

复旦学子隆重推荐

独创的编写体系

资深的编写队伍

一流的讲解分析

经典的操练测试

本丛书编委会 编

本册主编 袁建平 周宁医

高中学科

知识方法与实践

高三数学基础知能分册

文匯出版社

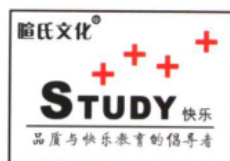
丛书策划：上海暄氏文化信息咨询有限公司

用复旦人的智慧，

超越品质图书的巅峰！

夏乾良

复旦大学传奇学子
全国十大新闻人物



ISBN 7-80741-077-9



9 787807 410775 >

定价：94.00元（共四册）

高中学科知识方法与实践

(高三数学基础知能分册)

本丛书编委会 编

本册主编：袁建平 周宁医

(上海市建平中学)

本册编委：(按姓氏笔画排序)

何作勇 吴惠逸 周宁医 陶志诚

袁建平 高云霞 谢立竿 颜国连

文匯出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中学科知识方法与实践. 高三数学基础知能分册 /
《高中学科知识方法与实践》编委会编. —上海: 文汇出版
社, 2006. 9

ISBN 7-80741-077-9

I. 高... II. 高... III. 数学课—高中—教学参考
资料 IV G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 098517 号

高中学科知识方法与实践

高三数学基础知能分册

编 写 / 本丛书编委会

责任编辑 / 张建德

特约编辑 / 宋 莺

出版发行 / 文汇出版社

上海市威海路 755 号

(邮政编码 200041)

经 销 / 全国新华书店

印 刷 / 上海市北书刊印刷有限公司

版 次 / 2006 年 9 月第 1 版

印 次 / 2006 年 9 月第 1 次印刷

开 本 / 787×1092 1/16

字 数 / 1160 千

印 张 / 58

印 数 / 1-5000

ISBN 7-80741-077-9 / G·039

定 价 / 94.00 元(共 4 册)

前 言

感谢老师和同学们选择本书作为高三数学复习用书,欢迎各位老师和同学们与我们一起投入到高三数学复习的创新实践,在此祝愿同学们高考成功!

本书是《高中学科知识方法与实践》中的高三数学分册,它采用了区别于目前的高三数学复习用书的编写体系,使之更贴近于教与学,更有效地提高复习效率。

下面简略地介绍本书的特点及使用指南:

1. 本书第一轮复习以一周为学习周期,通过精心设计把高考数学内容分成二十一讲,其中一讲即为一周的学习内容,每讲分三篇:知识篇、方法篇、训练篇;知识篇为本讲知识点的预习内容,方法篇为例题精选,共安排4-5课时,训练篇为对应的课时练习及每周的实战练习(测试题)。

2. 方法篇是本丛书的核心内容之一,本篇分三个模块:

① 基础导析:以基本题型来细化本讲的基本知识和基本方法,其所选的例题尽可能涵盖本讲复习内容,一般为2课时,内容较多的安排3课时,这部分内容是每位高三学生都必须学习和掌握的;

② 重难点选讲:每讲精选一个重难点内容,以专题形式进行简明扼要的分析、归纳和小结。这些内容通常是学生们复习的“知识瓶颈”,突破了它们则学习就变得轻松自如,具有“纲举目张”的作用。这部分内容安排1课时,是每位高三学生应努力复习好的;

③ 能力与发展:课本上涉及较少但又往往是高考能力考查及关注的内容,本书对其进行简要的介绍与分析,分两小块:创新学习与研究性学习,共1课时。其中,创新学习含概念辨析、新题新法和优秀试题选3个例题(2个小题、1个大题),研究性学习按专题形式编写,含2个例题。这部分内容较丰富,所选例题有一定难度,各级各类学校可以根据各自情况酌情选用,是那些希望高考争取高分的学生需力争努力学习的内容。

3. 训练篇对应方法篇中三个模块的课时练习及每周的实战练(测试题),也是颇具特色的又一核心内容,本篇分三类:

① 基础练:精选与方法篇中基础导析相对应的基本内容和题型,是每位学生必做习题(30-45分钟);

