新世纪

高职高专
基础类课程规划教材

高等数学（下册）

GAOZHI GAOZHUAN
JICHULEI KECHENG GUIHUA JIAOCAI

新世纪高职高专教材编审委员会组编
主编 黄顺发 胡明

大连理工大学出版社

新世纪

高职高专基础类课程规划教材

高等数学

（下册）

新世纪高职高专教材编审委员会组编

主编 黄顺发 胡 明 副主编 吴健辉 郑春玲 曾园根

GAO DENG SHU XUE(XIA CE)

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册 / 黄顺发,胡明主编 .— 大连 : 大连理工大学出版社, 2006.10
高职高专基础类课程规划教材
ISBN 7-5611-3342-1

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①黄… ②胡… Ⅲ. 高等数学—高等学校:技术学校—教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 102215 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市软件园路 80 号　邮政编码:116023
发行:0411-84708842　传真:0411-84701466　邮购:0411-84703636
E-mail:dutp@dutp.cn　URL:http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷　　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:185mm×260mm　　印张:11.25　　字数:248 千字
印数:1 ~ 3060
2006 年 10 月第 1 版　　2006 年 10 月第 1 次印刷

责任编辑:赵　部　张　丽　　　　责任校对:冯　云
封面设计:波　朗

定　价:15.00 元

总　序

我们已经进入了一个新的充满机遇与挑战的时代，我们已经跨入了21世纪的门槛。

20世纪与21世纪之交的中国，高等教育体制正经历着一场缓慢而深刻的革命，我们正在对传统的普通高等教育的培养目标与社会发展的现实需要不相适应的现状作历史性的反思与变革的尝试。

20世纪最后的几年里，高等职业教育的迅速崛起，是影响高等教育体制变革的一件大事。在短短的几年时间里，普通中专教育、普通高专教育全面转轨，以高等职业教育为主导的各种形式的培养应用型人才的教育发展到与普通高等教育等量齐观的地步，其来势之迅猛，发人深思。

无论是正在缓慢变革着的普通高等教育，还是迅速推进着的培养应用型人才的高职教育，都向我们提出了一个同样的严肃问题：中国的高等教育为谁服务，是为教育发展自身，还是为包括教育在内的大千社会？答案肯定而且惟一，那就是教育也置身其中的现实社会。

由此又引发出高等教育的目的问题。既然教育必须服务于社会，它就必须按照不同领域的社会需要来完成自己的教育过程。换言之，教育资源必须按照社会划分的各个专业(行业)领域(岗位群)的需要实施配置，这就是我们长期以来明乎其理而疏于力行的学以致用问题，这就是我们长期以来未能给予足够关注的教育目的问题。

如所周知，整个社会由其发展所需要的不同部门构成，包括公共管理部门如国家机构、基础建设部门如教育研究机构和各种实业部门如工业部门、商业部门，等等。每一个部门又可作更为具体的划分，直至同它所需要的各种专门人才相对应。教育如果不能按照实际需要完成各种专门人才培养的目标，就不能很好地完成社会分工所赋予它的使命，而教育作为社会分工的一种独立存在就应受到质疑(在市场经济条件下尤其如此)。可以断言，按照社会的各种不同需要培养各种直接有用人才，是教育体制变革的终极目的。

随着教育体制变革的进一步深入,高等院校的设置是否会同社会对人才类型的不同需要一一对应,我们姑且不论。但高等教育走应用型人才培养的道路和走研究型(也是一种特殊应用)人才培养的道路,学生们根据自己的偏好各取所需,始终是一个理性运行的社会状态下高等教育正常发展的途径。

高等职业教育的崛起,既是高等教育体制变革的结果,也是高等教育体制变革的一个阶段性表征。它的进一步发展,必将极大地推进中国教育体制变革的进程。作为一种应用型人才培养的教育,它从专科层次起步,进而应用本科教育、应用硕士教育、应用博士教育……当应用型人才培养的渠道贯通之时,也许就是我们迎接中国教育体制变革的成功之日。从这一意义上说,高等职业教育的崛起,正是在为必然会取得最后成功的教育体制变革奠基。

