

新訂 数学

小平邦彦 編

I

0361

昭和47年4月10日文部省検定済

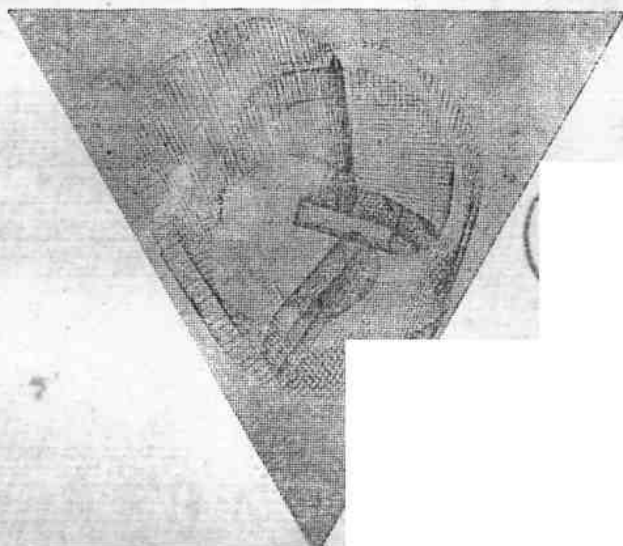
昭和50年4月10日改訂検定済

高等学校数学科用

新訂 数学

I

小平邦彦 編



東京書籍株式会社

別記著作者

東京大学名誉教授 学習院大学教授	小平邦彦
東京大学教授	岩堀長麿
一橋大学教授	松坂和夫
東京教育大学教授	前原昭二
東京大学教授	藤田 宏
成蹊大学教授	志村利雄
立教大学教授	岩村 聯
宮城教育大学教授	鶴丸孝司
杏林大学教授	伊藤豊吉
都立田無工業高校教諭	番場参策
都立田園調布高校教諭	山崎和郎
都立戸山高校教諭	三瀬茂利
都立西高校教諭	渋谷幸敏
都立小石川工業高校教諭	八木恒雄
お茶の水女子大学付属高校教諭	石田光子

東京書籍株式会社編集部

表紙 勝井三雄 カバー
目次抜刷 電子計算機センター

新数学 I

数 I 419

昭和52年1月20日印刷
昭和52年2月10日発行
昭和47年4月10日文部省検定済
昭和50年4月10日改訂検定済

著作者 小平邦彦
ほか14名(別記)
発行者 東京書籍株式会社
代表者 鈴木和夫
東京都台東区台東1丁目5番18号
印刷者 東京書籍印刷株式会社
代表者 奥賀田辰雄
東京都北区堀船1丁目23番31号
発行所 東京書籍株式会社
東京都台東区台東1丁目5番18号
電話 東京(03)835局6111(代表)
郵便番号 110

定価 文部大臣が認可し官報で告示した定価
(上記の定価は、各教科書取次供給所に表示します。)

表紙と各扉のカットについて

表紙や各扉のカットは、電子計算機（コンピューター）による自動製図プログラムシステムにより制作したものです。

たとえば、I章のカットは長方形を縮小させながらある曲線に沿って回転させたものです。また、III章のカットは放物線を平行移動させた図と、2点と正弦曲線上の移動点とを結んだ図や直線を回転させた図などを合成したものです。

は じ め に

数学は数千年の歴史をもち、たえず進歩をつづけている学問である。ことに最近数十年間における数学の発展は実にめざましいものがある。

現代の数学はいくつかの基本的仮定から出発して論証によって展開される体系である。そしてこの基本的仮定は任意の仮定であって、矛盾を含まないかぎり、まったく自由にえらんでよい。カントルがいったように、数学は本質的に自由であって、数学者はおよそ考えることが可能なものをすべて自由に考える。この意味で数学は人間精神の自由な創造物であるといわれる。

一方、数学はいろいろの分野に広く応用される。たとえば、複素数は、虚数という名称が示すように、はじめは実在しない空想的な数として導入されたが、現代物理学の基礎理論などは複素数なしには考えられないのであって、複素数の世界が真の実在で、実数の世界はその一断面にすぎないと考えられる。また、確率論はでたらめに起こる現象さえもある数学的法則に支配されていることを示す。こういうことからみると、数学は森ら万象の根底をなしているものであって、とうてい人間の精神がかってにつくりだしたものとは考えられないのである。

