经济数学基础

经济数学基础学习辅导之三

《经济数学基础学习辅导》 顾　问 胡启迪

总主编 朱弘毅

概率论与数理统计

学习辅导

GAILÜLUN YU SHULI TONGJI

XUEXI FUDAO

主　编 张福康 桂胜华 钱　锦

副主编 周伟良 费伟劲 王春华 沈平宝

立信会计出版社

LIXIN KUAIJI CHUBANSHE

概率论与数理统计

学习辅导

GAILVLUN YU SHULI TONGJI

经济数学基础之三

概率论与数理统计学习辅导

主　编　张福康　桂胜华　钱　锦
副主编　周伟良　费伟劲　王春华　沈平宝

立信会计出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习辅导/张福康等主编. 2 版.
—上海：立信会计出版社，2001. 2
(经济数学基础)
ISBN 7-5429-0639-9

Ⅰ. 概… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①概率论-高等学校-教学参考资料 ②数理统计-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. 021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第07401号

概率论与数理统计学习辅导

出版发行	立信会计出版社
地　　址	上海市中山西路 2230 号
邮政编码	200235
电　　话	(021)64411389
传　　真	(021)64411325
网　　址	www. lixinaph. com　　E-mail　lxaph@sh163. net
网上书店	www. lixinbook. com　　Tel：(021)64411071
经　　销	各地新华书店

印　　刷	立信会计常熟市印刷联营厂
开　　本	850 毫米×1168 毫米　1/32
印　　张	6. 5
字　　数	153 千字
版　　次	2001 年 2 月第 2 版
印　　次	2006 年12月第10次
印　　数	24 001—27 000
书　　号	ISBN 7-5429-0639-9/F • 0585
定　　价	11. 40 元

《经济数学基础辅导丛书》编写组

顾　　问　胡启迪（上海市教育考试院院长，教授）

总 主 编　朱弘毅（上海应用技术学院）

编　　委（按姓氏笔画排列）

卜庆海	车荣强	王春华	朱弘毅	刘志石
李树冬	余　敏	沈　昕	沈平宝	居环龙
周伟良	罗爱芳	张福康	赵斯泓	施国锋
费伟劲	桂胜华	钱　锦	黄玉洁	龚秀芳
戴宏图				

《概率论与数理统计》

主　　编　张福康（东海职业技术学院）

桂胜华（上海第二工业大学）

钱　锦（上海海关高等专科学校）

副主编　周伟良（立信会计高等专科学校）

费伟劲（上海商业职业技术学院）

王春华（行健职业技术学院）

沈平宝（黄浦区业余大学）

前　言

《经济数学基础学习辅导》丛书，是与上海高校《经济数学基础》编写组编的《经济数学基础》这套教材（立信会计出版社出版）配套的学习辅导书。丛书共三册：《微积分学习辅导》、《线性代数学习辅导》、《概率论与数理统计学习辅导》。

《经济数学基础学习辅导》丛书共分三册，编写体例一致，每册书的最后一章为模拟试题及其解答，其余各章与相应的教材同步。每章由内容提要、例题分析、习题选解、测试题及其解答四节组成。本丛书旨在帮助、指导读者理解重要的概念、掌握运算方法、解答疑难问题。因此，例题、习题、测试题都是精心选编的，题型基本而又典型。测试题及模拟试题均有解答，供读者自查。编者相信，读者认真阅读本辅导书，必有收获。

《经济数学基础学习辅导》丛书由朱弘毅任总主编，参加编写的有（按姓氏笔画排列）卜庆海、车荣强、王春华、朱弘毅、刘志石、李树冬、余敏、沈昕、沈平宝、居环龙、周伟良、罗爱芳、张福康、赵斯泓、施国锋、费伟劲、桂胜华、钱锦、黄玉洁、龚秀芳、戴宏图。本丛书的出版得到上海市教育考试院院长胡启迪教授、上海市教委高等教育办公室徐国良副主任、东海职业技术学院副院长李重华教授、立信会计出版社孙时平总编辑、蔡莉萍编辑、王征编辑的支持和帮助，在此一并表示衷心感谢。

