新派克
XINPAIKE
考研数学真题与典型题详解系列

2007

高等数学

（理工类）

考研真题与典型题详解

金圣才　主编

高等数学 解 理工类

汇总众多高校考研专业课真题，并进行详细解答！

精选名校题库、讲义和笔记，汇集专业典型试题！

题量充足，来源广泛，突出热点，参考答案详尽！

中国石化出版社

O13-44
156(2007)

考研数学真题与典型题详解系列

高等数学(理工类)

考研真题与典型题详解

金圣才　主编

中国石化出版社

内 容 提 要

本书是一本考研数学（理工类）真题与典型题详解的复习资料，是根据最新硕士研究生入学考试理工类数学大纲，参考并整理了众多高等数学题库和相关资料精编而成。全书共分8章，每章包括4个部分，第1部分是考试内容及要求，第2部分是重要公式、性质及结论，第3部分是历年考研真题详解，第4部分是典型题详解。

本书特别适用于在硕士研究生入学考试中参加数学（一）和数学（二）科目的考生，也适用于各大院校学习高等数学的师生参考，对于参加职称考试、自考及其他相关专业人员来说，也是学习高等数学的一本不可多得的复习资料。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学（理工类）考研真题与典型题详解/金圣才主编.
—北京：中国石化出版社，2005（2006.3 重印）
（考研数学真题与典型题详解系列）
ISBN 7-80164-818-8

Ⅰ.高… Ⅱ.金… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-解题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 046385 号

中国石化出版社出版发行
地址：北京市东城区安定门外大街58号
邮编：100011 电话：(010)84271850
读者服务部电话：(010)84289974
http://www.sinopec-press.com
E-mail:press@sinopec.com.cn
北京精美实华图文制作中心排版
北京大地印刷厂印刷
全国各地新华书店经销
*
787×1092 毫米 16 开本 43 印张 990 千字
2006 年 3 月第 1 版第 2 次印刷
定价：66.80 元
（购买时请认明封面防伪标识）

编 委 会

主 编： 金圣才

编 委： 段 浩 朱才斌 潘丽繁 杨艳明

钱 忠 段辛雷 尹 玲 张文娟

徐 芳 张成广 胡三木 皮文杰

严 税 查 猛 成冬梅 蔡 晔

方小慧 陆 杰 黄 帆 舒 玲

吴利平 李 达 车世纪 黄文静

前　言

本书根据最新硕士研究生入学考试数学大纲，参考并整理了众多数学资料精编而成。全书共8章，每章分为4部分，第1部分是考试内容及要求，第2部分是重要公式、性质及结论，第3部分是历年真题详解，第4部分是典型题详解。

本书具有如下特点：

（1）题量较大，来源广泛。主要选自200多本数学复习资料（含10年来考研真题）、名校题库以及众多教材和相关资料，经编著而成。可以说本书的试题都经过了精心挑选，博选众书，取长补短。

（2）解答详细，突出重难点。对每一道题，包括选择题和填空题，都进行了详细的解答。有些试题提供了多种解题方法，便于读者进一步理解。

（3）难点归纳，理论知识和考试要点归纳有特色。有些试题的结论在一般教材上并没有作为定理或结论，但在考研中却可以直接使用，这些内容本书都进行了总结和分析。

需要特别说明的是：

本书的每道题都是一道典型的例题，读者如果把本书的每一道题认真地看懂、研读、相信在考研中一定能够取得很好的成绩！

本书特别适用于硕士研究生入学考试中数学科目的考生，也适用于各大院校学习数学的师生参考，对于参加职称考试，自考及其他相关专业人员来说，也是学习数学的一本不可多得的复习资料。

由于题量较大，解答详细，错误、遗漏不可避免，诚请读者指正，不妥之处和建议可与编者联系，不甚感激。

为了帮助读者更好地学习数学等各门课程，圣才考研网开设了数学等公共课和专业课的论坛及专栏，还提供各个高校最新考研专业真题、各专业试题库、笔记、讲义及大量专业课复习资料。

限于篇幅，有些试题和资料未能在本书收录，如有建议或需试卷，请登录网站：

圣才考研网www.100exam.com

金圣才

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

第1章　函数、极限、连续

1.1　考试内容及要求

考试内容

函数的概念及表示法　函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性复合函数、反函数、分段函数和隐函数　基本初等函数的性质及其图形　初等函数　简单应用问题函数关系的建立

