　相对误差

$$相对误差=\frac{绝对误差}{真\quad值}$$

1.1.2.3　引用误差

为了计算和划分仪器准确度等级方便，规定取仪器最大刻度值作分母表示的相对误

差，称为引用误差。即

$$引用误差=\frac{示值误差}{满刻度值}$$

式中，示值误差为仪表指示值与真值之差。

1.2 有效数字及其运算规则

测量的误差问题紧密地与正确记录（测量结果）联系在一起，由于测得的物理量或多或少都有误差，所以一个物理量的数值和数学上的数值就有着不同的意义。例如：

数学上　1.35＝1.3500……

物理上　(1.35±0.01)米≠(1.3500±0.0001)米

这是因为物理量的数值不仅能反映出量的大小和数值的可靠程度，而且还反映了仪器的精确程度和实验方法。如(1.35±0.01)米可用普通米尺测量，而(1.3500±0.0001)米则只能采用更精密的仪器才能测量。因此物理量的每一位数都是有实意的。有效数字的位数就指明了测量精确的幅度，它包括测量中可靠的几位和最后估计的一位数，它应是除定位用的“0”以外的数位。例如 0.02306 的有效数字有四位，小数点前面的“0”和小数点后面第一个“0”都是定位用的，3.5040 有五位，80.00 有四位。在科学与工程中，为了清楚地表示数值的精度与准确度，通常将有效数字写成小数点前面一位整数，后面乘以 10 的整数幂的表达形式，这种记数方法称为科学记数法。如

10340 若有效数字为五位，则写成 1.0340×10^4；

0.00000135 只有三位有效数字，可写成 1.35×10^{-6}。

有效数字的运算规则：

①在加减运算中，各数所保留的小数点后的位数，与各数中小数点后的位数最少的相一致。对舍去的数，可按“四舍六入五成双”处理，即若末位有效数字后面第一位数字等于或小于 4 时舍去；等于或大于 6 时进位；等于 5 时，末位有效数字为奇数则进位，为偶数则舍去。例如，将 13.65、0.0082、1.625 三数相加，应写成

$$13.65+0.01+1.62=15.28$$

②在乘除运算中，各数所保留的有效数字的位数，以原来各数中有效数字位数最少的那个数为准。所得结果的有效数字位数，应与原来各数中有效数字最少的数相同。例如，将 0.0121、25.64、1.05782 三数相乘，应写成

$$0.0121\times25.6\times1.06=0.328$$

③在对数运算中，所取对数位数与真数有效数字位数相同。

1.3 实验数据的处理

1.3.1 数据计算

①在实验中，为了求得各种量的变化规律，往往要记录多组数据。有时为获得一个较

准确的数据，要对某一个量测取多次数据，然后取其平均值。在这种情况下，往往将实验过程中不变的各物理量，归纳成一个“计算因子”，以简化数字的运算。如计算 Re 时，就可将实验过程中不变的 d、ρ、μ 归纳成“计算因子”$d\rho/\mu$，然后分别乘以各组的速度量 u 即可。

②在实验数据计算过程中，应写出一组数据的完整计算过程，以便于验证在计算方法和数字计算上有无错误，并可根据数据的范围判断结果是否合理。例如管内流体作湍动时，λ 值一般在 0.02～0.03 范围。如果计算结果偏离该范围较远，那肯定错了，可及时纠正，避免一错到底。

③在计算中应注意有效数字，中间数据可多保留一或二位不定数字。

1.3.2 数据整理

实验数据要应用最适宜的方式表示出来。在化学工程实验中，有以下三种表达方式：

1.3.2.1 列表法

将实验直接测定的一组数据，或根据测量值计算得到的一组数据，按照自变量和因变量的关系，以一定的顺序列出数据表。在拟表时应注意下列问题：

①每一个表都应有简明而完备的名称；

②表头应列出变量名称和单位，表中数据不再带单位；

③注意有效数字的位数，每行数据的小数点应对齐；

④较大或较小的数字，可用科学记数法，公共的乘方因子应列在表头。

1.3.2.2 图示法

实验数据的计算结果用曲线表示出来，可以直接显示出数据的特点，如极大、极小、转折点等，同时能够利用图形具体特点，作数据的进一步处理。作图应遵循一些基本原则，否则得不到预期的结果，甚至导致错误的结论。下面列出化学工程实验中作图的基本原则：