限于编者的水平，书中不妥之处在所难免，恳请读者批评指正。

朱弘毅

目　录

第一章　随机事件及其概率

第一节　内 容 提 要

1. 随机事件与样本空间

具有下列三个特性的试验称为随机试验(简称试验)。

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行。

(2) 每次试验的可能结果不止一个,并且事先可以明确试验的所有可能结果。

(3) 进行某一次试验之前,不能确定哪一个结果会出现。

随机试验中,不能分解的最简单的随机事件称为基本事件,亦称为样本点。

随机试验中样本点的全体组成的集合,称为该随机试验的样本空间,记为 Ω。

在一次试验中可能发生也可能不发生的事件称为随机事件,简称事件,常以大写字母 A、B、C 等表示。它可以表述为样本空间中样本点的某个集合。

在一定条件下必然要发生的事件称为必然事件,用 Ω 表示。

在一定条件下必然不发生的事件称为不可能事件,记为 Φ。

[注]　必然事件与不可能事件不具有随机性,是确定的现象,但为研究方便,把它们看作特殊的随机事件。

2. 事件之间的关系及其运算

(1) 事件的包含与相等。

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 B 包含事件 A,记作 $A \subset B$。

如果 $A\subset B$,且 $B\subset A$,则称事件 A 与事件 B 相等,记为 $A=B$。

(2) 事件的和与积。

事件 A 与事件 B 中至少有一个发生的事件,称为事件 A 与事件 B 的和,记为 $A\cup B$。类似地,事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生的事件称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件,记作 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$,简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$。

事件 A 与事件 B 同时发生的事件,称为事件 A 与事件 B 的积,记为 $A\cap B$ 或 AB。类似地,表示 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生的事件称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件,记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$,简记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$。

(3) 事件的互不相容(互斥)。

如果事件 A 与事件 B 不能同时发生,即 $AB=\Phi$,则称事件 A 与事件 B 互不相容(或互斥)。

(4) 事件的对立(互逆)。

如果事件 A 与事件 B 满足 $A\cup B=\Omega$,$AB=\Phi$,则称事件 A 与事件 B 相互对立,并称 B 是 A 的对立事件,同样地,也称事件 A 是事件 B 的对立事件。A 的对立事件记为 $\overline{A}$。

[注] ① 对立事件一定互斥,互斥事件不一定是对立事件。

② 对于 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,若 $A_iA_j=\Phi(1\leqslant i<j\leqslant n)$,则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,并记 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$。

(5) 事件的差。

事件 A 发生而事件 B 不发生的事件,称为事件 A 与事件 B 的差事件,记为 $A-B$。

(6) 事件的运算法则。

① 交换律　$A\cup B=B\cup A$　　　$A\cap B=B\cap A$

② 结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

③ 分配律 $A(B\cup C)=AB\cup AC$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

④ 对偶律 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ $\qquad\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

3. 随机事件的概率

设 n 次试验中事件 A 出现了 μ 次，则称$\frac{\mu}{n}$为事件 A 在 n 次试验中出现的频率。

在相同的条件下，重复进行 n 次试验，事件 A 发生的频率稳定地在某一常数 p 附近摆动，且一般说来，n 越大，摆动幅度越小，则称常数 p 为事件 A 发生的概率，记为 $P(A)=p$。

由上述概率的定义知道，对任何事件 A，有

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1$$

4. 古典概型

古典概型是随机试验的一种概率模型，它满足以下两个条件：

(1) 随机试验的样本空间是有限的，即 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$；

(2) 每次试验中各个基本事件$\{\omega_1\},\{\omega_2\},\cdots,\{\omega_n\}$发生的可能性相同。

若事件 A 包含 m 个样本点，则有

$$P(A)=\frac{\text{事件 }A\text{ 包含的样本点个数}}{\text{样本点总数}}=\frac{m}{n}$$

5. 概率的基本性质

性质(1) 设 $\overline{A}$ 是 A 的对立事件，则 $P(\overline{A})=1-P(A)$。

性质(2) $P(\Phi)=0,P(\Omega)=1$。

性质(3) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$。

特别地，如果 $AB=\Phi$，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$；如果事

件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，则 $P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$。