② 专题练:分两个专题,其中专题(1)为本讲方法篇中重难点选讲所对应的专题训练,是学生重点强化习题,为每位学生应努力做好的习题(30-45分钟);专题(2)是与本讲内容相对应的学生能力拓展习题,这部分有目的地选了最近的一些新颖题及能力题,主要是为了学生更好地适应目前高考的能力考查,可选做,力争努力完成(30-45分钟)。

③ 实战练:这是与本讲所学全部内容相对应的测试题,也可以作为周六学生作业,其难度参照高考试题的要求,同学们可用此来及时检验自己对本讲内容掌握的程度,是每位学生都应做的习题(90-100分钟)。

4. 《高中学科知识方法与实践》高三数学基础知能分册和实战测试分册,其中后者含二十一讲的实战练、八个阶段考测试及八个基础练习卷。

本书为各级各类高中的莘莘学子提供了一套集知识、方法及训练为一体的翔实完备的学习资料,参加编写的都是长期奋战在教学第一线的名师、学科带头人、骨干教师、高级教师等,对同学们学好数学必将大有裨益;使用本书对象为各级各类中学的高一至高三的学生,对高中数学教师也具有很好的参考价值。

《高中学科知识方法与实践》(数学分册)由下列系列书构成:

◆ 高中学科知识方法与实践(高一上、下)

◆ 高中学科知识方法与实践(高二上、下)

◆ 高中学科知识方法与实践(高三)

本书由主编袁建平、周宁医策划。本册编者:陶志诚(第1、6、7讲;专题六等)、颜国连(第2、7、8讲;专题八等)、袁建平(第3、5、9、10讲;专题三等)、吴惠逸(第4、11讲;专题二等)、周宁医(第12、16、20、21讲;专题七等)、何作勇(第13、14、19讲;专题三等)、高云霞(第15讲等)、谢立竿(第17、18讲;专题四、五等)。其中第1-11讲由袁建平审定,第12-21讲由周宁医审定。这里还要特别感谢戴丽君、邓武红、赵丽强、洪萍、刘雪琴、杨术林等老师为本书所作的校对及审读工作。

由于本丛书立意新颖,编写难度较大,又受作者水平所限,书中难免有疏漏之处,敬请读者不吝指正。联系地址:yuanjp518@yahoo.com.cn zhny2005@sina.com

编 者

2006年8月

目 录

第一轮复习

第一讲 集合与命题	(1)
【知识篇】 知识要点	(1)
复习目标	(2)
参考内容	(2)
【方法篇】 基础导析:1. 集合的概念及其运算	(3)
2. 命题与充要条件	(4)
重难点选讲:3. 含参数的集合运算及其讨论	(5)
能力与发展:4.1 创新学习	(7)
4.2 研究性学习:集合中的探索问题	(8)
【训练篇】 基础练	(9)
专题练	(11)
第二讲 不等式	(13)
【知识篇】 知识要点	(13)
复习目标	(14)
参考内容	(14)
【方法篇】 基础导析:1. 不等式的概念和性质	(15)
2. 不等式的解法	(16)
3. 不等式的证明与应用	(18)
重难点选讲:4. 含参数的不等式及其讨论	(19)
能力与发展:5.1 创新学习	(21)
5.2 研究性学习:一元二次方程根的分布	(22)
【训练篇】 基础练	(24)
专题练	(26)
第三讲 函数(I)——函数的基本概念与性质	(28)
【知识篇】 知识要点	(28)
复习目标	(30)
参考内容	(30)
【方法篇】 基础导析:1. 函数的概念	(31)
2. 函数的性质	(33)
3. 函数的值域与最值	(35)
重难点选讲:4. (1) 二次函数在给定区间上的最值	(37)
(2) 双曲线函数的性质及应用	(38)
能力与发展:5.1 创新学习	(40)
5.2 研究性学习:函数的不动点与自定义函数	(41)
【训练篇】 基础练	(43)
专题练	(46)

