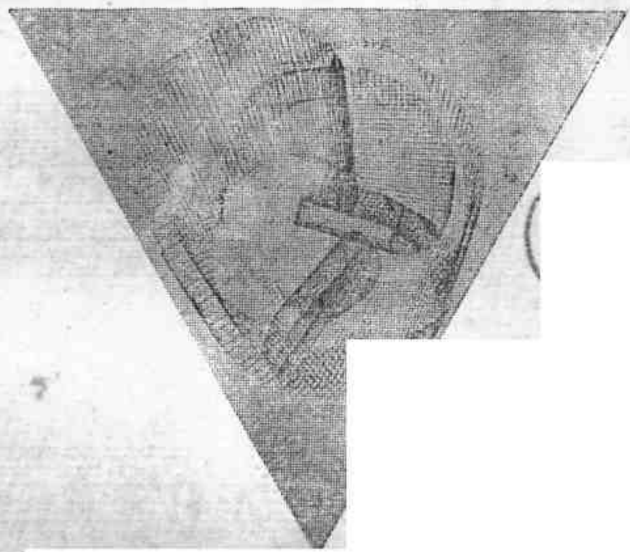
新訂 数学 I

小平邦彦 編

昭和47年4月10日文部省検定済
昭和50年4月10日改訂検定済
高等学校数学科用

新訂 数学 I

小平邦彦 編



東京書籍株式会社

別記著作者

東京大学名誉教授
学習院大学教授　小平邦彦

東京大学教授　岩堀長慶

一橋大学教授　松坂和夫

東京教育大学教授　前原昭二

東京大学教授　藤田　宏

成蹊大学教授　志村利雄

立教大学教授　岩村　聯

宮城教育大学教授　鶴丸孝司

杏林大学教授　伊藤豊吉

都立田無工業高校教諭　番場参策

都立田園調布高校教諭　山崎和郎

都立戸山高校教諭　三瀬茂利

都立西高校教諭　渋谷幸敏

都立小石川工業高校教諭　八木恒雄

お茶の水女子大学付属高校教諭　石田光子

東京書籍株式会社編集部

表紙　勝井三雄　カット　日科技研 電子計算機センター

新訂 数学 I

数 I 419

昭和52年1月20日印刷
昭和52年2月10日発行
昭和47年4月10日文部省検定済
昭和50年4月10日改訂検定済

著作者　小平邦彦
ほか14名（別記）

発行者　東京書籍株式会社
代表者　鈴木和夫
東京都台東区台東1丁目5番18号

印刷者　東京書籍印刷株式会社
代表者　與賀田辰雄
東京都北区堀船1丁目23番31号

発行所　東京書籍株式会社
東京都台東区台東1丁目5番18号
電話 東京(03)835局6111(代表)
郵便番号 1 1 0

定価　文部大臣が認可し官報で告示した定価
（上記の定価は、各教科書取次供給所に表示します。）

表紙と各扉のカットについて

表紙や各扉のカットは，電子計算機（コンピューター）による自動製図プログラムシステムにより制作したものです。

たとえば，I章のカットは長方形を縮小させながらある曲線に沿って回転させたものです。また，III章のカットは放物線を平行移動させた図と，2点と正弦曲線上の移動点とを結んだ図や直線を回転させた図などを合成したものです。

は じ め に

数学は数千年の歴史をもち，たえず進歩をつづけている学問である。ことに最近数十年間における数学の発展は実にめざましいものがある。

現代の数学はいくつかの基本的仮定から出発して論証によって展開される体系である。そしてこの基本的仮定は任意の仮定であって，矛盾を含まないかぎり，まったく自由にえらんでよい。カントルがいったように，数学は本質的に自由であって，数学者はおよそ考えることが可能なものをすべて自由に考える。この意味で数学は人間精神の自由な創造物であるといわれる。

一方，数学はいろいろの分野に広く応用される。たとえば，複素数は，虚数という名称が示すように，はじめは実在しない空想的な数として導入されたが，現代物理学の基礎理論などは複素数なしには考えられないのであって，複素数の世界が真の実在で，実数の世界はその一断面にすぎないと考えられる。また，確率論はでたらめに起こる現象さえもある数学的法則に支配されていることを示す。こういうことからみると，数学は森ら万象の根底をなしているのであって，とうてい人間の精神がかってにつくりだしたものとは考えられないのである。