数列极限与函数极限的定义及其性质　函数的左极限和右极限无穷小和无穷大的概念及其关系　无穷小的性质及无穷小的比较　极限的四则运算　极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则　两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$$

函数连续的概念　函数间断点的类型　初等函数的连续性　闭区间上连续函数的性质

考试要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立简单应用问题的函数关系式。
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性。
3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念。
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念。
5. 理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念，以及函数极限存在与左、右极限之间的关系。
6. 掌握极限的性质及四则运算法则。
7. 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法。
8. 理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小求极限。
9. 理解函数连续性的概念（含左连续与右连续），会判别函数间断点的类型。
10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性。理解闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理），并会应用这些性质。

1.2　重要公式、性质及结论

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0$ 常数)
5. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$
6. 当 $a>0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$
7. $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x=1$

8. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}=1$

9. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln^P x=0$

10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^P x}{x}=0$

11. 在极限运算中，当 $x\to 0$ 时，则：

(1) $x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1\sim\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$

(2) $x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3$

(3) $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$

(4) $(1+x)^a-1\sim ax$

(5) $a^x-1\sim x\ln a\,(a>0$，且 $a\neq 1)$

(6) $\sin x^n\sim x^n$

(7) $\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n}$

12. 若 $\lim\alpha(x)=\lim\beta(x)=\lim A(x)=\lim B(x)=0$，且 $\alpha(x)\sim A(x)$，$\beta(x)\sim B(x)$，则：

(1) $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\frac{A(x)}{B(x)}$

(2) $\lim[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\beta(x)}}=\lim[1+A(x)]^{\frac{1}{B(x)}}=e^{\lim\frac{A(x)}{B(x)}}$

注：分母 $\beta(x)$，$B(x)$ 不能是 0。

13. 不为零的无穷小的倒数为无穷大，无穷大的倒数为无穷小。

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, & n=m\\ 0, & n>m\\ \infty, & n<m\end{cases}$

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{ax+b}{ax+c}\right)^{hx+h}=e^{\frac{(b-c)h}{a}}$

16. 设 $\lim\varphi(x)=1$，$\lim\psi(x)=0$，$\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 可导，且 $\lim\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)\psi'(x)}$ 存在，则

$$\lim\varphi(x)^{\frac{1}{\psi(x)}}=\exp\lim\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)\psi'(x)}$$

注：$\varphi(x)$，$\psi(x)$，$\psi'(x)$ 都不为零。

17. 设 $\lim\alpha=\lim\beta=0$，且 $\alpha-\beta\neq 0$，则：

$$\ln(1+\alpha)-\ln(1+\beta)\sim 2(\sqrt{1+\alpha}-\sqrt{1+\beta})\sim\alpha-\beta$$

18. 设当 $x\to x_0$ 时，$\alpha=o(\beta)$，且 $\beta\sim\widetilde{\beta}$，则 $\alpha+\beta\sim\widetilde{\beta}$

19. 设 $\alpha,\widetilde{\alpha},\beta,\widetilde{\beta}$ 均为当 $x\to x_0$ 时的无穷小，且 $\alpha\sim\widetilde{\alpha}$，$\beta\sim\widetilde{\beta}$，又 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta}{\alpha}=C\,(C\neq-1)$，则：

$$\alpha+\beta\sim\widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta}$$

20. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left[a+\frac{k}{n}(b-a)\right]\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

21. $\lim u(x)^{v(x)}$ 呈 1^∞ 型，则 $\lim u(x)^{v(x)}=\exp\lim[u(x)-1]^{v(x)}$

22. $\lim\varphi(x)=0,\lim\psi(x)=0$，则$\lim[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\psi(x)}}=\exp\lim\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$

23. $\varphi(x)\sim\widetilde{\varphi}(x),\psi(x)\sim\widetilde{\psi}(x)$，则 $\lim[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\psi(x)}}=\exp\lim\dfrac{\widetilde{\varphi}(x)}{\widetilde{\psi}(x)}$

24. $\lim\varphi(x)=0,\lim\omega(x)=\infty$，则$\lim[1+\varphi(x)]^{\omega(x)}=\exp\lim\varphi(x)\omega(x)$