このように数学はいろいろな学問のもとになるたいせつな学問である。本書は中学校を卒業して高等学校にはいり、数学Ⅰを学ぶ人のための教科書である。

本書の第Ⅰ章では、中学校で学んだことにひきつづいて数と式、分数式などについて基本的なことがらを学ぶ。第Ⅱ章では方程式と不等式、特に2次方程式の解法とそれに関連して複素数について学ぶ。第Ⅲ章では図形と式の関係について、第Ⅳ章ではベクトルについて学ぶ。第Ⅴ章と第Ⅵ章では2次関数、指数関数、対数関数、三角関数などについて述べる。これらは微積分などにおいて重要な関数であって、また広い応用をもつ。第Ⅶ章では確率を扱う。

第Ⅰ章から第Ⅶ章までにしばしば集合の考えを用い、また論理についても述べるが、第Ⅷ章で集合と論理を系統的に扱う。またこの章で写像について学ぶ。

数学を学ぶには自分でよく考えることがたいせつである。抽象的一般的なことがらも、そのもとになる具体的な例をよく考えて理解すれば、自然にわかるものである。本書では、このことを考えにいられて、抽象的一般的なことがらも、具体的な例からはじめてわかりやすく説明するように努めた。

目次

I 章 数と式

1 節 実数	2	3 節 整式の除法と分数式	26
1 数直線と実数	2	1 整式の除法	26
2 実数の演算と大小	6	2 整式の最大公約数	
3 平方根を含む式の計算	10	最小公倍数	28
問題	13	3 分数式とその計算	30
2 節 整式	14	4 整数と整式, 有理数と	
1 整式	14	有理式の類似	33
2 整式の加法・減法・乗法	17	問題	34
3 展開公式	20	練習問題 A, B	35, 36
4 因数分解	21		
問題	25		

II 章 方程式と不等式

1 節 2 次方程式	38	2 3 次以上の方程式	53
1 因数分解による解法	38	3 因数定理	54
2 複素数	40	問題	59
3 根の公式	45	3 節 不等式	60
4 根と係数の関係	48	1 基本性質	60
問題	51	2 2 次不等式	62
2 節 連立方程式と		3 不等式の証明	67
3 次以上の方程式	52	問題	72
1 連立方程式	52	練習問題 A, B	73, 74

III章 平面図形と式

1 節 点の座標.....76	3 節 円.....95
1 直線上の点の座標.....76	1 円の方程式.....95
2 平面上の点の座標.....78	2 円と直線.....98
問題.....83	3 簡単な2次曲線.....101
2 節 直線.....84	問題.....105
1 直線の方程式.....84	4 節 不等式の表す領域.....106
2 2直線の平行条件と垂直条件.....87	1 不等式の表す領域.....106
3 軌跡の方程式.....91	2 連立不等式の表す領域.....109
問題.....94	3 不等式の表す領域の応用.....111
	問題.....114
	練習問題 A, B.....115, 116

IV章 ベクトル

1 節 ベクトルとその演算.....118	2 節 ベクトルの応用.....132
1 ベクトルの意味.....118	1 位置ベクトル.....132
2 ベクトルの加法・減法.....120	2 直線とベクトル.....135
3 ベクトルの実数倍.....123	3 力・速度とベクトル.....138
4 ベクトルの成分.....125	問題.....140
問題.....131	練習問題 A, B.....141, 142

V章 関数

1 節 簡単な関数.....144	2 2次関数のグラフと
1 2次関数とグラフ.....144	2次方程式・2次不等式.....150

3 関数 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ のグラフ	153
4 合成関数	155
問題	158
2 節 逆関数, 指数関数, 対数関数	159

1 逆関数	159
2 累乗と累乗根	162
3 指数法則と指数関数	165
4 対数関数	170
問題	176
練習問題 A, B	177, 178

VI章 三角関数

1 節 三角比	180
1 正接	180
2 正弦・余弦	182
3 三角比の相互関係	183
問題	184
2 節 三角関数	185
1 一般角	185
2 弧度法	187
3 三角関数	189

4 三角関数のグラフ	192
5 三角関数の性質	195
問題	203
3 節 三角関数の応用	204
1 三角形への応用	204
2 三角形の面積	207
3 三角関数と正射影	208
問題	210
練習問題 A, B	211, 212