6. 条件概率及有关公式

(1) 条件概率。

设 A、B 是两个随机事件，$P(B)>0$，则称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率。

(2) 乘法公式

对任意两个事件 A、B，若 $P(A)>0$（或 $P(B)>0$），则有

$$P(AB)=P(A)P(B|A) \qquad (P(A)>0)$$

$$P(AB)=P(B)P(A|B) \qquad (P(B)>0)$$

(3) 全概率公式

若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足

① $A_iA_j=\Phi(1\leqslant i<j\leqslant n)$

② $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\Omega$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成一个完备事件组。

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为一个完备事件组，且 $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，对任意事件 B，则

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$$

这就是全概率公式。

(4) 贝叶斯公式。

仍用全概率公式中的记号，则称

$$P(A_k|B)=\frac{P(A_kB)}{P(B)}=\frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}$$

为贝叶斯公式。

7. 独立性

对于事件 A、B，如果 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称 A、B 为相互

独立的事件。

［注］ ① 当 $P(A)>0(P(B)>0)$ 时，事件 A 与事件 B 相互独立的充要条件是 $P(B|A)=P(B)(P(A|B)=P(A))$。

② 如果事件 A 与事件 B 相互独立，则 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立。

8. 贝努里概型。

贝努里概型是一种重要的概率模型，它满足以下四个条件：

(1) 在相同条件下重复地做某种试验 n 次。

(2) 每次试验的结果有且仅有两种情况：事件 A 与事件 $\overline{A}$。

(3) 各次试验是相互独立的。

(4) 在各次试验中 $P(A)=p,P(\overline{A})=1-p$。

在 n 次独立重复试验中，事件 A 恰好发生 $k(0\leqslant k\leqslant n)$ 次的概率为

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\quad(k=0,1,2,\cdots,n)$$

第二节 例题分析

【例 1】 写出下列随机试验的样本空间及下列事件包含的样本点：

(1) 掷一颗骰子，出现奇数点。

(2) 投掷一枚均匀硬币两次：

① 第一次出现正面；

② 两次出现同一面；

③ 至少有一次出现正面。

(3) 在 1,2,3,4 四个数中可重复地抽取两个数，其中一个数是另一个数的两倍。

(4) 将 a、b 两只球随机地放到 3 个盒子中去，第一个盒子中至少有一个球。

分析：样本空间是指随机试验所有可能出现的结果的全体，用符号 Ω 表示。每一种可能出现的结果称为一个样本点，由若干样本点组成的集合称为随机事件。对照集合的概念来理解：样本空间可指全集，样本点是元素，事件则是包含在全集中的子集。

解 (1) 掷一颗骰子，其结果有六种可能：出现 1 点、2 点、3 点、4 点、5 点、6 点，如果用“1”表示“出现 1 点”这个样本点，其余类似。则样本空间为

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$$

于是可记出现奇数点的事件为：$\{1,3,5\}$。

(2) 将一枚均匀硬币抛两次，其结果共有四种可能，如果用(正，反)表示“第一次出现正面，第二次出现反面”这一样本点，其余类似，则样本空间为

$$\Omega=\{(正,正),(正,反),(反,正),(反,反)\}$$

用 A、B、C 分别表示事件“第一次出现正面”、“两次出现同一面”、“至少有一次出现正面”，则

事件 $A=\{(正,正),(正,反)\}$

事件 $B=\{(正,正),(反,反)\}$

事件 $C=\{(正,正),(正,反),(反,正)\}$

(3) 在 1,2,3,4 四个数中可重复地取两个数，共有 16 种可能($4^2=16$)，如果用(i,j)表示“第一次取数 i，第二次取数 j”这一样本点，则样本空间记为

$$\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),\\(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$$