①坐标的选择　化学工程实验数据处理中常用的坐标，为直角坐标、半对数坐标、双对数坐标，以使变量间呈简明的规律。如符合 $y=mx+b$ 的数据，选用直角坐标，标绘后可得一条直线；对符合 $y=ax^n$ 的数据，选用直角坐标，标绘后得到的是曲线，而选用双对数坐标，标绘后可得一条直线；对于符合 $y=k^{ax}$ 的数据，选用半对数坐标，标绘后可得一条直线。

当变量多于两个时，如 $y=f(x,z)$，在作图时，先固定一个变量，如使 z 固定，求出 $y-x$ 关系，这样可得每个 z 值下的一组图线。例如在作填料吸收塔的流体力学特性测定时，就是采用此标绘方法，在双对数坐标上标出各喷淋量 L 下的空塔气速 u 与压降 Δp 的关系图线的。

②坐标的分度　一般取独立变量为 x 轴，因变量为 y 轴，在两轴侧要标明变量名称、符号和单位。坐标分度的选择，应反映出全部实验数据的有效数字位数。分度的选择还应使数据容易读取。分度值不一定从零开始，以使所得图形能占满全幅坐标纸，且匀称居中。若标绘出的是直线，则应使直线的斜率接近于 1。

③实验数据的标绘　若在同一张坐标纸上标绘几组测量值或计算数据，则应用不同

符号(如●、×、△、○、□等)加以区别。标出实验点后,用曲线板、直尺或三角板画出尽可能接近各实验点的曲线或直线,曲线应光滑均匀。

④对数标绘　标在对数坐标轴上的值是真数。对数坐标原点从 1 开始，而不是零。在对数坐标上求斜率的方法,与直角坐标上的求法不同。双对数坐标纸上直线的斜率,需要用对数值来求算，或者直接用尺子在坐标纸上量取线段长度求取。如图 1.3－1 中所示 AB 线的斜率为

$$斜率 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\lg y_2 - \lg y_1}{\lg x_2 - \lg x_1}$$

式中 Δy 与 Δx 的数值,为用尺子测量而得的线段长度的数值。

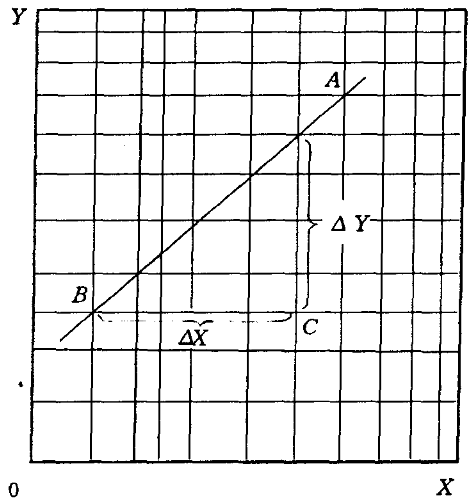


图 1.3－1

1.3.2.3　方程表示法

化学工程上通常需将实验数据或计算结果用数学方程或经验公式的形式表示出来。经验公式表示的关键是如何确定公式中的常数。求经验式中常数的方法,常用图解法和最小二乘法。

1.3.2.3.1　图解法

将数据在适当的坐标纸上标绘出直线后，根据直线的斜率和截距很容易求得经验公式的常数。

1.3.2.3.2　最小二乘法

数据在坐标纸上标绘直线,往往带有一定的随意性，有时不能合理地代表实验结果。怎样才能使所得到的经验公式合理地代表实验结果呢？最小二乘法是一种较好的数学方法。最小二乘法的基本原理,是通过实验点画出一条误差最小的线，即最佳的直线就是能使各数据点同回归线方程求出值的偏差的平方和为最小。用最小二乘法处理实验数据，不仅可以对具有线性规律的实验点作线性回归(或拟合),还可以根据不同规律的实验数据作平面、曲线、曲面回归，确定这些方程的常数。所以最小二乘法是处理实验数据的一

种重要方法。

近年来随着电子计算机的普及应用，此方法的应用更加广泛。下面介绍该方法的原理和应用，此介绍仅限于本书实验所涉及的范围。

① 一元线性回归(求直线方程的常数)

参数为双变量，如 y、x，而且数据具有线性关系，可以用最小二乘法确定直线方程的常数。这种方法称为线性回归或称直线拟合，获得的直线称为回归直线。

设有 n 个实验数据点(x_1,y_1),$(x_2,y_2,)$,…,(x_n,y_n)，变量间关系将拟合为线性方程

$$y = b + mx \tag{1}$$

据方程(1)，有 n 个 x 值可以计算出各对应的 y 值，计算值用 y' 表示，有

$$\left.\begin{aligned} y'_1 &= b + mx_1 \\ y'_2 &= b + mx_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y'_n &= b + mx_n \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