VII章 確率

1 節 順列と組合せ	214
1 和の法則	214
2 積の法則と直積	216
3 順列	219
4 組合せ	223
問題	225
2 節 確率	226

1 確率の意味	226
2 事象と集合	229
3 確率の基本性質と加法定理	232
4 条件つき確率と乗法定理	236
5 独立事象と従属事象	239
問題	242
練習問題 A, B	243, 244

Ⅷ章 写像・集合・論理

1 節 写像.....246	2 節 集合・論理.....260
1 写像の意味.....246	1 命題.....260
2 写像の合成.....250	2 命題の同値.....263
3 上への写像・1対1の写像.....252	3 条件と集合.....265
4 逆写像.....254	4 “すべて”と“存在”.....267
5 平面の点の移動.....257	5 必要条件と十分条件.....270
問題.....259	6 交わり, 結び, 補集合.....273
	問題.....274
	練習問題 A, B.....275, 276

付録

研究 ユークリッドの互除法.....278	索引.....292
補充問題.....280	ギリシア文字とその読み方.....294
解答.....283	数表 平方・平方根・逆数表.....295
	常用対数表, 三角関数表 296, 298

凡例

例 本文の理解を助けるために具体例を示したものです。

例題 内容を理解するための代表的な問題を、例題としてあげました。わく囲みの〔解〕や〔証明〕は、模範解を示したものです。

注意 (s) 注意や欄外の脚注で、理解を助ける説明を補いました。

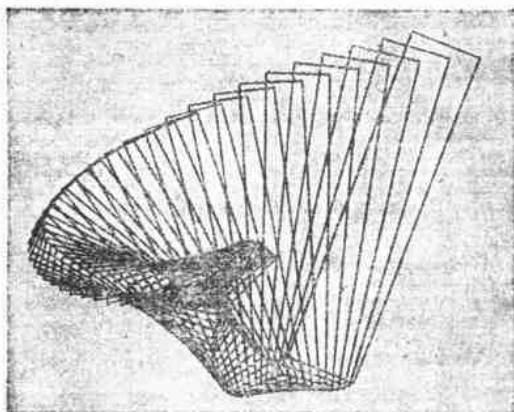
問 学習した内容をすぐ身につけるための設問と、導入のための設問を本文中で問にしました。

問題 各節末に、その節で学んだことがらを練習するための問題を設けました。

練習問題 各章末に、その章全体の復習と応用の問題を掲げました。Aは基本的なものを主とし、Bはやや程度の高い問題となっています。

付録 巻末の研究や補充問題は、さらに学習内容の進んだ箇所です。

I・数と式



1 節 実数

2 節 整式

3 節 整式の除法と分数式

数学者は長い時間をかけて数の概念をつくってきた。正の数だけの世界から零と負の数をわがものとするにいたるまでの時間は想像以上に長いのである。また、昔は有理数で表されない量の存在は信じられていなかったという。ピタゴラス学派は有理数だけですべてを説明しようとしながら、一方では正方形の対角線の長さと1辺の長さとの比が $\sqrt{2}$ という無理数であることを発見して大いに悩んだといわれている。実数の概念が厳密な形で確立されたのは前世紀のことなのである。

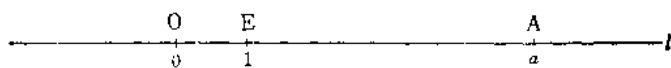
一方未知量も既知量も文字ですべてを表して式を扱う考え方は、17世紀初頭にヴィエタ(1540~1603)によって確立された。これによって代数学は体系化され、今日にいたる広大な発展の基礎がつくられたのである。

1 節 実数

1 数直線と実数

この項では数直線について学び、数について中学校までに学んだことを簡単に復習しておこう。

1つの直線 l の上に定点 O と他の定点 E とを定める。点 A を l 上の任意の点とするとき、線分 OE の長さを **単位** として測った2点 O, A 間の距離を OA で表す。距離 OA は、 O と A が一致する場合を除けば正の数である。