第四讲 函数(Ⅰ)——幂函数、指数与对数函数	(48)
【知识篇】 知识要点	(48)
复习目标	(50)
参考内容	(50)
【方法篇】 基础导析:1. 幂函数	(51)
2. 指数、对数函数	(53)
3. 指数、对数方程	(55)
重难点选讲:4. 函数模型应用题	(56)
能力与发展:5.1 创新学习	(59)
5.2 研究性学习:(1) 指数、对数型函数的研究	(60)
(2) $f^{-1}(x)$ 的理解	(61)
【训练篇】 基础练	(62)
专题练	(64)
第五讲 函数(Ⅱ)——函数与方程、图像	(67)
【知识篇】 知识要点	(67)
复习目标	(68)
参考内容	(68)
【方法篇】 基础导析:1. 函数的图像与零点	(69)
2. 函数与方程、不等式	(71)
重难点选讲:3. 函数图像的初等变换	(72)
能力与发展:4.1 创新学习	(74)
4.2 研究性学习:抽象函数	(75)
【训练篇】 基础练	(77)
专题练	(80)
第六讲 三角比(Ⅰ)——任意角的三角比	(82)
【知识篇】 知识要点	(82)
复习目标	(84)
参考内容	(84)
【方法篇】 基础导析:1. 任意角的三角比	(85)
2. 同角三角比与诱导公式	(86)
重难点选讲:3. 三角比的“符号”问题	(87)
能力与发展:4.1 创新学习	(89)
4.2 研究性学习:单位圆及其应用	(89)
【训练篇】 基础练	(91)
专题练	(93)
第七讲 三角比(Ⅱ)——三角恒等式	(95)
【知识篇】 知识要点	(95)
复习目标	(96)
参考内容	(97)
【方法篇】 基础导析:1. 两角和与差的三角比	(98)
2. 倍角与半角公式	(99)
3. 解斜三角形	(100)

重难点选讲:4. 三角变换的常用方法和技巧	(102)
能力与发展:5.1 创新学习	(103)
5.2 研究性学习:三角应用题	(104)
【训练篇】 基础练	(106)
专题练	(109)
第八讲 三角函数	(111)
【知识篇】 知识要点	(111)
复习目标	(113)
参考内容	(113)
【方法篇】 基础导析:1. 三角函数的图像与性质	(114)
2. 反三角函数	(116)
3. 简单的三角方程	(118)
重难点选讲:4. $y = A\sin(\omega x + \varphi) + B (A > 0, \omega > 0)$ 的图像变换及应用	(120)
能力与发展:5.1 创新学习	(122)
5.2 研究性学习:含参的三角问题的讨论	(123)
【训练篇】 基础练	(124)
专题练	(127)
第九讲 数列(I)——数列概念、等差数列与等比数列	(129)
【知识篇】 知识要点	(129)
复习目标	(130)
参考内容	(130)
【方法篇】 基础导析:1. 数列及其有关概念	(131)
2. 等差、等比数列及其通项公式	(133)
重难点选讲:3. 数列的函数性研究	(134)
能力与发展:4.1 创新学习	(136)
4.2 研究性学习:(1) 等差数列与等比数列的类比	(138)
(2) 自定义数列的学习	(138)
【训练篇】 基础练	(140)
专题练	(143)
第十讲 数列(II)——等差数列与等比数列前 n 项和	(145)
【知识篇】 知识要点	(145)
复习目标	(145)
参考内容	(145)
【方法篇】 基础导析:1. 等差数列的前 n 项和	(146)
2. 等比数列的前 n 项和	(148)
3. 数列的应用	(150)
重难点选讲:4. 数列最值问题的研究	(152)
能力与发展:5.1 创新学习	(154)
5.2 研究性学习:数列求和的一些方法	(156)
【训练篇】 基础练	(158)
专题练	(161)
第十一讲 数学归纳法、数列极限	(163)