实测得的每个 x 值所对应的为 y 值，每个 y 与对应的 y' 的偏差用 d 表示，则

$$\left.\begin{aligned} d_1 &= y_1 - y'_1 = y_1 - (b + mx_1) \\ d_2 &= y_2 - y'_2 = y_2 - (b + mx_2) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d_n &= y_n - y'_n = y_n - (b + mx_n) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

按照最小二乘法的原理，测量值与真值(回归方程计算值)之间的偏差平方和最小。即

$$\sum d_i^2 = \sum (y_i - b - mx_i)^2 \tag{4}$$

式中 y_i,x_i 为已知实验数据值，b,m 为未知变量。为求式(4)最小值，须利用微积分中求极值条件，分别对变量 b,m 求偏导并令其等于零，即

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\sum d_i^2)}{\partial b} &= -2(y_1 - b - mx_1) - 2(y_2 - b - mx_2) - \cdots - 2(y_n - b - mx_n) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\sum d_i^2)}{\partial m} &= -2x_1(y_1 - b - mx_1) - 2x_2(y_2 - b - mx_2) - \cdots - 2x_n(y_n - b - mx_n) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

写成和式

$$\begin{aligned} &\sum y_i - nb - m\sum x_i = 0 \\ &\sum x_i y_i - b\sum x_i - m\sum x_i^2 = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

解得

$$b = \frac{\sum x_i y_i \cdot \sum x_i - \sum y_i \cdot \sum x_i^2}{(\sum x_i)^2 - n\sum x_i^2} \tag{8}$$

$$m = \frac{\sum x_i \cdot \sum y_i - n\sum x_i y_i}{(\sum x_i)^2 - n\sum x_i^2} \tag{9}$$

由给出的实验点的数据，可以求出直线的截距和斜率。

为了解两个变量之间的线性程度，或检验实验数据是否具有线性关系，就必须计算相关系数(γ)的大小。下面推导相关系数γ的计算式。

由式(7)可得

$$b = \frac{\sum y_i - m\sum x_i}{n} = \bar{y} - m\bar{x} \tag{10}$$

$$m = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \tag{11}$$

上两式中 $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$，$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}$，$n$为实验点数。

将(10)、(11)式的关系代入偏差平方和关系式

$$\begin{aligned}\sum d_i^2 &= \sum (y_i - b - mx_i)^2 \\ &= \sum (y_i - \bar{y} + m\bar{x} - mx_i)^2 \\ &= \sum (y_i - \bar{y})^2 - m^2\sum (x_i - \bar{x})^2 \\ &= \sum (y_i - \bar{y})^2 \left[1 - \frac{m^2\sum (x_i - \bar{x})^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}\right]\end{aligned} \tag{12}$$

令

$$\gamma^2 = \frac{m^2\sum (x_i - \bar{x})^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} \tag{13}$$

将式(11)代入式(13)，两边开方得

$$\gamma = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}} \tag{14}$$

相关系数γ的符号取决于$\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$，与$m$的符号一致。由于$\sum d_i^2 \geqslant 0$，由式(12)得$\gamma^2 \leqslant 1$，即$-1 \leqslant \gamma \leqslant 1$。

相关系数的意义可由下面看出：

当$\gamma = \pm 1$时，$\sum d_i^2 = 0$，即n组实验值(x_i, y_i)全部落在直线$y' = b + mx$上，此时称为完全相关，如图1.3－2所示。

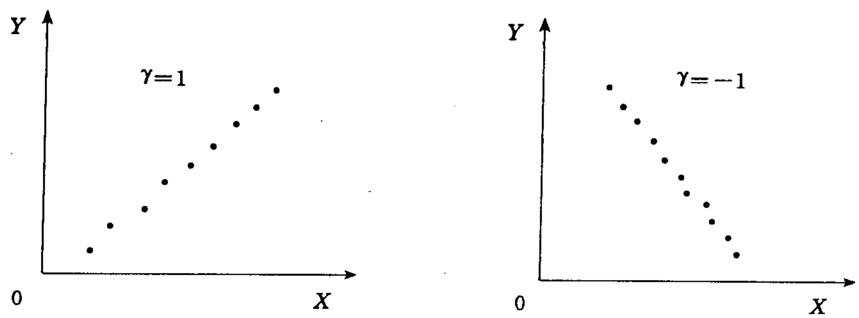


图 1.3－2

当 $|\gamma|$ 越接近 1 时，$\sum d_i^2$ 越小，即 n 组实验值 (x_i, y_i) 越靠近直线 $y'=b+mx$，变量 y 与 x 之间关系越近似于线性关系，如图 1.3－3 所示。