このように数学はいろいろな学問のもとになるたいせつな学問である。本書は中学校を卒業して高等学校にはいり，数学Ｉを学ぶ人のための教科書である。

本書の第Ⅰ章では，中学校で学んだことにひきつづいて数と式，分数式などについて基本的なことがらを学ぶ。第Ⅱ章では方程式と不等式，特に２次方程式の解法とそれに関連して複素数について学ぶ。第Ⅲ章では図形と式の関係について，第Ⅳ章ではベクトルについて学ぶ。第Ⅴ章と第Ⅵ章では２次関数，指数関数，対数関数，三角関数などについて述べる。これらは微積分などにおいて重要な関数であって，また広い応用をもつ。第Ⅶ章では確率を扱う。

第Ⅰ章から第Ⅶ章までにしばしば集合の考えを用い，また論理についても述べるが，第Ⅷ章で集合と論理を系統的に扱う。またこの章で写像について学ぶ。

数学を学ぶには自分でよく考えることがたいせつである。抽象的一般的なことがらも，そのもとになる具体的な例をよく考えて理解すれば，自然にわかるものである。本書では，このことを考えにいれて，抽象的一般的なことがらも，具体的な例からはじめてわかりやすく説明するように努めた。

目次

Ⅰ章　数と式

Ⅱ章　方程式と不等式

Ⅲ章　平面図形と式

Ⅳ章　ベクトル

Ⅴ章　関数

Ⅵ章　三角関数

Ⅶ章　確率

Ⅷ章　写像・集合・論理

付録

凡例

[例]　本文の理解を助けるために具体例を示したものです。

例題　内容を理解するための代表的な問題を，例題としてあげました。わく囲みの〔解〕や〔証明〕は，模範解を示したものです。

[注意]，1) 注意や欄外の脚注で，理解を助ける説明を補いました。

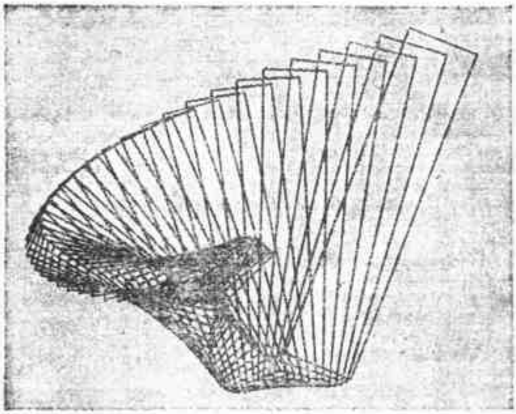
問　学習した内容をすぐ身につけるための設問と，導入のための設問を本文中で問にしました。

問題　各節末に，その節で学んだことがらを練習するための問題を設けました。

練習問題　各章末に，その章全体の復習と応用の問題を掲げました。Aは基本的なものを主とし，Bはやや程度の高い問題となっています。

付録　巻末の研究や補充問題は，さらに学習内容の進んだ箇所です。

I・数と式



数学者は長い時間をかけて数の概念をつくってきた。正の数だけの世界から零と負の数をわがものとするにいたるまでの時間は想像以上に長いのである。また，昔は有理数で表されない量の存在は信じられていなかったという。ピタゴラス学派は有理数だけですべてを説明しようとしながら，一方では正方形の対角線の長さと1辺の長さとの比が$\sqrt{2}$という無理数であることを発見して大いに悩んだといわれている。実数の概念が厳密な形で確立されたのは前世紀のことなのである。

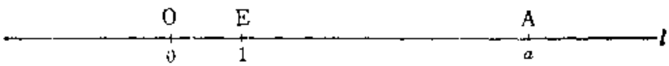
一方未知量も既知量も文字ですべてを表して式を扱う考え方は，17世紀初頭にヴィエタ（1540～1603）によって確立された。これによって代数学は体系化され，今日にいたる広大な発展の基礎がつくられたのである。