高等职业教育还刚刚开始自己发展道路的探索过程,它要全面达到应用型人才培养的正常理性发展状态,直至可以和现存的(同时也正处在变革分化过程中的)研究型人才培养的教育并驾齐驱,还需要假以时日;还需要政府教育主管部门的大力推进,需要人才需求市场的进一步完善发育,尤其需要高职教学单位及其直接相关部门肯于做长期的坚忍不拔的努力。新世纪高职高专教材编审委员会就是由全国100余所高职高专院校和出版单位组成的旨在以推动高职高专教材建设来推进高等职业教育这一变革过程的联盟共同体。

在宏观层面上,这个联盟始终会以推动高职高专教材的特色建设为己任,始终会从高职高专教学单位实际教学需要出发,以其对高职教育发展的前瞻性的总体把握,以其纵览全国高职高专教材市场需求的广阔视野,以其创新的理念与创新的运作模式,通过不断深化的教材建设过程,总结高职高专教学成果,探索高职高专教材建设规律。

在微观层面上,我们将充分依托众多高职高专院校联盟的互补优势和丰裕的人才资源优势,从每一个专业领域、每一种教材入手,突破传统的片面追求理论体系严整性的意识限制,努力凸现高职教育职业能力培养的本质特征,在不断构建特色教材建设体系的过程中,逐步形成自己的品牌优势。

新世纪高职高专教材编审委员会在推进高职高专教材建设事业的过程中,始终得到了各级教育主管部门以及各相关院校相关部门的热忱支持和积极参与,对此我们谨致深深谢意,也希望一切关注、参与高职教育发展的同道朋友,在共同推动高职教育发展、进而推动高等教育体制变革的进程中,和我们携手并肩,共同担负起这一具有开拓性挑战意义的历史重任。

新世纪高职高专教材编审委员会

2001年8月18日

前　言

进入21世纪，我国高等教育的发展以“质量”为重点，高职高专教育是高等教育发展和提高的一个重要组成部分。但适合高职高专各专业的《高等数学》专门教材在我国还为数不多。本书就是在我校全面进行教育改革以适应现代数学教育发展的需要，由数学与计算机系“高等数学”优质课题组成员在结合多年来的“高等数学”教学实践与教学科研成果的基础上精心编写而成的。

本书的内容基本上包含了高职高专理工类各专业所需的高等数学内容，在编写的过程中既注意了数学的逻辑性和严谨性，又通俗易懂，说理浅显、简洁、明了，便于读者自学。教师在教学过程中可以根据各专业的特点选择所需内容。

本书在编写过程中主要有以下特点：

(1)我们在理论上坚持数学的科学性和系统性，“以实用为目的，以够用为度”的原则，注重学生的数学思想、数学思维方法的培养，概念理论部分尽量用通俗、简单、明了的语言描述。与此同时简介了概念在数学上的逻辑语言的叙述，这部分不要求学生有更深入的理解。

(2)对定积分、多元函数的重积分、级数等所涉及理论性比较强的定理、性质没有给出严格的证明，只是简单介绍了证明的思路或非严格意义上的证明。

(3)强调了对概念、性质的应用，对方法以及技巧的掌握，在举例的过程中对解题的思路和方法作了归纳总结，使读者对知识灵活应用。

(4)在内容的安排上尽量照顾到各个专业不同的特点，增加了“线性代数初步”、“概率论初步”知识。

我们在编写的过程中参考了国内许多版本的《高等数学》教材，吸收了他们很多优点，力图使本书能够反映高职高专自身的特点。

本书由黄顺发、胡明任主编，吴健辉、郑春玲、曾园根任副主编。具体编写分工如下：第八、十章由黄顺发副教授编写，第十一章由胡明副教授编写，第九、十二章由吴健辉副教授编写，第十四章由郑春玲副教授编写，第十三章由曾园根副教授编写；胡明负责了本书的全部插图与校订工作；全书由黄顺发统筹主编。