25. **极限运算法则**

设$\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$，则：

(1)$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$

(2)$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$

(3)$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq0)$

(4)$\lim[f(x)]^{g(x)}=[\lim f(x)]^{\lim g(x)}=A^B \qquad (A>0)$

(5)若 $f(x)\leqslant g(x)$，则 $\lim f(x)\leqslant\lim g(x)$，即 $A\leqslant B$

26. **重要极限"$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$"的其他表达式：**

(1)$\lim\limits_{n\to0}(1+n)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to0^+}(1+n)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to0^-}(1+n)^{\frac{1}{n}}=\mathrm{e}$

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e},\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}\right)=\mathrm{e}$

27. 作为洛必达法则的一个应用，我们来确定极限式子里的待定常数。需要指出下列事实：

若 $\lim\dfrac{u(x)}{v(x)}=c\neq0$ 且 $\lim u(x)=0$[或 $\lim v(x)=0$]，则：

$\lim v(x)=0$(或 $\lim u(x)=0$)

28. 初等函数的有关性质：

定理 1　在区间$(-\infty,+\infty)$内满足下列条件的连续函数惟有线性齐次函数 $f(x)=cx$(c为常数)：

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

定理 2　在区间$(-\infty,+\infty)$内具有性质

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$$

的惟一的一类连续函数是指数函数[若除去 $f(x)\equiv0$ 的情况]

定理 3　(除去 $f(x)\equiv0$ 外)对数函数 $f(x)=\log_a x(a>0,a\neq1)$是确定于区间$(0,+\infty)$内满足条件：

$$f(xy)=f(x)+f(y)$$

的惟一连续函数。

定理 4　在区间$(-\infty,+\infty)$内满足下列条件的惟一连续函数是余弦函数 $f(x)=\cos x$：

(1)$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$

(2)$\dfrac{\pi}{2}$是 $f(x)$是最小正根，即有 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，且当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$时，$f(x)\neq0$

(3)$f(0)>0$

定理 5　设 $f(x)$有一阶导数，则满足方程

$$f'(x)-f(x)=0$$

的函数惟有 $f(x)=ce^x$,(c 为任意常数)

1.3 历年考研真题详解

1.3.1 填空题

1.(1989 数二)$\lim\limits_{x\to0}x\cot2x=$______。

【分析】 将 $\cot2x$ 写成$\dfrac{\cos2x}{\sin2x}$后,利用第一个重要极限求极限,也可利用洛必达法则求极限。

解:方法一:

$$\lim_{x\to0}x\cot2x=\lim_{x\to0}\frac{\cot2x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{-2\csc^2 2x}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{2x^2}{\sin^2 2x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}\frac{(2x)^2}{\sin^2 2x}=\frac{1}{2}$$

方法二:

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{\cos2x}{\sin2x}\cdot x=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin2x}\cdot\cos2x=\lim_{x\to0}\frac{2x}{\sin2x}\cdot\frac{1}{2}\cos2x=\frac{1}{2}$$

【评注】 本题考查求极限的方法,除了上述两种解法外,利用等价无穷小是最简单的方法:

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin2x}\cos2x=\lim_{x\to0}\frac{x}{2x}\cdot\cos x=\frac{1}{2}$$

2.(1991 数二)$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}}=$______。

【分析】 此题不能直接利用四则运算法则求极限,应设法消去∞因子。

解:当 $x\to0^+$ 时,$\frac{1}{x}\to+\infty$,$e^{\frac{1}{x}}\to+\infty$,$e^{-\frac{1}{x}}\to0$。

于是 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}-1}{xe^{-\frac{1}{x}}+1}=\dfrac{-1}{1}=-1$。

3.(1989 数二)设 $f(x)=\begin{cases}a+bx^2, & x\leqslant0\\ \dfrac{\sin bx}{x}, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则常数 a 与 b 应满足的关系是______

【分析】 根据在 $x=0$ 处的左、右极限相等,确定 a、b 的关系。

解:$f(x)$在 $x=0$ 处连续,则它在 $x=0$ 处的左、右极限存在且相等。
因此有

$$\lim_{x\to0^-}(a+bx^2)=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin bx}{x},即\ a=b$$

4.(1992 数二)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{e^x-\cos x}=$______。

【分析】 用洛必达法则(结合有理化)。

解:$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{e^x-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}\cdot\dfrac{x^2}{e^x-\cos x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{e^x-\cos x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{e^x+\sin x}=0$。

5.(1998 数一)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$______。

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

【分析】 本题为$\frac{0}{0}$型未定式，可直接用洛必达法则求解。

$$\text{解:原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{4x\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1-x}}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$$