1 節　実数

1　数直線と実数

この項では数直線について学び，数について中学校までに学んだことを簡単に復習しておこう。

1 つの直線 l の上に定点 O と他の定点 E とを定める。点 A を l 上の任意の点とするとき，線分 OE の長さを **単位** として測った 2 点 O, A 間の距離を OA で表す。距離 OA は，O と A が一致する場合を除けば正の数である。



直線 l 上の点 A に次のように定めた数 a を対応させる。

O からみて A が E と同じ側にあるとき，$a = \mathrm{OA}$

O からみて A が E の反対側にあるとき，$a = -\mathrm{OA}$

A が O と一致したとき，　　　　　$a = 0$

そうすれば，l 上の各点にそれぞれ数が対応し，相異なる 2 点に対応する 2 つの数は相異なる。

直線 l 上のすべての点がそれぞれその点に対応する数を表すと考えたとき，l を **数直線**，O をその **原点**，E を **単位点** という。数直線 l 上の点 A に対応する数を A の **座標** とよび，A の座標が a であるとき A(a) と書く。また，この点 A を簡単に点 a ともいう。

数にはいろいろの種類がある。まず，ものを数えるときに使われる数

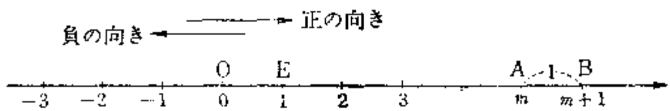
$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

を **自然数** または **正の整数** という。

$$-1,\ -2,\ -3,\cdots$$

は **負の整数** とよばれる。正の整数，負の整数 および 0 を合わせて **整数** という。

整数は，下の図に示すように，数直線上の等間隔に並んだ点によって表される。隣り合う2点 $A(m)$ と $B(m+1)$ の間隔は1である。



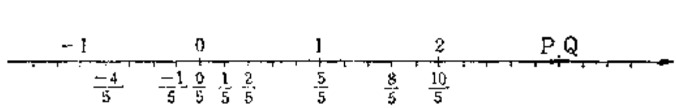
このように，数直線を水平にかくときには，ふつう単位点 E を原点 O の右側にとる。すなわち正の向き（数の大きくなる向き）が右向きである。

問1　2点 $A(-8)$ と $B(20)$ の間の距離を求めよ。

整数 m，n を用いて $\dfrac{m}{n}$ の形に表される数を **有理数** という。整数 m は $\dfrac{m}{1}$ と表されるから有理数である。

自然数 n を1つ定めたとき，$\dfrac{m}{n}$（m は整数）の形の有理数は，数直線上に $\dfrac{1}{n}$ の間隔で並んだ点によって表される。

下の図は $\dfrac{m}{5}$ の形の有理数を表す点を示している。



注意　n を限りなく大きくすれば，間隔 $\dfrac{1}{n}$ は限りなく小さくなる。したがって，数直線上にどんなに短い線分 PQ をとっても，P と Q が一致しないかぎり，P と Q の間には有理数を表す点が無数に存在する。

整数でない有理数は，小数の形に表すと，

$$-\frac{1}{8}=-0.125$$

のような有限小数となるか，または

$$\frac{4}{3}=1.3333\cdots$$

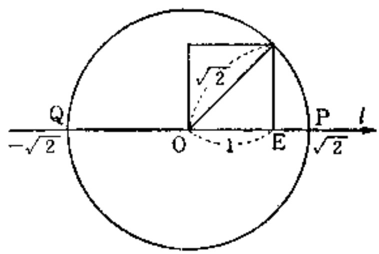
$$\frac{9}{74}=0.1216216216\cdots$$

のように，小数のある位以下に同じ数字の配列が無限にくり返される無限小数となる。

このような無限小数を **循環小数** という。

問 2　次の数を $\frac{m}{n}$ (m は整数，n は自然数)の形になおせ。

(1)　0.4　　(2)　$3\frac{1}{2}$　　(3)　1.41　　(4)　-2.95



右の図のように，数直線 l 上の線分 OE を 1 辺とする正方形がある。

O を中心とし，その正方形の対角線の長さを半径とする円をかき，l と交わる点を P，Q とすれば，P と Q はそれぞれ $\sqrt{2}$ と $-\sqrt{2}$ を表す。$\sqrt{2}$ および $-\sqrt{2}$ は有理数ではない。