【知识篇】	知识要点	(163)
	复习目标	(164)
	参考内容	(164)
【方法篇】	基础导析:1. 数学归纳法	(165)
	2. 数列的极限	(167)
	重难点选讲:3. 无穷等比数列各项和及有关应用	(170)
	能力与发展:4.1 创新学习	(172)
	4.2 研究性学习:数学探索与归纳—猜想—证明	(174)
【训练篇】	基础练	(175)
	专题练	(177)
第十二讲 平面向量		(180)
【知识篇】	知识要点	(180)
	复习目标	(182)
	参考内容	(182)
【方法篇】	基础导析:1. 向量的概念	(183)
	2. 向量的运算	(184)
	重难点选讲:3. (1)向量的平行与垂直问题	(185)
	(2)向量的有关度量计算问题	(186)
	能力与发展:4.1 创新学习	(187)
	4.2 研究性学习:(1) 向量在代数、三角中的应用	(188)
	(2) 向量在物理中的应用	(189)
【训练篇】	基础练	(191)
	专题练	(193)
第十三讲 直线方程		(195)
【知识篇】	知识要点	(195)
	复习目标	(197)
	参考内容	(197)
【方法篇】	基础导析:1. 距离公式、中点坐标公式、倾斜角和斜率	(198)
	2. 直线的方程、两直线的位置关系	(199)
	重难点选讲:3. 直线方程的综合应用问题	(201)
	能力与发展:4.1 创新学习	(202)
	4.2 研究性学习:(1)有关点、直线的对称问题	(204)
	(2)直线的最值问题	(204)
【训练篇】	基础练	(206)
	专题练	(208)
第十四讲 圆锥曲线(I)——曲线方程与圆		(210)
【知识篇】	知识要点	(210)
	复习目标	(211)
	参考内容	(211)
【方法篇】	基础导析:1. 曲线与方程	(212)
	2. 圆	(213)
	重难点选讲:3. 直线与圆的综合问题	(214)

能力与发展:4.1 创新学习	(215)
4.2 研究性学习:圆的参数方程的应用	(216)
【训练篇】 基础练	(217)
专题练	(220)
第十五讲 圆锥曲线(Ⅱ)——椭圆、双曲线、抛物线	(222)
【知识篇】 知识要点	(222)
复习目标	(224)
参考内容	(224)
【方法篇】 基础导析:1. 椭圆、双曲线	(225)
2. 抛物线	(228)
重难点选讲:3. 含参数的圆锥曲线问题	(229)
能力与发展:4.1 创新学习	(231)
4.2 研究性学习:(1)椭圆与双曲线的类比	(233)
(2)轨迹的综合求法问题	(233)
【训练篇】 基础练	(235)
专题练	(238)
第十六讲 圆锥曲线(Ⅲ)——坐标系平移、直线与圆锥曲线	(241)
【知识篇】 知识要点	(241)
复习目标	(243)
【方法篇】 基础导析:1. 坐标系平移	(244)
2. 直线与圆锥曲线	(245)
3. (理)参数方程与极坐标	(248)
重难点选讲:4. 直线与圆锥曲线的综合问题	(250)
能力与发展:5.1 创新学习	(252)
5.2 研究性学习:动圆圆心轨迹的探究	(254)
【训练篇】 基础练	(256)
专题练	(259)
第十七讲 直线与平面	(262)
【知识篇】 知识要点	(262)
复习目标	(264)
参考内容	(264)
【方法篇】 基础导析:1. 空间直线与直线的位置关系	(265)
2. 直线与平面	(266)
3. (理)平面与平面	(268)
重难点选讲:4. 直线与平面的有关度量问题	(270)
能力与发展:5.1 创新学习	(272)
5.2 研究性学习:三垂线定理	(273)
【训练篇】 基础练	(275)
专题练	(278)
第十八讲 简单几何体	(283)
【知识篇】 知识要点	(283)
复习目标	(284)

参考内容	(284)
【方法篇】 基础导析:1. 多面体的概念和性质	(285)
2. 多面体的面积和体积	(287)
重难点选讲:3. (1)多面体的性质的应用及有关计算和证明问题	(289)
(2)用等积变形的方法解决有关问题	(291)
能力与发展:4.1 创新学习	(291)
4.2 研究性学习:(1)折叠问题	(293)
(2)平行于底面(或侧棱)的平面截多面体问题	(293)
【训练篇】 基础练	(294)
专题练	(296)
第十九讲 排列组合与概率统计	(300)
【知识篇】 知识要点	(300)
复习目标	(301)
参考内容	(301)
【方法篇】 基础导析:1. 排列与组合问题	(302)
2. 概率统计	(303)
重难点选讲:3. 排列、组合和概率问题常用的方法与技巧	(304)
能力与发展:4.1 创新学习	(306)
4.2 研究性学习:概率的应用问题	(307)
【训练篇】 基础练	(309)
专题练	(311)
第二十讲 行列式、复数	(313)
【知识篇】 知识要点	(313)
复习目标	(316)
参考内容	(316)
【方法篇】 基础导析:1. 行列式	(317)
2. 复数	(319)
重难点选讲:3. (1)实系数一元二次方程问题	(320)
(2)复数的有关含有参数问题	(321)
能力与发展:4.1 创新学习	(322)
4.2 研究性学习:(1)利用 ω 进行复数的计算问题	(323)
(2)共轭虚根定理及其应用	(323)
【训练篇】 基础练	(325)
专题练	(328)
第二十一讲 线性规划、(理)空间向量、二项式定理、(文)实用数学	(330)
【知识篇】 知识要点	(330)
复习目标	(332)
【方法篇】 基础导析:1. (理)空间向量	(333)
2. (理)二项式定理	(335)
3. 线性规划问题	(336)
4. (文)实用数学	(337)
重难点选讲:5. 空间向量在度量问题中的应用	(340)