由于编者在编写的过程中时间仓促，水平有限，所以存在疏漏在所难免，恳请广大读者和专家同行批评指正。

所有意见、建议请发往：gzjckfb@163.com
联系电话：0411-84707492

编　者
2006 年 10 月

目　录

第八章

级　数

上册我们已经学习了高等数学中的主要内容:极限理论,微分学与积分学。而级数理论,是研究函数的一个重要工具,在实用科学中有着广泛的应用,在现代数学方法中占有重要的地位。

本章主要是介绍数项级数的基本概念及审敛法则、函数项级数的基本概念及其基本性质以及幂级数的基本理论和函数的泰勒级数等等。

第一节　常数项级数的基本概念及性质

一、基本概念

定义 1　设数列 $u_1,u_2,\cdots,u_n,\cdots$,称表达式

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{1}$$

为无穷级数,或简称级数,记作 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$。其中 u_n 称为级数的通项或一般项。

由此看来,级数就是把无穷多个数用"和"的符号连起来的一种表示形式。这种"和"有没有意义,以及如何计算它们的"和"?这就是我们这一节要解决的主要问题。

定义 2　令 $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$,称 S_n 为级数(1)的前 n 项部分和,也称为前 n 项部分和序列 $\{S_n\}$,或者就简称为部分和。即

$$S_1=u_1,S_2=u_1+u_2,\cdots,S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n,\cdots$$

另一方面,如果数列 $\{S_n\}$ 已知,由此可以构造一个级数 $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$,只要令:$u_1=S_1,u_2=S_2-S_1,\cdots,u_n=S_n-S_{n-1},\cdots$,那么这样构造的无穷级数恰好以 $\{S_n\}$ 为部分和数列。

定义 3　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的前 n 项部分和序列 $\{S_n\}$ 收敛,则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。若 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$,则称 S 为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的和。即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots=S$。

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的前 n 项部分和序列 $\{S_n\}$ 发散,则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散。

由此可见,级数的求和问题就转化为级数的前 n 项部分和数列的求极限问题了。所以说极限是研究级数的一个重要工具。因此,在讨论级数的各项性质时需要借助于该级数的部分和的数列性质,研究级数及其和只不过是研究与其相应的一个数列极限的一种新的形式。

下面我们用级数的定义来分析几个常见且比较典型的级数。

【例 1】 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$ 的敛散性,若收敛,求其和。

解 因为
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$$
$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$
而 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=1$,所以,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$ 收敛,且和为 1。

【例 2】 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$ 的敛散性($a\neq 0$, q 是常数),若收敛,求其和(此级数称为几何级数或等比级数)。

解 (1) 当 $q=1$ 时,$S_n=na\to\infty$(当 $n\to\infty$ 时),所以级数发散。

(2) 当 $q=-1$ 时,$S_n=\begin{cases}0, 当\ n\ 为偶数时\\ a, 当\ n\ 为奇数时\end{cases}\to$ 不存在,所以级数发散。

(3) 当 $|q|\neq 1$ 时,有 $S_n=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}=\dfrac{a(1-q^n)}{1-q}$,于是,$|q|<1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a}{1-q}$;$|q|>1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a(1-q^n)}{1-q}=\infty$。所以,当 $|q|<1$ 时,几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$ 收敛,且和为 $\dfrac{a}{1-q}$;当 $|q|\geqslant 1$ 时,几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$ 发散。

【例 3】 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ 的敛散性。

解 因为
$$S_n=\ln\left(1+\frac{1}{1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$=\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}$$
$$=\ln 2+\ln 3-\ln 2+\ln 4-\ln 3+\cdots+\ln(n+1)-\ln n$$
$$=\ln(n+1)$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1)=\infty$,故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ 发散。

从以上几个例题可以看出,判别一个级数敛散性的基本方法是看其部分和数列的极限是否存在,若存在,则收敛,并可以求出其和。但是求其部分和往往是很困难的,为此我们要给出判别其收敛的一般方法,首先给出它的基本性质。