このように，数直線 l の上には，有理数に対応しない点が存在する。l 上の点Aが有理数に対応しないとき，A の表す数，すなわち A の座標は **無理数** とよばれる。

たとえば $\sqrt{2}$ は無理数である。円周率 π も無理数である。

無理数は

$$\sqrt{2} = 1.41421\cdots$$

$$\pi = 3.14159\cdots$$

のように，循環小数でない無限小数で表される。

有理数と無理数を合わせて **実数** という。

したがって，数直線 l 上の任意の点の座標は実数であって，l 上の点にその座標を対応させれば，l 上のすべての点とすべての実数は1対1に対応する。

以上のことから実数を分類すると次のようになる。

- 実数
  - 有理数
    - 整数
      - 正の整数（自然数）　1，2，3，…
      - 0
      - 負の整数　-1，-2，-3，…
    - 整数でない有理数
      - $\frac{1}{8}$，3.14 ………（有限小数）
      - $-\frac{4}{3}$，$\frac{9}{74}$ ………（循環小数）
  - 無理数　$\sqrt{2}$，$-\sqrt{3}$，π ………（循環小数でない無限小数）

実数の分類

問 3　次の数は有理数か無理数か。

(1)　$\sqrt{9}$

(2)　$1.414 + 1.732$

(3)　0

(4)　$\dfrac{2}{\sqrt{2}}$

(5)　$(\sqrt{5})^2$

2　実数の演算と大小

実数の演算

2つの整数の和，差，積はまた整数である。すなわち，整数の範囲内で加法，減法，乗法は自由に行われる。このことを，整数全体の集合は加法，減法，乗法について **閉じている** といい表す。しかし，$4 \div 3$ のような除法は整数の範囲内ではできない。

2つの有理数 a, b の和，差，積は有理数である。さらに b が0でないならば商 $\dfrac{a}{b}$ も有理数である。すなわち，有理数の範囲内では，四則の演算が自由に行われる。このことを，有理数全体の集合は四則の演算について閉じているといい表す。

注意　どんな数も0で割ることはできないから，0で割ることは除外して考える。

実数の範囲内でも四則の演算が自由に行われる。

整数全体の集合	：	加法，減法，乗法について閉じているが，除法については閉じていない。
有理数全体の集合	：	四則の演算について閉じている。
実数全体の集合	：	四則の演算について閉じている。

実数の加法と乗法については，有理数の場合と同様に次のよく知られた法則が成り立つ。

交換法則　$a+b=b+a,\qquad ab=ba$

結合法則　$(a+b)+c=a+(b+c)$

$$(ab)c=a(bc)$$

分配法則　$a(b+c)=ab+ac$

$$(b+c)a=ba+ca$$

また，$a-b$ は $a+(-b)$ と同じであり，$a \div b\ (b \neq 0)$ は $a \cdot \dfrac{1}{b}$ と同じであるから，減法や除法は加法や乗法になおして取り扱うことができる。

例題 1 π が無理数であることを用いて，$\pi+\dfrac{1}{3}$ は無理数であることを証明せよ。

〔証明〕 $\pi+\dfrac{1}{3}=a$ とおく。いま a が無理数でないと仮定すると，a は有理数である。$\pi+\dfrac{1}{3}=a$ を変形して $\pi=a-\dfrac{1}{3}$

$\dfrac{1}{3}$ は有理数であるから，$a-\dfrac{1}{3}$ は有理数である。

これは π が無理数であることに反する。

したがって，上の仮定は誤りである。すなわち $\pi+\dfrac{1}{3}$ は無理数である。

上の証明では，"結論が成り立たないとすれば不合理が起こるから結論が成り立たなければならない" と推論した。このような証明法を **背理法** という。

問 1 $\sqrt{2}$ が無理数であることを用いて，$5\sqrt{2}$ が無理数であることを証明せよ。

実数の大小

水平な数直線上で，正の数は原点より右側の点で表され，負の数は原点より左側の点で表される。

(1) 任意の実数は，正であるか，0 であるか，負であるかである。a が正ならば $-a$ は負，a が負ならば $-a$ は正である。

(2) 正の実数の全体は加法，乗法について閉じている。すなわち a, b がともに正ならば，和 $a+b$ と積 ab は正である。