能力与发展:6.1 创新学习	(344)
6.2 研究性学习:向量积	(346)
【训练篇】 基础练	(348)
专题练	(353)

第二、三轮复习

专项训练	(356)
专题一 分类讨论	(356)
专题二 数形结合	(359)
专题三 等价转化	(362)
专题四 函数方程	(365)
专题五 换元法	(368)
专题六 构造法	(370)
专题七 运算能力	(372)
专题八 数学应用能力	(375)

第一轮复习

第一讲 集合与命题

知 识 篇

【知识要点】

1. 集合的概念

集合是一个不定义的原始概念,应注意集合概念中的“确切的对象”与“整体”两个词.

【析】① 集合中元素的性质:确定性、互异性、无序性.

② 集合的分类:有限集、无限集和空集.

③ 常用数集:自然数集 N , 正整数集 N^* , 整数集 Z , 有理数集 Q , 实数集 R ($N^* \subseteq N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$).

④ 集合的表示法:列举法和描述法.

2. 子集与真子集

(1) 子集:若集合 A 中任何一个元素都属于集合 B , 则集合 A 叫做集合 B 的子集. 记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$.

(2) 真子集:对于集合 A 和 B , 若 $A \subseteq B$, 且 B 至少有一个元素不属于 A , 则集合 A 叫做集合 B 的真子集, 记作 $A \subsetneq B$ 或 $B \supsetneq A$.

(3) 相等的集合:对于两个集合 A 和 B , 若 $A \subseteq B$, 且 $B \subseteq A$, 则叫做集合 A 与集合 B 相等. 记作 $A = B$.

【析】① 空集是任何集合的子集, 即 $\emptyset \subseteq A$; 空集是任何非空集合的真子集.

② 任何集合 A 是其自身的子集, 即 $A \subseteq A$.

③ 子集的传递性:若 $A \subseteq B$, $B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$.

④ 若 $A \subseteq B$, 则 $A \subsetneq B$ 或 $A = B$.

⑤ 相等的集合中的所含元素完全相同.

⑥ 连接元素与集合的符号有: $\in$ 和 $\notin$.

⑦ 连接集合与集合的符号有: $\subseteq$, $\subsetneq$, $=$, $\neq$ 等.

⑧ 含有 n 个元素的集合的子集共有 2^n 个.

3. 集合的运算

(1) 交集: $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$;

(2) 并集: $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$;

(3) 补集: $\complement_U A = \{x | x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$.

【析】① “交集”与“并集”的定义仅一字之差, 结果却完全不同, “交集”中的“且”有时可省略, 而“并集”中的“或”不能省略; 补集是相对于全集而言的, 全集不同, 相应的补集也不同.

② 交集的性质: $A \cap B = B \cap A$; $A \cap A = A$; $A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \cap B \subseteq A$; $A \cap B \subseteq B$.

③ 并集的性质: $A \cup B = B \cup A$; $A \cup A = A$; $A \cup \emptyset = A$; $A \subseteq A \cup B$; $B \subseteq A \cup B$.

④ $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$; $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$.

⑤ 集合的运算满足分配律: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

⑥ 补集的性质: $A \cap \complement_U A = \emptyset$; $A \cup \complement_U A = U$; $\complement_U (\complement_U A) = A$.

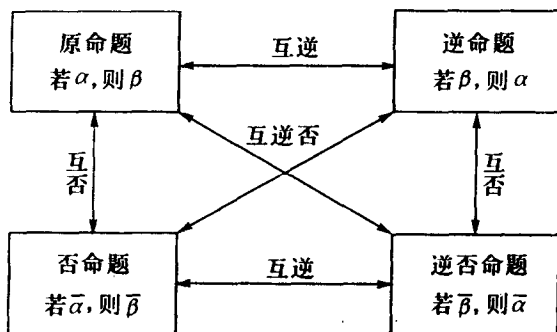
⑦ 摩根定理: $\complement_U (A \cup B) = \complement_U A \cap \complement_U B$; $\complement_U (A \cap B) = \complement_U A \cup \complement_U B$.