二、无穷级数的基本性质

定理 1(收敛的必要条件) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$。

证明 因级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，所以$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$收敛，设$\lim_{n\to\infty} S_n = s$，由极限性质可得$\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = s$，故$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = 0$。

注意：$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$仅仅是级数收敛的必要条件。也就是说，若级数的通项极限不为零，则级数一定不收敛；反之不成立（即若$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，不能保证级数收敛）。这也是判别级数敛散性最基本的方法。

例如：级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$，因为$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$，所以$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$发散；调和级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$，虽然$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$，但它也是发散的。

定理 2（运算性质） 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$、$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$都收敛，其和分别为A、B，则

(1) 级数$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$收敛，且$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = c\sum_{n=1}^{\infty} u_n = cA$（$c$为常数）；

(2) 级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$收敛，且$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n = A \pm B$。

注意：若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$都发散，其和差仍可能收敛；若一个收敛，一个发散，其和差一定发散。

例如：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$，$\sum_{n-1}^{\infty}(-1)^n$都发散，而$\sum_{n=1}^{\infty}((-1)^{n-1} + (-1)^n) = 0 + \cdots + 0 + \cdots = 0$收敛。

定理 3 级数去掉或增加前面有限项得到的新级数与原级数有相同的敛散性。

注意：此性质只是不改变其敛散性，并不意味着不改变和，其和的值是有可能发生变化的。

定理 4 设级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，则对其项任意加括号后所得级数仍收敛，且和不变。

注意：(1) 若级数加括号后收敛，而原级数不一定收敛。

比如：级数$\sum_{n=0}^{\infty}((-1)^{2n} + (-1)^{2n+1})$收敛，而原级数$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + 1 - 1 + \cdots$是发散的。

(2) 若级数加括号后所得的新级数发散，则原级数一定发散。

【例 4】 判别下列级数的敛散性。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n+2}$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)$； (4) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$。

解 (1) 因为$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1 \neq 0$，所以原级数发散。

(2) 因$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{-\ln n}{n}}=1\neq 0$,所以原级数发散。

(3) 因$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$,都是等比级数,且公比$\left|\frac{1}{2}\right|<1$,$\left|\frac{1}{3}\right|<1$,所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$,都收敛,由定理 2 可得,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$收敛。

(4) 因为 $S_n=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\sqrt{n+1}-1$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=\infty$,故级数发散。

从以上几个例题可以看出,前面所介绍的性质在判定级数发散时比较有效,但在判定级数收敛时却比较困难,下节专门介绍级数收敛的判定方法。

习　题　8-1

1. 求下列级数的和。

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

(2) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$。

2. 利用级数的性质或级数的必要条件判别下列级数的敛散性。

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}200\left(\frac{1}{3}\right)^n$;

(2) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[n]{n}}+\cdots$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{2^n}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{100n}-\frac{1}{2^n}\right)$;

(6) $\frac{\ln 3}{3}+\frac{(\ln 3)^2}{3^2}+\cdots+\frac{(\ln 3)^n}{3^n}+\cdots$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^n-9^n}{8^n}$;

(8) $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\right)+\left(\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}\right)+\cdots$;

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{2n^2+n}$;

(10) $\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{2\pi}{6}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{6}+\cdots$。

3. 确定常数 a,使得级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln^n(1+a)$收敛,且其和为 1。

4. 证明:若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$也收敛。

第二节　正项级数

上一节我们介绍了数项级数的概念,并讨论了它的一些性质,在这节中我们专门讨论

它的一般项为正的级数的收敛判定方法。

定义 1 设级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$,若对 $\forall n$,有 $u_n \geqslant 0$,则称它为正项级数。

对正项级数而言,因为 $S_n = S_{n-1} + u_n$,所以它的部分和数列$\{S_n\}$是单调递增数列。根据收敛准则,若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则数列$\{S_n\}$有上界,所以得到正项级数收敛的充要条件。

定理 1 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛$\Leftrightarrow$它的部分和数列$\{S_n\}$有上界。