直線 l 上の点 A に次のように定めた数 a を対応させる。

O からみて A が E と同じ側にあるとき、 $a = OA$

O からみて A が E の反対側にあるとき、 $a = -OA$

A が O と一致したとき、 $a = 0$

そうすれば、 l 上の各点にそれぞれ数が対応し、相異なる2点に対応する2つの数は相異なる。

直線 l 上のすべての点がそれぞれその点に対応する数を表すと考えたとき、 l を **数直線**、 O をその **原点**、 E を **単位点** という。数直線 l 上の点 A に対応する数を A の **座標** とよび、 A の座標が a であるとき $A(a)$ と書く。また、この点 A を簡単に点 a ともいう。

数にはいろいろの種類がある。まず、ものを数えるときに使われる数

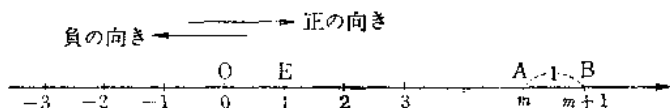
$$1, 2, 3, \dots$$

を **自然数** または **正の整数** という。

$$-1, -2, -3, \dots$$

は **負の整数** とよばれる。正の整数, 負の整数 および 0 を合わせて **整数** という。

整数は, 下の図に示すように, 数直線上の等間隔に並んだ点によって表される。隣り合う 2 点 $A(m)$ と $B(m+1)$ の間隔は 1 である。



このように, 数直線を水平にかくときには, ふつう単位点 E を原点 O の右側にとる。すなわち正の向き(数の大きくなる向き)が右向きである。

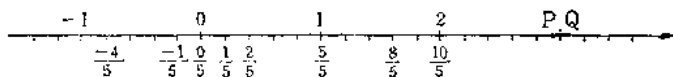
問1 2点 $A(-8)$ と $B(26)$ の間の距離を求めよ。

整数 m, n を用いて $\frac{m}{n}$ の形に表される数を **有理数** という。

整数 m は $\frac{m}{1}$ と表されるから有理数である。

自然数 n を 1 つ定めたとき, $\frac{m}{n}$ (m は整数) の形の有理数は, 数直線上に $\frac{1}{n}$ の間隔で並んだ点によって表される。

下の図は $\frac{m}{5}$ の形の有理数を表す点を示している。



注意 n を限りなく大きくすれば, 間隔 $\frac{1}{n}$ は限りなく小さくなる。したがって, 数直線上にどんなに短い線分 PQ をとっても, P と Q が一致しないかぎり, P と Q の間には有理数を表す点が無数に存在する。

4 1 数と式

整数でない有理数は、小数の形に表すと、

$$-\frac{1}{8} = -0.125$$

のような有限小数となるか、または

$$\frac{4}{3} = 1.3333\cdots$$

$$\frac{9}{74} = 0.1216216216\cdots$$

のように、小数のある位以下に同じ数字の配列が無限にくり返される無限小数となる。

このような無限小数を **循環小数** という。

問2 次の数を $\frac{m}{n}$ (m は整数, n は自然数) の形になおせ。

(1) 0.4

(2) $3\frac{1}{2}$

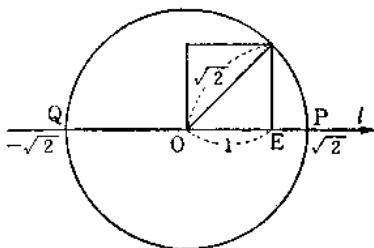
(3) 1.41

(4) -2.95

右の図のように、数直線 l 上の線分 OE を1辺とする正方形がある。

O を中心とし、その正方形の対角線の長さを半径とする円をかき、 l と交わる点を P 、 Q と

すれば、 P と Q はそれぞれ $\sqrt{2}$ と $-\sqrt{2}$ を表す。 $\sqrt{2}$ および $-\sqrt{2}$ は有理数ではない。



このように、数直線 l の上には、有理数に対応しない点が存在する。 l 上の点 A が有理数に対応しないとき、 A の表す数、すなわち A の座標は **無理数** とよばれる。

