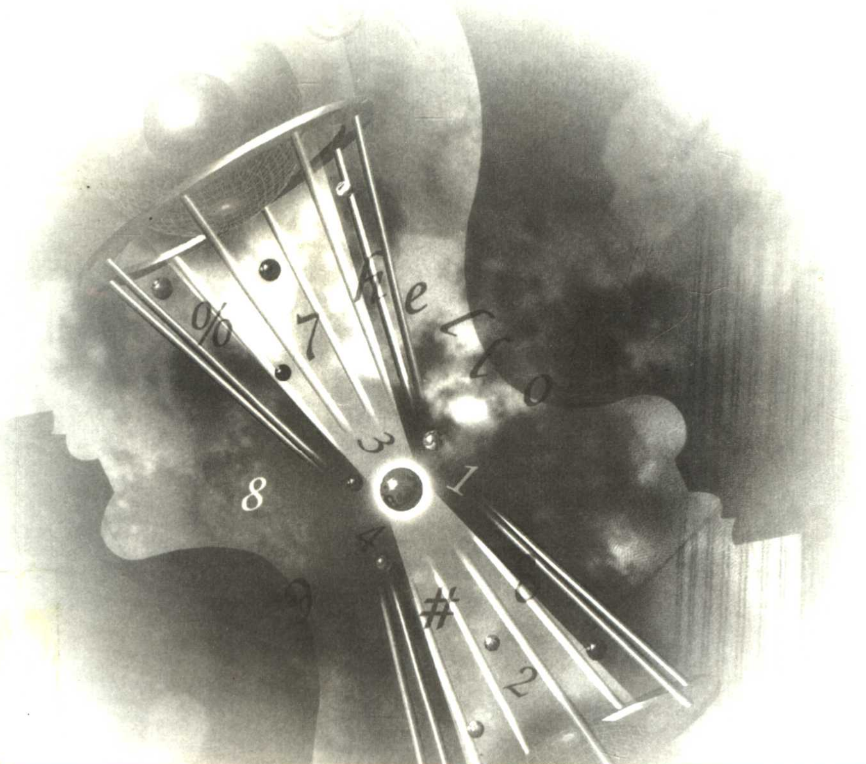
数学建模简明教程

袁震东 蒋鲁敏 束金龙 编著



华东师范大学出版社

数学建模简明教程

袁震东　蒋鲁敏　束金龙　编著

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学建模简明教程 / 袁震东等编著.—上海：华东师范大学出版社，2002.3
ISBN 7-5617-2832-8

I. 数... II. 袁... III. 数学模型-建立模型-中学-师资培训-教材 IV. G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 007278 号

数学建模简明教程

编　　著　袁震东　蒋鲁敏　束金龙
责任编辑　宋维锋
封面设计　黄惠敏
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
市场部电话 021-62865537
传真 021-62860410
http://www.ecnupress.com.cn
社　　址　上海市中山北路 3663 号
邮编 200062

印 刷 者　上海新文印刷厂
开　　本　890×1240　32 开
印　　张　9.75
字　　数　260 千字
版　　次　2002 年 2 月第一版
印　　次　2002 年 2 月第一次
印　　数　001—5 100
书　　号　ISBN 7-5617-2832-8/O·117
定　　价　14.00 元

出 版 人　朱杰人

序

20 世纪 90 年代以来,“数学模型”一词在中学数学教育界渐渐耳熟能详,日见普及。这是一件值得庆幸的大事。事实上,“数学模型”进入数学教学,其意义不仅在于增加一点教学内容,更重要的是涉及数学观的变化,在整体上促进了数学教学的进步。