4. 命题的概念

【析】① 真假命题的判断方法:判断真命题需证明,判断假命题,只要举一个满足命题条件而不满足命题结论的例子(反例)即可.

② 等价关系:若 $\alpha \Rightarrow \beta$ 且 $\beta \Rightarrow \alpha$, 则称 α 与 β 等价, 记为 $\alpha \Leftrightarrow \beta$.

③ 四种命题形式及其相互关系:



④ 词语的否定形式:“是”与“不是”;“都是”与“不都是”;“一定是”与“一定不是”;“且”与“或”;“正数”与“非正数”;“ $>$ ”与“ $\leq$ ”;“至少一个”与“一个也没有”;“至多一个”与“至少两个”,等等.

⑤ 等价命题——同真同假的两个命题.一个命题的原命题与逆否命题是等价命题,逆命题与否命题是等价命题.当判断或证明某一个命题有困难时,可间接证明与该命题等价的逆否命题是否成立.

5. 充分条件与必要条件

(1) 如果 $\alpha \Rightarrow \beta$, 那么① α 是 β 的充分条件;② β 是 α 的必要条件;③ β 的充分条件是 α ;④ α 的必要条件是 β .

(2) 如有 $\alpha \Rightarrow \beta$, 又有 $\beta \Rightarrow \alpha$, 即 $\alpha \Leftrightarrow \beta$, 那么① α 是 β 的充要条件;② β 是 α 的充要条件;③ α 的充要条件是 β ;④ β 的充要条件是 α .

【析】对于事件 α, β , “条件”又可具体分为以下四种情形:① α 是 β 的充分非必要条件: $\alpha \Rightarrow \beta$ 且 $\beta \nRightarrow \alpha$;② α 是 β 的必要非充分条件: $\beta \Rightarrow \alpha$ 且 $\alpha \nRightarrow \beta$;③ α 是 β 的充要条件: $\alpha \Rightarrow \beta$ 且 $\beta \Rightarrow \alpha$;④ α 既不是 β 的充分条件又不是 β 的必要条件: $\alpha \nRightarrow \beta$ 且 $\beta \nRightarrow \alpha$.

【复习目标】

1. 掌握集合的表示方式,会正确使用数学语言进行表述.
2. 理解子集、真子集与相等的集合的概念,能正确判断集合与集合之间的关系.
3. 掌握交集和并集的概念,会进行交集和并集的运算.
4. 理解全集和补集的概念,会借助于数轴或韦恩图进行集合的交运算、并运算和补运算.
5. 学会判断或证明命题的真假.
6. 分清命题的四种形式及其相互关系.
7. 会熟练判断充分条件、必要条件及充要条件.

【参考内容】 参看高一(上)

1. 基础导析:1(Ⅱ)——5、6、7;2(Ⅱ)——2、4、5;3(Ⅱ)——3、5
2. 重难点选讲:2(Ⅱ)——9;3(Ⅱ)——8
3. 能力与发展:2(Ⅱ)——12、13;3(Ⅱ)——9、10
4. 专题练(1):1(Ⅲ4)——8、15
5. 专题练(2):2(Ⅲ4)——8、14、16;2(Ⅲ6)——18、19

【基础导析】

1. 集合的概念及其运算

(1) 集合的有关概念问题

【例1】 已知集合 $A = \{x | ax^2 - 3x + 2 = 0, a \in \mathbf{R}\}$.

- (1) 若 A 是空集, 求 a 的取值范围;
- (2) 若 A 中只有一个元素, 求 a 的值, 并把这个元素写出来;
- (3) 若 A 中至多有一个元素, 求 a 的取值范围.

【解题策略】 集合 A 是指方程 $ax^2 - 3x + 2 = 0$ 的所有解组成的集合, 因此集合 A 中元素的个数, 即为已知方程解的个数.

【解】 (1) 若 A 为空集, 则方程 $ax^2 - 3x + 2 = 0$ 无实数解, 而 $a = 0$ 时, 方程有解, 显然不合题意.