【评注】 考虑到分母为 x^2，利用 Peano 型余项泰勒公式将分子中$\sqrt{1-x}$和$\sqrt{1+x}$展开到x 的二次幂，有

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)+1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)-2}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[-\frac{1}{4}+\frac{o(x^2)}{x^2}\right]=-\frac{1}{4}$$

一般地，当分母(或分子)为 x^n 时，可考虑将分子(或分母)用泰勒公式展开到 x^n 进行计算往往比较简便。

6.(1999 数一)$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)=$__________。

【分析】 本题考查“$\infty-\infty$”型未定式极限，一般来说应先通分，转化为“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式，再用等价无穷小代换、洛必达法则等处理。

$$\text{解:}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2x-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2x}{3x^2}=\frac{1}{3}$$

【评注 1】 此类问题的求解一般是先尽可能用无穷小等价代换进行简化，然后再用洛必达法则求解。但是在用无穷小等价代换时应注意必须是“整体”代换，即乘除项可以直接代换，但加减项不能直接代换。

【评注 2】 涉及到三角函数项的极限问题时，一般先将 $\tan x,\cot x,\sec x,\csc x$ 转化为 $\sin x,\cos x$ 再用洛必达法则求极限往往可简化计算，因为 $\sin x,\cos x$ 的求导比 $\tan x,\cot x,\sec x,\csc x$ 的求导要简单。例如，本题也可这样求解。

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x}=\frac{1}{3}$$

7.(1997 数二)已知 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{x^{-2}} & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$在 $x=0$ 处连续，则 $a=$__________。

【分析】 求“1^∞”型极限，令其等于 $f(0)$得 a 的取值。

解:由题设$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$，即

$$a=\lim_{x\to 0}(\cos x)^{x^{-2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}-\frac{\tan x}{2x}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

【评注】 “1^∞”型极限也可以利用第二个重要极限求。即

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{x^{-2}}=\lim_{x\to0}[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

8.(1996 数二)$\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\sin\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)-\sin\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=$__________。

【分析】 考虑到 $x\to\infty$,函数表达式中含有$\frac{1}{x}$,一般令$\frac{1}{x}=t$后计算较简便。

解:方法一:

令$\frac{1}{x}=t$,则由洛必达法则知

$$\begin{aligned}原式&=\lim_{t\to0}\frac{\sin\ln(1+3t)-\sin\ln(1+t)}{t}\\&=\lim_{t\to0}\left[\cos\ln(1+3t)\cdot\frac{3}{1+3t}-\cos\ln(1+t)\cdot\frac{1}{1+t}\right]\\&=\lim_{t\to0}\left(\frac{3}{1+3t}-\frac{1}{1+t}\right)=2\end{aligned}$$

方法二:

直接利用三角函数和差化积公式。

$$\begin{aligned}原式&=\lim_{x\to\infty}2x\sin\frac{\ln\frac{1+\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}}}{2}\cos\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{3}{x}\right)}{2}\\&=\lim_{x\to\infty}2x\sin\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x+1}\right)}{2}=\lim_{x\to\infty}2x\cdot\sin\frac{1}{x+1}=2\end{aligned}$$

9.(1995 数二)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=$__________。

【分析】 求无穷和式的极限,利用夹逼定理。

解:利用夹逼定理,由

$$\frac{1+2\cdots+n}{n^2+n+n}<\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+n+i}<\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}=\frac{1}{2}$$

知

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+n+i}=\frac{1}{2}$$

10.(2000 数二)$\lim\limits_{x\to0}\frac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}=$__________。

【分析】 结合无穷小量等价代换和洛必达法则进行计算即可。

解:$\lim\limits_{x\to0}\frac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\arctan x-x}{2x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1}{6x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-x^2}{6x^2(1+x^2)}=-\frac{1}{6}$$

11.（1990 数一）设 a 为非零常数，则$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x}=$______。

【分析】 本题为 1^{∞} 型未定式，直接按第二类重要极限或化为指数函数求极限即可。

解：方法一：

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left[1+\left(\frac{2a}{x-a}\right)\right]^{\frac{x-a}{2a}}\right\}^{\frac{2ax}{x-a}}=e^{2a}$$

方法二：本题可化为指数函数求极限为：

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}e^{x\ln\frac{x+a}{x-a}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2ax}{x-a}}=e^{2a}$$