たとえば $\sqrt{2}$ は無理数である。円周率 π も無理数である。

無理数は

$$\sqrt{2} = 1.41421 \cdots$$

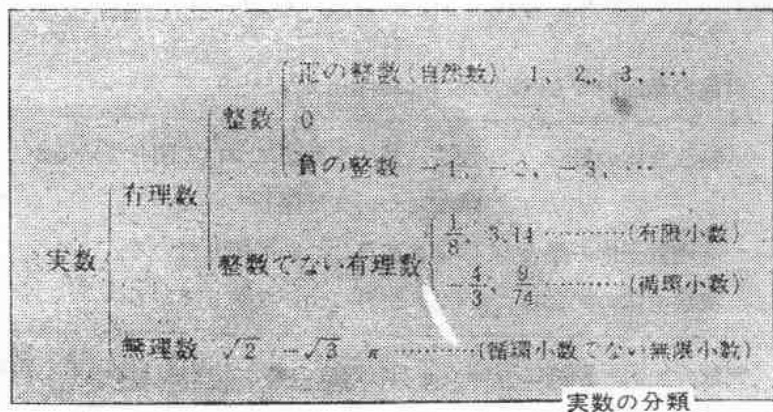
$$\pi = 3.14159 \cdots$$

のように、循環小数でない無限小数で表される。

有理数と無理数を合わせて**実数**という。

したがって、数直線 l 上の任意の点の座標は実数であって、 l 上の点にその座標を対応させれば、 l 上のすべての点とすべての実数は 1 対 1 に対応する。

以上のことから実数を分類すると次のようになる。



問3 次の数は有理数か無理数か。

(1) $\sqrt{9}$

(2) $1.414 + 1.732$

(3) 0

(4) $\frac{2}{\sqrt{2}}$

(5) $(\sqrt{5})^2$

2 実数の演算と大小

整数の演算

2つの整数の和, 差, 積はまた整数である。すなわち, 整数の範囲内で加法, 減法, 乗法は自由に行われる。このことを, 整数全体の集合は加法, 減法, 乗法について閉じている といひ表す。しかし, $4 \div 3$ のような除法は整数の範囲内ではできない。

2つの有理数 a, b の和, 差, 積は有理数である。さらに b が 0 でないならば商 $\frac{a}{b}$ も有理数である。すなわち, 有理数の範囲内では, 四則の演算が自由に行われる。このことを, 有理数全体の集合は四則の演算について閉じている といひ表す。

【注意】 どんな数も 0 で割ることはできないから, 0 で割ることは除外して考える。

実数の範囲内でも四則の演算が自由に行われる。

整数全体の集合 : 加法, 減法, 乗法について閉じているが,
除法については閉じていない。

有理数全体の集合 : 四則の演算について閉じている。

実数全体の集合 : 四則の演算について閉じている。

実数の加法と乗法については, 有理数の場合と同様に次のよく知られた法則が成り立つ。

$$\text{交換法則} \quad a+b=b+a, \quad ab=ba$$

$$\text{結合法則} \quad (a+b)+c=a+(b+c)$$

$$(ab)c=a(bc)$$

$$\text{分配法則} \quad a(b+c)=ab+ac$$

$$(b+c)a=ba+ca$$

また、 $a-b$ は $a+(-b)$ と同じであり、 $a \div b$ ($b \neq 0$) は $a \cdot \frac{1}{b}$ と同じであるから、減法や除法は加法や乗法になおして取り扱うことができる。

例題 1 π が無理数であることを用いて、 $\pi + \frac{1}{3}$ は無理数であることを証明せよ。

〔証明〕 $\pi + \frac{1}{3} = a$ とおく。いま a が無理数でないとは仮定すると、 a は有理数である。 $\pi + \frac{1}{3} = a$ を変形して $\pi = a - \frac{1}{3}$ 。 $\frac{1}{3}$ は有理数であるから、 $a - \frac{1}{3}$ は有理数である。これは π が無理数であることに反する。

したがって、上の仮定は誤りである。すなわち $\pi + \frac{1}{3}$ は無理数である。

上の証明では、“結論が成り立たないとすれば不合理が起こるから結論が成り立たなければならない”と推論した。このような証明法を**背理法**という。

問 1 $\sqrt{2}$ が無理数であることを用いて、 $5\sqrt{2}$ が無理数であることを証明せよ。

実数の大小

水平な数直線上で、正の数は原点より右側の点で表され、負の数は原点より左側の点で表される。

- (1) 任意の実数は、正であるか、0であるか、負であるかである。 a が正ならば $-a$ は負、 a が負ならば $-a$ は正である。
- (2) 正の実数の全体は加法、乗法について閉じている。すなわち a, b がともに正ならば、和 $a+b$ と積 ab は正である。