综观数学史,以建立形式化演绎体系为特征的纯粹数学和以建立数学模型为标志的应用数学,总是互相交织地进行着。从原始的结绳计数、丈量田亩,到古希腊的论证数学;从牛顿为建立物体运动模型而创立微积分,到希尔伯特建立形式主义学派;爱因斯坦的相对论推动了微分几何的研究,量子力学为泛函分析催生;反过来,拓扑学为基因工程服务,抽象代数使通信编码合理,数学控制论把卫星准确送入轨道。计算机技术的进步,导致数学模型可以成为一种数学技术,直接产生经济效益,而抽象数学也因而获得巨大的推力。可以认为,数学本身就是数学模型及其理论拓展的总和。

多年以来,中国的数学教育存在着忽视“数学模型”教学的倾向。“数学=逻辑推理”,“数学=思想体操”,“数学=难题求解”等等看法,凸现了数学理性思维的一面,却把数学应用、建立数学模型斥之为“实用主义”和“短视行为”,结果不可避免地走向片面性。如果任凭这种错误的数学观继续下去,使得数学和现实失去联系,国家的科学事业将会蒙受巨大的损失。

幸运的是,这种忽视应用的数学观正在得到迅速改变。以“两弹一星”中的数学技术为先导,国民经济中的各行各业都在使用数学方法。我国在软件数学、数据压缩技术、优化方法、金融数学以及大量实际数学问题的解决上投入了越来越多的人力和物力,取得了一系

列的成果。在数学教育上，国家高考指挥棒使“数学应用题”的求解成为时尚。数学建模竞赛、数学应用竞赛吸引着大批青少年关注数学应用问题。数学建模已作为国家数学课程标准中的有机组成部分。

应该看到，中国仍然是一个发展中国家。从半封建、半殖民地社会一路走过来，落后的生产水平和科学基础，难以提出有价值的创新数学模型，数学的发展还未能扎根于自己的国家建设，以致数学家不得不限制在纯粹数学的竞赛场上寻找研究课题。经过几十年的发展，中国正在大步迈向现代化。可以预料，出自国内生产建设和科学发展的数学问题，将会更多地直接地呈现在我们面前，而薄弱的应用数学基础也会和国家建设的需要发生强烈的反差。为此，作为国家基础教育一部分的数学教学，应该及时调整步伐，跟上形势，为21世纪的国家建设打好应用数学的基础，给各行各业建立各种数学模型提供数学素质的储备。

20世纪90年代以来，我国的综合大学数学系陆续开设“数学建模”课程。但是，师范院校数学系培养计划中至今仍然没有“数学建模”课程的地位，在师范院校中开设此类课程并不普遍。这一失误使得出身于师范大学的数学教师们多半不熟悉“数学模型”的教学。如上所述，数学建模能力的形成，更涉及对数学的整体认识，因而在继续教育中为数学教师补上这一课，恐怕是非常必要的。

袁震东等各位教授，从事数学建模教学和研究多年，卓有成效。他们鉴于已出版的《数学模型》教材多为高等数学模型，与中学数学教学实际相距较远，所以特地结合中学数学教师的需要，编写了这本教材。本书的起点较低，坡度较小，却涵盖了数学建模的主要内容，尤其着眼于数学建模思想的阐述，以及计算机的使用，具有很强的时代感。经过多次试教，现在该讲义已经相当成熟了。

21世纪已经到来，数学教育应该有新的面貌。我想，数学模型的教学，将是新气象的标志之一。值此新著出版之际，写了以上的话，和大家共勉。

张奠宙

2001年6月于华东师范大学

前　言

20世纪90年代初,华东师范大学数学系开始在大学本科课程中开设数学建模课,并组织学生参加MCM(美国数学建模竞赛的简称)以及上海和全国的大学生数学建模竞赛。1996年秋季,除了上述活动外,又在中学教师硕士课程班、大专学历中学教师进修本科(简称专升本)班和中学教师国家级骨干教师培训班进行数学建模教学活动。此外,还在一些重点中学进行数学建模讲座等活动。