也可考虑先作变量代换：$x=\dfrac{1}{t}$，再求极限。

【评注】 本题考查基本极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$。[详解 1]和[详解 2]是处理“$1^{\infty}$”型极限时常用的两种方法。

12.（2003 数二）若 $x\to 0$ 时，$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小，则 $a=$______。

【分析】 根据等价无穷小量的定义，相当于已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}}{x\sin x}=1$，反过来求 a。注意在计算过程中应尽可能地应用无穷小量的等价代换简化运算。

解：当 $x\to 0$ 时

$$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1\sim-\frac{1}{4}ax^2,x\sin x\sim x^2$$

于是，根据题设有

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{4}ax^2}{x^2}=-\frac{1}{4}a=1$$

故 $a=-4$。

【评注】 若当 $x\to 0$ 时，$f(x)\to 0$，则有

$$[1+f(x)]^{a}-1\sim af(x),\sin f(x)\sim f(x)$$

13.（2001 数二）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=$______。

【分析】 因分子部分含有根式，应先有理化再求极限。

解：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(1-x)}{(x-1)(x+2)}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}}$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+2}=-\frac{\sqrt{2}}{6}$$

14.（1996 数一）设 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+2a}{x-a})^{x}=8$，则 $a=$______。

【分析】 本题属 1^{∞} 型未定式极限问题，用第二类重要极限或化为指数函数求极限即可，然后再根据已知等式求参数 a。

解：因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}}\right]^{\frac{3ax}{x-a}}=e^{3a}$

于是 $e^{3a}=8\Rightarrow a=\ln 2$

15.(2003 数一)$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=$______。

【分析】 本题属 1^∞ 型未定式,化为指数函数求极限即可。

解:$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\ln(1+x^2)}\ln\cos x}$

而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2x}=-\dfrac{1}{2}$

故原式 $=e^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$。

【评注】 对于 1^∞ 型未定式,$\lim f(x)^{g(x)}$ 的极限,也可直接用公式

$$\lim f(x)^{g(x)}(1^\infty\text{型})=e^{\lim[f(x)-1]g(x)}$$

进行计算,因此本题也可这样求解:

因为 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-1)\dfrac{1}{\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$

所以原式 $=e^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$。

16.(2002 数二)设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\frac{x}{2}}, & x>0\\ ae^{2x}, & x\leqslant 0\end{cases}$,在 $x=0$ 处连续,则 $a=$______。

【分析】 先求出在分段点处的左、右极限 $f(0-0)$,$f(0+0)$,再根据 $f(0-0)=f(0+0)=f(0)$ 确定参数 a。

解:因为

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\tan x}{\frac{x}{2}}=-2$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}ae^{2x}=a$$

由题设得 $a=-2$。

【评注】 $f(x)$ 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$

17.(2004 数二)设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$,则 $f(x)$ 的间断点为 $x=$______。

【分析】 先对不同的 x,求极限得 $f(x)$ 的表达式,再讨论 $f(x)$ 的间断点。

解:显然当 $x=0$ 时,$f(x)=0$;

当 $x\neq 0$ 时,$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1-\frac{1}{n}\right)x}{x^2+\frac{1}{n}}=\dfrac{x}{x^2}=\dfrac{1}{x}$

所以 $f(x)=\begin{cases}0, x=0\\ \dfrac{1}{x}, x\neq 0\end{cases}$

因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty\neq f(0)$

故 $x=0$ 为 $f(x)$的间断点。

18.(1997 数一)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$______。

【分析】 先用无穷小量的等价代换进行化简,再结合重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ 以及无穷小量与有界变量的乘积仍为无穷小量进行计算。

解:原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{2x}=\dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}x\cos\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{2}+0=\dfrac{3}{2}$。

【评注】 本题若直接用洛必达法则求极限,会出现求导后分子的极限不存在情形,从而无法求出极限,一般来说,当 $x\to 0$ 时,若待求极限的函数关系式中含有 $\sin\dfrac{1}{x}$,$\cos\dfrac{1}{x}$ 等时,用洛必达法则往往是失效的,此时可改用无穷小量与有界变量的乘积仍为无穷小量进行计算。

1.3.2 选择题

1.(1997 数二)设 $g(x)=\begin{cases}2-x & x\leqslant 0\\ x+2 & x>0\end{cases}$,$f(x)=\begin{cases}x^2 & x<0\\ -x & x\geqslant 0\end{cases}$,则 $g[f(x)]$为(　　)。