其中有一个数是另一个数 2 倍的事件可记为：

$$\{(1,2),(2,1),(2,4),(4,2)\}$$

(4) 记三个盒子分别为甲、乙、丙，将 a，b 两球随机放入三个盒子中去共有九种可能结果。如果用(甲、乙)表示“a 球放入甲盒，

b 球放入乙盒”这一样本点，用(丙、乙)表示“a 球放入丙盒，b 球放入乙盒”这一样本点，其余类似，则样本空间为

$$\Omega=\{(甲,甲),(甲,乙),(甲,丙),(乙,乙),(乙,甲),(乙,丙),(丙,甲),(丙,乙),(丙,丙)\}$$

第一个盒子中至少有一球的事件可记为

$$\{(甲,甲),(甲,乙),(甲,丙),(乙,甲),(丙,甲)\}$$

【例 2】 设 A、B、C 为三个事件，试用这三个事件表示下列事件：

(1) A、B、C 三个事件中至少发生一个。

(2) A 不发生，B 与 C 均发生。

(3) A、B、C 三个事件中至少有两个发生。

(4) A、B、C 三个事件中恰好发生一个。

(5) A 发生，B 与 C 都不发生。

分析：利用事件的交、并、差、逆等运算关系来描述事件。

解 (1) 事件“A、B、C 三个事件中至少发生一个”可表示为

$$A\cup B\cup C \text{ 或 } \overline{\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}}$$

(2) 事件“A 不发生，B、C 均发生”可表示为

$$\overline{A}\cap B\cap C \text{ 或 } (B\cap C)-A$$

(3) 事件“A、B、C 三个事件中至少有两个发生”可表示为

$$AB\cup BC\cup AC \text{ 或 } AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC$$

(4) 事件“A、B、C 三个事件中恰好发生一个”可表示为

$$A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$$

(5) 事件“A 发生，B 与 C 都不发生”可表示为

$$A\overline{B}\overline{C} \text{ 或 } A-B-C \text{ 或 } A-(B\cup C)$$

【例 3】 从 52 张扑克牌任意取出 13 张来，问有 5 张黑桃、3 张红心、2 张方块、3 张草花的概率是多少？

分析：这是一个古典概型问题，涉及的计算是一个组合问题，从 52 张任意取出 13 张的方法共有 C_{52}^{13}种；从 13 张黑桃中选出 5

张的种数为C_{13}^5种；从13张红心中选出3张红心的种数为C_{13}^3；从13张方块中选出2张方块的种数为C_{13}^2种；从13张草花中选出3张草花的种数为C_{13}^3种，由此可计算所求事件的概率。

解　设事件A={取出的13张牌中有5张黑桃，3张红心，2张方块，3张草花}

从52张扑克牌任意取出13张，共有C_{52}^{13}种取法，样本空间所含的样本点总数是C_{52}^{13}，事件A所含的样本点个数是$C_{13}^5C_{13}^3C_{13}^2C_{13}^3$，所以

$$P(A)=\frac{C_{13}^5C_{13}^3C_{13}^2C_{13}^3}{C_{52}^{13}}$$

【例4】 在某城市中，共发行三种报纸甲、乙、丙，在这城市居民中，订购甲报的占45%，订购乙报的占35%，订购丙报的占30%；同时订购甲报与乙报的占10%，同时订购甲报与丙报的占8%，同时订购乙报与丙报的占5%，同时订购甲报、乙报、丙报的占3%，试求下列百分率。

(1) 至少订购一种报纸的。

(2) 不订任何报纸的。

分析："至少订购一种报纸"的事件是"订购报纸甲"、"订购报纸乙"、"订购报纸丙"这三事件之和，而事件"不订任何报纸"是"至少订购一种报纸"的对立事件，因此可用加法公式及对立事件的计算公式计算。

解　设事件A={订购报纸甲}，事件B={订购报纸乙}，C={订购报纸丙}。则$P(A)=45\%$，$P(B)=35\%$，$P(C)=30\%$，$P(AB)=10\%$，$P(AC)=8\%$，$P(BC)=5\%$，$P(ABC)=3\%$

(1) 事件"至少订购一种报纸"就是事件A、B、C至少有一个发生，这一事件可表示为$A\cup B\cup C$，于是

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B\cup C)-P[A(B\cup C)]\\&=P(A)+P(B)+P(C)-P(BC)\end{aligned}$$