与此同时,我们从事过长江取水数学建模,宝山钢铁集团公司KDD系统及其在质量控制中的数学建模和信号处理方面的数学建模等项目研究。

通过教学和科研活动,我们深切地体会到:数学建模教学的基本要求是使学生学会如何从实际中抽象出数学问题,如何收集整理数据,如何正确使用已学的数学知识和方法进行再创造和创新,利用计算机获取与问题要求相符的数学模型。使学生学会验证模型的技能技巧并培养学生进行数学写作的能力。

根据以上数学建模教学的基本要求和给师范大学学生、中学教师上数学建模课的实践经验,我们编写了这本《数学建模简明教程》。该教材有如下特点:

(1) 本书吸收了国内外数学建模方面的成果。全书分为两篇:第一篇建模的基本方法,内容包括复利计算、最优存贮、线性规划、整数规划、最短路、图和网络、动态规划、层次分析、遗传算法等模型。建立和求解这些模型基本上用初等数学和迭代方法。第二篇建模范例与软件实现,内容有人口模型及演示、人工神经网络模型及演示以及竞赛排名问题等。这部分内容用到一些高等数学方法。

(2) 本书包含已解决的30多个数学建模问题，每章有数量不等的作业题。本书的叙述尽量符合数学建模一般步骤和数学建模文章写作的要求。

(3) 本书可作为中学教师职后培训教材，也可作师范院校培养中学教师的教材和大学生的参考书等。

(4) 随着素质教育的实施，许多中学已经开设或即将开设各种与数学建模有关的课程或组织数学课外兴趣小组。本书也可作为中学数学建模活动的主要教材或参考书。

在本书写作过程中，张奠宙教授、赵小平副教授给了我们热情的帮助和鼓励，并提供了有用的资料。

本书稿完成后在中学骨干教师培训和部分大学生的数学建模课中作为讲义使用过，交稿前对原稿又作了一次修订和补充。

希望本书能得到同行们的批评指正，使这本教材日臻完善。

编者

2001年2月

目　录

第一篇　数学建模的基本方法

第二篇　范例演示课件

第 一 篇

数学建模的基本方法

第一章 引 论

§1 数学建模的内容和意义

什么是数学模型？什么是数学建模？为什么要学习数学建模？这些是想学数学建模的人首先关心的问题。下面就这些问题作些阐述。

一、数学建模的内涵和外延

广义地说，一切数学概念、数学理论体系、数学公式、方程式和算法系统都可以称为数学模型；各种数学分支也都可看作数学模型，如欧氏几何、非欧几何、线性代数、李群、代数几何、量子群、微积分、复变函数、泛函分析、平稳过程、马尔可夫过程等等。然而，本书中的数学模型（也是数学建模竞赛中所说的数学模型），其涵盖面要狭窄得多，这里数学模型的内涵指解决实际问题时所用的一种数学框架。这种数学框架可以是方程、计算机程序乃至图表和图形。

而数学建模也比形成某一数学分支的过程要简短多了。在这里，数学建模指根据具体问题，在一定假设下找出解这个问题的数学框架，求出模型的解，并对它进行验证的全过程。

数学建模是一个“迭代”过程，每次“迭代”包括实际问题的抽象、简化，作假设明确变量与参数，形成明确的数学框架；解析地或数值地求出模型的解；对求解所得结果解释、分析和验证；如果符合实际可交付使用，如果与实际情况不符，需对假设作修改，进入下一个“迭代”。经过多次反复“迭代”，最终求得令人满意的结果。

数学模型的外延指各类具体的数学模型如资源管理的数学模

型、社会经济的数学模型、生态系统的数学模型、医学生物工程和遗传的数学模型、交通流的数学模型、过程控制的数学模型等等。

可以说，我国古代的《九章算术》(约成书于1世纪)是一本最早的数学建模专著，这本书收集了246个应用题，分别隶属于方田、粟米、差分、少广、商功、均输、盈不足、方程、勾股等九章。