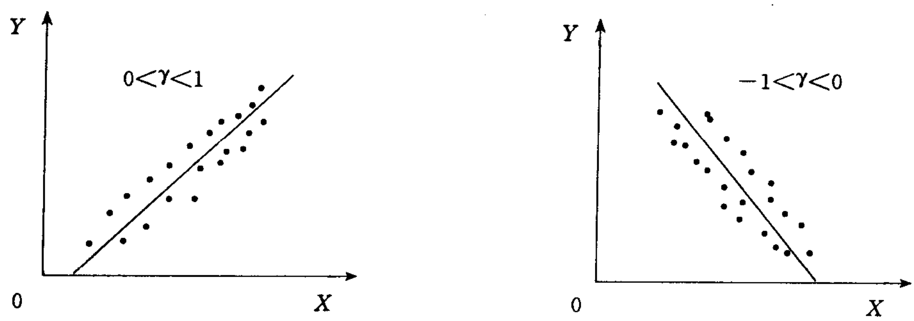


图 1.3－3

当 $\gamma=0$ 时，变量之间就完全没有线性关系了，如图 1.3－4 所示。

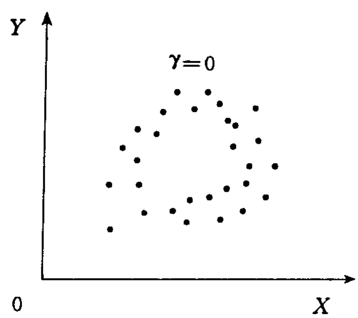


图 1.3－4

必须注意，$\gamma=0$，仅说明 y 与 x 之间不存在线性关系，并不说明 y 与 x 之间不存在其它相关关系。

下面是用 BASIC 语言编出的计算回归直线斜率和截距的计算程序（IBM PC 机通过）：

```
10 INPUT I
20 S0=0,S1=0,S2=0,S3=0,N=0
30 INPUT Y,X
40 S0=S0+X : S1=S1+Y : S2=S2+X^2 : S3=S3+X*Y
50 N=N+1
60 IF I>N THEN 30
70 M=(S1*S0-N*S3)/(S1^2-N*S2)
80 B=(S1*S3-S2*S0)/(S1^2-N*S2)
90 PRINT"m=";M
100 PRINT "b=";B
110 END
```

符号说明：

I —— 实验数据组数 n；

Y —— 实验变量 y_i；

X —— 实验变量 x_i；

M —— 回归直线方程的斜率 m；

B —— 回归直线方程的截距 b。

② 二元线性回归

前面讨论的只是两个变量的回归问题，其中因变量只与一个自变量有关，这是较简单的情况。在大多数的实际问题中，影响因变量的因素不是一个而是多个，则称这类回归为多元回归分析。多元线性回归的原理与一元线性回归完全相同，但在计算上却要复杂得多。这里只介绍二元线性回归。

流体在水平圆形直管中作强制湍流加热时的传热膜系数准数关联式为

$$Nu = 0.023Re^{0.8}Pr^{0.4}$$

式中的常数 0.023、0.8、0.4 就可以由最小二乘法原理求得。首先将方程两边取对数，将指数关系式变成 $y=b_0+b_1x_1+b_2x_2$ 的线性关系，由实验得到的 n 组 x_1, x_2, y 值，用最小二乘法原理进行实验数据的关联处理，求解待定系数。

下面简单推导其数学表达式：

设欲回归为线性关系式 $$y' = b_0 + b_1x_i + b_2x_2 \tag{15}$$

由 n 组 x_1， x_2 值可计算出各对应的 y' 值，即

$$\left.\begin{aligned} y'_1 &= b_0 + b_1x_{11} + b_2x_{21} \\ y'_2 &= b_0 + b_1x_{12} + b_2x_{22} \\ &\cdots\cdots\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y'_n &= b_0 + b_1x_{1n} + b_2x_{2n} \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