$\therefore a \neq 0$ 且 $\Delta = 9 - 8a < 0$, $\therefore a > \frac{9}{8}$.

(2) 当 $a = 0$ 时 $x = \frac{2}{3}$, 符合题意; 当 $a \neq 0$ 时, $\Delta = 9 - 8a = 0$, $\therefore a = \frac{9}{8}$.

$\therefore$ 所求实数 $a = 0$ 或 $a = \frac{9}{8}$ 时, A 中只有一个元素 $\frac{2}{3}$ 或 $\frac{4}{3}$.

(3) 综合(1)(2)得, 若 A 至多有一个元素, 则 $a = 0$ 或 $a \geq \frac{9}{8}$.

【点评】 注意对系数 $a = 0$ 与 $a \neq 0$ 的情形进行分类讨论.

(2) 集合的基本运算问题

【例2】 (1) 已知集合 $M = \{y | y = x^2, x \in \mathbf{R}\}$, $N = \{y | y = -2x^2 + 3, x \in \mathbf{R}\}$, 求 $M \cap N$;

(2) 已知集合 $M = \{(x, y) | y = x^2, x \in \mathbf{R}\}$, $N = \{(x, y) | y = -2x^2 + 3, x \in \mathbf{R}\}$, 求 $M \cap N$.

【解题策略】 (1) 中的集合 M 和 N 是二次函数的函数值组成的集合; (2) 中集合 M 和 N 是抛物线上

的点组成的集合, 求 $M \cap N$, 即求两抛物线的交点, 即方程组 $\begin{cases} y = x^2 \\ y = -2x^2 + 3 \end{cases}$ 的解的集合.

【解】 (1) $\because M = \{y | y \geq 0\}$, $N = \{y | y \leq 3\}$, $\therefore M \cap N = \{y | 0 \leq y \leq 3\}$.

(2) 由 $\begin{cases} y = x^2 \\ y = -2x^2 + 3 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$ $\therefore M \cap N = \{(1, 1), (-1, 1)\}$.

【点评】 在进行集合的运算前, 需注意集合中元素的特征.

(3) 集合与方程不等式问题

【例3】 已知集合 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - ax + a - 1 = 0\}$, $C = \{x | x^2 - mx + 2 = 0\}$,

- (1) 若 $A \cup B = A$, 求实数 a 的值;
- (2) 若 $A \cap C = C$, 求实数 m 的值组成的集合.

【解题策略】 将集合的运算转换成集合之间的关系.

【解】 (1) 由 $A \cup B = A$ 得 $B \subseteq A$, 又 $A = \{1, 2\}$.

若 $B = \emptyset$, 则由 $\Delta = (a-2)^2 \geq 0$, 可知 $B = \emptyset$ 不成立;

若 $B = \{1\}$, 则由 $\Delta = (a-2)^2 = 0$ 得 $a = 2$, 符合题意;

若 $B = \{2\}$, 则 a 不存在, 若 $B = \{1, 2\}$, 则 $a = 3$ 符合题意, 综上所述 a 的值为 2 或 3.

(2) 由 $A \cap C = C$ 得 $C \subseteq A$, 若 $C = \emptyset$, 则由 $\Delta = m^2 - 8 < 0$, 得 $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$;

若 $C = \{1\}$, 则将 $x = 1$ 代入 $x^2 - mx + 2 = 0$, 得 $m = 3$, 而此时 $C = \{1, 2\}$, 不合题意;

若 $C = \{2\}$, 则 $m = 3$ 同样不合题意; 若 $C = \{1, 2\}$, 则 $m = 3$, 符合题意.

综上所述, 实数 m 的值组成的集合为 $\{m \mid m = 3 \text{ 或 } -2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}\}$.

【点评】 当 $B \subseteq A$ 时, 注意对 $B = \emptyset$ 与 $B \neq \emptyset$ 进行分类讨论.

【例 4】 已知集合 $A = \{x \mid x^2 - 2x - 24 < 0, x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{x \mid x^2 - 4ax + 3a^2 < 0, x \in \mathbb{R}\}$.

(1) 若 $A \cap B = \emptyset$, 求实数 a 的取值范围; (2) 若 $A \cup B = A$, 求实数 a 的取值范围.