纵观中国数学史，大部分古代数学经典著作都以问题集形式出现，依据不同的方法或类型分成章节。每个问题分成若干条目。条目一是“问”，提出具体问题。条目二是“答”，给出问题的数值答案。条目三称为“术”，讨论与条目同类问题的普遍方法或算法，有时相当于一个公式或定理，条目四是“注”，说明“术”的理由，实质上给出一种证明或佐证。

这些古代数学书的写法与今天数学建模的叙述十分相似，当然，由于时代的不同，今天数学建模关注的问题与古代经典数学著作所记述的问题已有了很大的变化。

二、简单数学模型举例

为了进一步加深对数学模型与数学建模的认识，举几个简单数学模型的例子。

例1 一个星级旅馆有150个客房。经过一段时间的经营实践，旅馆经理得到一些数据：如果每间客房定价为160元，住房率为55%；每间客房定价为140元，住房率为65%；每间客房定价120元，住房率为75%；每间客房定价为100元，住房率为85%。欲使每天收入最高，问每间住房的定价应是多少?

经分析，为了建立旅馆一天收入的数学模型，可作如下假设：

假设一 在无其他信息时，不妨设每间客房的最高定价为160元。

假设二 根据经理提供的数据，设随着房价的下降，住房率呈线性增长。

假设三 设旅馆每间客房定价相等。

建立模型

分析 根据题意，设 y 表示旅馆一天的总收入，x 为与 160 元相比降低的房价。

由假设 2，可得每降低 1 元房价，住房率增加为

$$\frac{10\%}{20}=0.005$$

因此

$$y=150(160-x)(0.55+0.005x) \qquad ①$$

由于 $0.55+0.005x\leqslant 1$，可知

$$0\leqslant x\leqslant 90$$

我们的问题是：当 $0\leqslant x\leqslant 90$ 时，求 y 的最大值点，即求解

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 90}\{y=150(160-x)(0.55+0.005x)\}$$

解模型

把①左边除以 (150×0.005) 得

$$y'=-x^2+50x+17\,600$$

由于常数因子对最大值运算没有影响，因此可化为求 y' 最大的值点，利用配方法得

$$y'=-(x-25)^2+18\,225$$

显然当 $x=25$，y' 最大，因此可知

$$x=25(\text{元})$$

最大收入对应的住房定价为

$$160\text{ 元}-25\text{ 元}=135\text{ 元}$$

相应的住房率为

$$0.55+0.005\times 25=67.5\%$$

最大收入为

$$150 \times 135 \times 67.5\% = 13\,668.75(\text{元})$$

讨论与验证

1. 容易验证此收入在已知各种定价对应收入中是最大的，事实上

定　价	160元/(天·间)	140元/(天·间)	120元/(天·间)	100元/(天·间)	135元/(天·间)
收　入	13 200元	13 650元	13 500元	12 750元	13 668.75元

如果为了便于管理，那么定价140元/(天·间)也是可以的，因为此时它与最高收入只差18.75元。

2. 如果定价是180元/(天·间)，住房率应为45%，其相应收入只有12 150元。因此假设1是合理的。事实上二次函数在[0,90]之内只有一个极值点25。

例2 (兔子繁殖模型)兔子出生两个月后能生小兔。若每对兔子每次只生一对兔(一个月内)，问n个月后有多少对兔子？

为了建立兔子总数的数学模型，可作如下假设：

假设一　第一个月只有一对兔子。

假设二　在一段时间内不计兔子的死亡数。

分析

第一个月：有一对兔子；

第二个月：小兔尚未成熟，不能生育，故兔子总数仍是1对；

第三个月：兔子生了1对小兔，现共有兔子2对；

第四个月：老兔子又生了1对小兔，而上月出生的小兔未成熟不能生殖，故该月共有3对兔子；

第五个月：有2对兔子每对生1对，另有1对不能生殖，该月有兔子5对。

如此推算得下列兔子对子数列

$$1、1、2、3、5、8、13、21、34、\cdots$$

这是斐波那契(Fibonacci)数列，这个数列的第n项记作F_n，那