每组实验值与对应计算值 y' 的偏差为

$$\left.\begin{aligned}
d_1 &= y_1 - y'_1 = y_1 - (b_0 + b_1 x_{11} + b_2 x_{21}) \\
d_2 &= y_2 - y'_2 = y_2 - (b_0 + b_1 x_{12} + b_2 x_{22}) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
d_n &= y_n - y'_n = y_n - (b_0 + b_1 x_{1n} + b_2 x_{2n})
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

由最小二乘法原理，测量值与真值之间偏差平方和为最小。$\sum d_i^2$最小值的必要条件为

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial(\sum d_i^2)}{\partial b_0} &= 0 \\
\frac{\partial(\sum d_i^2)}{\partial b_1} &= 0 \\
\frac{\partial(\sum d_i^2)}{\partial b_2} &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

展开整理得

$$\left.\begin{aligned}
& nb_0 + b_1\sum x_{1i} + b_2\sum x_{2i} - \sum y_i = 0 \\
& b_0\sum x_{1i} + b_1\sum x_{1i}{}^2 + b_2\sum x_{1i}x_{2i} - \sum x_{1i}y_i = 0 \\
& b_0\sum x_{2i} + b_1\sum x_{1i}x_{2i} + b_2\sum x_{2i}^2 - \sum x_{2i}y_i = 0
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

方程组可以利用消元法解，也可以用计算三阶行列式的方法求解。例如用行列式求解 b_0, b_1, b_2，则令

$$D_0 = \begin{vmatrix} n & \sum x_{1i} & \sum x_{2i} \\ \sum x_{1i} & \sum x_{1i}^2 & \sum x_{1i}x_{2i} \\ \sum x_{2i} & \sum x_{1i}x_{2i} & \sum x_{2i}^2 \end{vmatrix}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} \sum y_i & \sum x_{1i} & \sum x_{2i} \\ \sum x_{1i}y_i & \sum x_{1i}^2 & \sum x_{1i}x_{2i} \\ \sum x_{2i}y_i & \sum x_{1i}x_{2i} & \sum x_{2i}^2 \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} n & \sum y_i & \sum x_{2i} \\ \sum x_{1i} & \sum x_{1i}y_i & \sum x_{1i}x_{2i} \\ \sum x_{2i} & \sum x_{2i}y_i & \sum x_{2i}^2 \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} n & \sum x_{1i} & \sum y_i \\ \sum x_{1i} & \sum x_{1i}^2 & \sum x_{1i}y_i \\ \sum x_{2i} & \sum x_{1i}x_{2i} & \sum x_{2i}y_i \end{vmatrix}$$

由此求得

$$b_0 = \frac{D_1}{D_0}, \qquad b_1 = \frac{D_2}{D_0}, \qquad b_2 = \frac{D_3}{D_0}$$

下面是用 BASIC 语言编出的二元线性回归的计算程序：

```
10 INPUT "N=";N
15 DIM A(3,4),S(3,4),Y(N),X1(N),X2(N),D(3)
20 FOR I=1 TO N
25 PRINT "X1(";I;")=";
30 INPUT X1(I)
35 PRINT "X2(";I;")=";
40 INPUT X2(I)
45 PRINT "Y(";I;")=";
50 INPUT Y(I)
55 NEXT I
60 FOR J=1 TO 4 : FOR I=1 TO 3 : A(I,J)=0 : NEXT I : NEXT J
65 A(1,1)=N
70 FOR I=1 TO N
75 A(1,2)=A(1,2)+X1(I) : A(1,3)=A(1,3)+X2(I) : A(1,4)
   =A(1,4)+Y(I)
80 A(2,1)=A(1,2) : A(2,2)=A(2,2)+X1(I)^2 : A(2,3)
   =A(2,3)+X1(I)*X2(I)
85 A(2,4)=A(2,4)+X1(I)*Y(I)
90 A(3,1)=A(1,3) : A(3,2)=A(2,3) : A(3,3)=A(3,3)+X2(I)^2 : A(3,4)
   = A(3,4)+X2(I)*Y(I)
95 NEXT I
100 K=0
105 FOR J=1 TO 4 : FOR I=1 TO 3 : S(I,J)=A(I,J) : NEXT I : NEXT J
110 IF K=0 THEN 130
115 J=K
120 FOR I=1 TO 3
125 S(I,J)=A(I,4) : NEXT I
130 D1=S(1,1)*(S(2,2)*S(3,3)-S(3,2)*S(2,3))
135 D2=S(2,1)*(S(1,2)*S(3,3)-S(3,2)*S(1,3))
140 D3=S(3,1)*(S(1,2)*S(2,3)-S(2,2)*S(1,3))
```