根据级数的定义判别级数收敛要先求其部分和,一般说来计算是比较困难的,而定理1只要判别其部分和是否有界或无界就可以了。因为它一定是单调递增的,在应用过程中我们可以适当地把它的和进行放大或缩小,从而给判别正项级数的敛散性带来了方便。

【例 1】 证明级数$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ 收敛。

证 因为对 $\forall n$,有$\frac{1}{n!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} < \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2} = \frac{1}{2^{n-1}}$

所以对 $\forall n \in \mathrm{N}$,有

$$S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$= 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$,所以级数$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ 收敛。

【例 2】 判别级数$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}$ 的敛散性。

解 当$0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时,有 $0 < \sin x < x$。所以 $\forall n \in \mathrm{N}$,有 $\sin \frac{\pi}{2^n} < \frac{\pi}{2^n}$,故

$$S_n = \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2^2} + \cdots + \sin \frac{\pi}{2^n} < \pi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) = \pi\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < \pi$$

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}$ 收敛。

定理 2(比较判别法) 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数,满足:

$$u_n \leqslant v_n, (n = 1,2,\cdots)$$

(1) 若$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。(简称大收则小收)

(2) 若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散,则$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散。(简称小散则大散)

证明 (1) 因为级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛,所以其前 n 项部分和数列$\{S_n\}$收敛,设$\lim_{n \to \infty} S_n = S$,所以 $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n \leqslant S$ 有上界。又因为

$S'_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leqslant v_1 + v_2 + \cdots + v_n \leqslant S$,所以数列$\{S'_n\}$也有上界。由定理

1 可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛。

(2) 用反证法。假设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$收敛,由(1)可得$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛,与题设条件矛盾。

注意:由上节定理 3,去掉前面有限项不改变级数的敛散性,所以此定理可改为:

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$都是正项级数,若$\exists N$,当$n > N$时,有$u_n \leqslant v_n$,$(n = 1,2,\cdots)$,则上述结论同样成立。

推论 1 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$都是正项级数,若$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = l$,$(0 < l < +\infty)$,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$具有相同的敛散性。

定理 3(比值判别法) 设有正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$,若$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$,则

(1) 当$l < 1$时,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛;

(2) 当$l > 1$时,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$发散;

(3) 当$l = 1$时,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$可能收敛,也可能发散,要另行判定。

定理 4(根值判别法) 设有正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$,若有$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$,则

(1) 当$l < 1$时,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛;

(2) 当$l > 1$时,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$发散;

(3) 当$l = 1$时,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$可能收敛,也可能发散,要另行判定。

在这里就不给出上述性质的证明了,下面我们以具体示例介绍正项级数敛散性判别的基本方法。

【例 1】 讨论$p-$级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$的敛散性。

解 (1) 当$p < 0$时,$\dfrac{1}{n^p} \to +\infty (n \to \infty)$,由必要条件可得级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$发散。

(2) 当$p = 1$时,是调和级数,所以发散;

(3) 当$p < 1$时,因$\dfrac{1}{n^p} > \dfrac{1}{n}$,而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$发散,由定理 2 可得级数发散。

(4) 当$p > 1$时,对原级数依次按一项、二项、四项、八项 … 等规律加括号得新级数:

$$1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) + \left(\frac{1}{8^p} + \cdots + \frac{1}{15^p}\right) + \cdots$$

$$< 1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}\right)}_{\text{共二项}} + \underbrace{\left(\frac{1}{4^p} + \cdots \frac{1}{4^p}\right)}_{\text{共四项}} + \underbrace{\left(\frac{1}{8^p} + \cdots \frac{1}{8^p}\right)}_{\text{共八项}} + \cdots$$

$$< 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3 + \cdots$$

而 $0 < \frac{1}{2^{p-1}} < 1$,所以几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{n-1}$ 收敛;由定理 2 可得级数

$$1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) + \left(\frac{1}{8^p} + \cdots + \frac{1}{15^p}\right) + \cdots \text{收敛;}$$