(A)$\begin{cases}2+x^2 & x<0\\ 2-x & x\geqslant 0\end{cases}$　　(B)$\begin{cases}2-x^2 & x<0\\ 2+x & x\geqslant 0\end{cases}$

(C)$\begin{cases}2-x^2 & x<0\\ 2-x & x\geqslant 0\end{cases}$　　(D)$\begin{cases}2+x^2 & x<0\\ 2+x & x\geqslant 0\end{cases}$

答:选(D)。

【分析】 由复合函数的定义,分段确定 $g[f(x)]$的表达式。

解:根据 $g(x)$的定义知,复合函数

$$g[f(x)]=\begin{cases}2-f(x) & f(x)\leqslant 0\\ f(x)+2 & f(x)>0\end{cases}$$

而 $x<0$ 时,$f(x)=x^2>0$;$x\geqslant 0$ 时,$f(x)=-x\leqslant 0$。

故 $g[f(x)]=\begin{cases}x^2+2 & x<0\\ 2+x & x\geqslant 0\end{cases}$

2.(1990 数二)已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$,其中 a、b 是常数,则(　　)。

(A)$a=1,b=1$　　(B)$a=-1,b=1$

(C)$a=1,b=-1$　　(D)$a=-1,b=-1$

答:选(C)。

【分析】 求极限的反问题,由已知极限确定 a,b 的取值。

解:由已知

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2+(a+b)x-b}{x+1}=0$$

则必有

$$\begin{cases}1-a=0\\ a+b=0\end{cases}$$

解得 $a=1,b=-1$

【评注】 本题也可利用

$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2}{x+1}-ax-b)=\lim\limits_{x\to\infty}(x-1+\frac{1}{x+1}-ax-b)=\lim\limits_{x\to\infty}[(1-a)x+\frac{1}{x+1}-b-1]=0$,得 $a=1,b=-1$。

3.(1995 数二)设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义,$f(x)$ 为连续函数,且 $f(x)\neq 0$,$\varphi(x)$ 有间断点,则(　　)。

(A)$\varphi[f(x)]$ 必有间断点　　(B)$[\varphi(x)]^2$ 必有间断点

(C)$f[\varphi(x)]$ 必有间断点　　(D)$\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点

答:选(D)

【分析】 利用分析法得正确选项,或举反例排除不正确项。

解:方法一(用反证法):

若 $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 无间断点,即连续,则

$\frac{\varphi(x)}{f(x)}\cdot f(x)=\varphi(x)$

也连续,与已知条件矛盾,所以 $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点。(A)、(B)、(C)均可举反例说明不成立。

方法二:

取 $\varphi(x)=\begin{cases}1 & x\geqslant 0\\ -1 & x<1\end{cases}$,$f(x)=x^4+1$,则 $f(x),\varphi(x)$ 符合要求,而 $\varphi[f(x)]=1,\varphi^2(x)=1,f[\varphi(x)]=2$ 均无间断点,故排除(A),(B),(C),应选(D)。

4.(2000 数二)设函数 $f(x)=\frac{x}{a+e^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$,则常数 a、b 满足(　　)。

(A)$a<0,b<0$　　(B)$a>0,b>0$

(C)$a\leqslant 0,b>0$　　(D)$a\geqslant 0,b<0$

答:选(D)。

【分析】 根据 $f(x)$ 的连续性和条件 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ 确定参数 a,b。

解:由题设,$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,因此对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$,有 $a+e^{bx}\neq 0$,这只需 $a\geqslant 0$ 即可;另外,由 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ 知,$\lim\limits_{x\to-\infty}(a+e^{bx})=\infty$,所以必有 $b<0$。故正确答案为(D)。

【评注】 事实上,本题由 $a\geqslant 0$ 即可选择正确答案(D)。

5.(2000 数二)若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}$ 为(　　)

(A)0　　(B)6

(C)36　　(D)∞

答:选(C)。

【分析】 本题已知某函数的极限,推求另一相关函数的极限,基本方法有:无穷小量的等价代换、洛必达法则和泰勒展开。其中用洛必达法则时,应注意分子、分母求导以后的极限必须存在,本题 $f(x)$ 未知是否可导,不能用洛必达法则。泰勒展开式的阶数可由分母的幂次来确定,本题可将 $\sin 6x$ 展开到 x^3 即可。也可以利用配项的方法,将所求极限与已知的极限联

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com