【解题策略】 将集合的运算转换成集合之间的关系后, 借助图像(数轴)体现集合 A 与集合 B 的关系.

【解】 $A = \{x \mid x^2 - 2x - 24 < 0, x \in \mathbb{R}\} = (-4, 6)$,

$B = \{x \mid x^2 - 4ax + 3a^2 < 0, x \in \mathbb{R}\} = \{x \mid (x - a)(x - 3a) < 0, x \in \mathbb{R}\}$.

(1) 当 $a > 0$ 时, $B = (a, 3a)$, 由 $A \cap B = \emptyset$ 得 $a \geq 6$;

当 $a = 0$ 时, $B = \emptyset$, 满足 $A \cap B = \emptyset$;

当 $a < 0$ 时, $B = (3a, a)$, 由 $A \cap B = \emptyset$ 得 $a \leq -4$;

综上所述, a 的取值范围 $(-\infty, -4] \cup \{0\} \cup [6, +\infty)$.

(2) 由 $A \cup B = A$ 得 $B \subseteq A$,

当 $a > 0$ 时, $B = (a, 3a)$, 由 $B \subseteq A$ 得 $a \geq -4$ 且 $3a \leq 6$, $\therefore 0 < a \leq 2$;

当 $a = 0$ 时, $B = \emptyset$, 满足 $B \subseteq A$;

当 $a < 0$ 时, $B = (3a, a)$, 由 $B \subseteq A$ 得 $a \leq 6$ 且 $3a \geq -4$, $\therefore -\frac{4}{3} \leq a < 0$;

综上所述, a 的取值范围 $[-\frac{4}{3}, 2]$.

【点评】 对于含参数的集合 B , 若已知 $B \subseteq A$ 或 $B \supsetneq A$ 或 $B \cap A = \emptyset$, 则往往对 $B = \emptyset$ 与 $B \neq \emptyset$ 进行分类讨论, 本例不要遗漏 $a = 0$ 时 $B = \emptyset$ 的情形.

2. 命题与充要条件

(1) 命题的概念及改写问题

【例 5】 写出命题“两个有理数的和是有理数”的逆命题、否命题、逆否命题, 并判断这些命题的真假.

【解题策略】 先将原命题改写成“如果……, 那么……”的形式, 再分别写出该命题的其他三种形式.

【解】 原命题改写为: 如果两个数都是有理数, 那么这两个数的和是有理数.

逆命题: 如果两个数的和是有理数, 那么这两个数都是有理数.

否命题: 如果两个数不都是有理数, 那么这两个数的和不是有理数.

逆否命题: 如果两个数的和不是有理数, 那么这两个数不都是有理数.

上述四个命题中, 原命题与逆否命题都是真命题, 逆命题与否命题都是假命题.

【点评】 互为逆否的两个命题是等价命题, 等价命题同真同假.

(2) 充要条件的判定问题

【例 6】 在空格内填上“充分非必要”、“必要非充分”、“充要”、“既非充分又非必要”:

(1) “ $x > 0$ ”是“ $x > 1$ ”的_____条件;

(2) “ $x^2 + 5x + 6 \neq 0$ ”是“ $x \neq -2$ ”的_____条件;

(3) “ $|x| > |y|$ ”是“ $x > y$ ”的_____条件;

(4) “ $a \neq 0$ ”是“方程 $ax = b$ 有唯一解”的_____条件;

(5) 对于集合 A, B , “ $x \in A \cup B$ ”是“ $x \in A \cap B$ ”的_____条件;

(6) 对于集合 A, B, C , “ $A = B$ ”是“ $A \cap C = B \cap C$ ”的_____条件.

【解题策略】 要判定 α 是 β 的什么条件, 可考虑由 α 成立是否能保证 β 成立; 由 β 成立是否能保证 α 成立, 从而明确 $\alpha \Rightarrow \beta$ 与 $\beta \Rightarrow \alpha$ 是否是真命题, 然后根据充分条件与必要条件的定义得出结论. 如(1)中“ $x > 0$ ”不能保证“ $x > 1$ ”, 而“ $x > 1$ ”可保证“ $x > 0$ ”, 从而“ $x > 1$ ” $\Rightarrow$ “ $x > 0$ ”, “ $x > 0$ ” $\nRightarrow$ “ $x > 1$ ”, 所以“ $x > 0$ ”