对正项级数而言,加括号不改变级数的敛散性,所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛。

对(4) 的证明还可以这样考虑,当 $p > 1$ 时,因为当 $n-1 \leqslant x \leqslant n$ 时,有

$$\frac{1}{n^p} \leqslant \frac{1}{x^p}, \frac{1}{n^p} = \int_{n-1}^{n}\frac{1}{n^p}\mathrm{d}x \leqslant \int_{n-1}^{n}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x = \frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}}\right]$$

而级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}}\right]$ 的前 n 项部分和为

$$S_n = \left[1 - \frac{1}{2^{p-1}}\right] + \left[\frac{1}{2^{p-1}} - \frac{1}{3^{p-1}}\right] + \cdots + \left[\frac{1}{n^{p-1}} - \frac{1}{(n+1)^{p-1}}\right] = 1 - \frac{1}{(n+1)^{p-1}}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^{p-1}}\right) = 1$,所以 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}}\right]$ 收敛,由定理 2 可得,当 $p > 1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛。

综上所述:$p-$级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$,当 $p \leqslant 1$ 时发散,当 $p > 1$ 时收敛。这是一个常用级数,今后可以直接用 $p-$级数的结论来判别其他级数的敛散性。

【例 2】 判别下列级数的敛散性。

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+1}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right)$; (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^2}$; (5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{9^n - 8^n}$; (6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{6n^2-3}}$。

解 (1) 因为 $\frac{n+1}{n^2+1} > \frac{n+1}{n^2+2n+1} = \frac{1}{n+1}$,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散,由比较判别法得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+1}$ 发散。

(2) 因为 $\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$,所以 $1 - \cos\frac{\pi}{n} = 2\sin^2\frac{\pi}{2n} < 2\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2 = \frac{\pi^2}{2n^2}$,由 $p-$级数结论可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,由上节定理 2 可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^2}{2n^2}$ 收敛,由比较判别法得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right)$ 收敛。

(3) 因级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+a^n}$中含有参数$a$,所以要分情况讨论。

① 当$0<a<1$时,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+a^n}=1$,由级数收敛的必要条件得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+a^n}$发散。

② 当$a=1$时,原级数变为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2}$,显然发散。

③ 当$a>1$时,$\dfrac{1}{1+a^n}<\dfrac{1}{a^n}$,因为$\dfrac{1}{a}<1$,所以几何级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a^n}$收敛。由比较判别法可得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+a^n}$收敛。综上所述,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+a^n}=\begin{cases}\text{发散}, & 0<a\leqslant 1\\ \text{收敛}, & a>1\end{cases}$

(4) 因$\sin\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{1}{n^2}$,所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{1}{n^2}$收敛。

(5) 观察级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{7^n}{9^n-8^n}$的形式,很难直接用比较判别法,但仔细一想,我们可以用它的推论。因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{7^n}{9^n}$是收敛的,而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{7^n}{9^n-8^n}}{\dfrac{7^n}{9^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9^n}{9^n-8^n}=1$,所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{7^n}{9^n-8^n}$收敛。

(6) 因$\dfrac{1}{\sqrt{6n^2-3}}>\dfrac{1}{\sqrt{6}}\cdot\dfrac{1}{n}$,而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散,由比较判别法可得级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{6n^2-3}}$发散。

由此可以归纳应用定理2的基本思路:(1) 熟悉常用的已知的基本级数的敛散性;(2) 根据题目本身的特点找到与它相对应的已知级数;(3) 通常要采用放大性原理,然后进行比较。

【例3】 判别下列级数的敛散性。

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{2^n}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n n!}{n^n}(a>0,a\neq \mathrm{e})$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$。

解 (1) 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{(n+1)!}{2^{n+1}}}{\dfrac{n!}{2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)n!\cdot 2^n}{2^{n+1}n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2}=\infty$,由定理3可得,此级数发散。

(2) 因为
$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{a^n n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}(n+1)n!\,n^n}{a^n(n+1)(n+1)^n n!}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{an^n}{(n+1)^n}=\frac{a}{\mathrm{e}}$$