黑博士品牌标志

BLACK DORCTOR ® 黑博士 ◎黑博士考研信息工作室◎ WORKROOM BEIJING

黑博士考研权威精品数学系列

2002年硕士研究生入学考试

数学最后30天冲刺

预测试卷

理工类

（系列之一）

李强 主编

经典预测980题＋综合性典型题＋冲刺命题预测

- 2002年考研数学最后冲刺权威经典预测980题
  高等数学480题、线性代数250题、概率论250题
- 2002年最新权威经典冲刺预测试卷24＋24套（系列之一、二）
  考研数学复习最后30～60天冲刺权威预测模拟48套
- 大胆预测最新考研数学核心命题趋势和方向
  独家倾力于综合题的命制思路及考核功能的深度分析
- 理工数学：积分中值定理、微分中值定理的综合运用
  经济数学：极值的经济应用题是2002年的命题焦点
- 精心优化设计试卷：构思新颖、方法灵活、综合性强、一题多解
  北京六大权威考研班最后冲刺11月特别推荐

西北大学出版社

黑博士考研数学系列

2002年硕士研究生入学考试

数学

最后30天冲刺

预测试卷

理工类

（系列之一）

主编 李 强

编者 吴 华 张 钧 张荐芸

李文奇 牛金虎 [illegible]俊武

杨 静 唐军楼 张 烨

西北大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

2002年硕士研究生入学考试数学最后30天冲刺预测试卷·理工类/李强编.—西安:西北大学出版社,2001.10

ISBN 7-5604-1604-7

Ⅰ.2… Ⅱ.李… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-试题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第066766号

2002年硕士研究生入学考试

数学最后30天冲刺预测试卷(理工类系列之一)

李　强　编

西北大学出版社出版发行

(西北大学校内　邮编710069　电话8302590)

新华书店经销　　西安青山彩印厂印刷

787毫米×1092毫米　1/16开本　34印张　650千字

2001年10月第1版　　2001年10月第1次印刷

印数：1—3000

ISBN 7-5604-1604-7/O·104　　定价:(全二册)50.00元

目　录

2002年硕士研究生入学考试
数学最后30天冲刺名家预测试卷之一

数学一

数学二

2002年全国硕士研究生入学考试
数学最后30天冲刺名家预测试卷之一

黑博士考研信息工作组
2001年10月于北京

数学一　经典预测试卷一

注意:以下题目中带※者为2002年重点预测典型题.

得分	评卷人

一、填空题(本题共5小题,每题3分,满分15分.把答案填在题中横线上)

※(1) 已知 $f(x,y)=xy+x\iint\limits_{D}f(x,y)dxdy$,其中 D 由 $y=x,y=0$ 和 $x=1$ 所围成,则 $\iint\limits_{D}f(x,y)dxdy=$ ______.

※(2) 设 $u=f(x,y,z),z=xe^{y}$,其中 f 具有二阶连续偏导数,则 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=$ ______.

※(3) 星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(a>0)$ 的曲率半径为 $=$ ______.

(4) 行列式 $\begin{vmatrix}8&27&64&125\\4&9&16&25\\2&3&4&5\\1&1&1&1\end{vmatrix}=$ ______.

(5) 设 X 在区间[0,1]上服从均匀分布,则方程组 $\begin{cases}2+Y=2X+1\\2-Y=X\end{cases}$ 的解 Y 落在区间[0,1]中的概率为______.

得分	评卷人

二、选择题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) $\int\dfrac{dx}{\cos x}\neq($　　$)$

(A) $\ln|\sec x+\tan x|+c$.　　(B) $\tan\left|\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|+c$.

(C) $\ln\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}+c$.　　(D) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-\sin x}{1+\cos x}+c$.

※(2) 已知空间域 Ω 由 $x^2+y^2\leqslant z$ 及 $1\leqslant z\leqslant 2$ 所确定,函数 $f(z)$ 连续,则 $\iiint\limits_{\Omega}f(z)dxdydz=($　　$)$

(A) $\pi\int_1^2 z^2f(z)dz$.　　(B) $2\pi\int_1^2 zf(z)dz$.

(C)$2\pi\int_1^2 zf(z)dz$.　　　　(D)$\pi\int_1^2 zf(z)dz$.

(3) 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$条件收敛,那么$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}(a_n-|a_n|)}{\sum_{k=1}^{n}(a_n+|a_n|)}$(　　)

(A) 不存在.　(B) 等于 0.　(C) 等于 -1.　(D) 等于 1.

※(4) 若方程组$\begin{cases}(\lambda+1)x_1-x_2-(\lambda-1)x_3=0\\ x_1+(\lambda-1)x_2+x_3=0\\ -x_1+x_2+(\lambda-1)x_3=0\end{cases}$的基础解系中只有一个非零向量,则$\lambda$的取值为(　　).

(A)$\lambda=0$或$\lambda=2$.　(B)$\lambda=0$.　(C)$\lambda=2$.　(D)$\lambda\neq0$及$\lambda\neq2$.

※(5) 二维随机变量(X,Y)的分布密度为$\varphi(x,y)=\begin{cases}e^{-x-y}, x>0,y>0\\ 0,\quad 其它\end{cases}$,则$(X,Y)$落在区域$D:x+y\leqslant1$的概率$=$(　　)

(A)$1-\frac{2}{e}$.　(B)$\frac{2}{e}$.　(C)$1-\frac{1}{e}$.　(D)$1-\frac{1}{2e}$.

得分	评卷人

三、(本题满分 5 分)

求$\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right]$.

得分	评卷人

四、(本题满分 5 分)

已知$f'(\sin^2x)=\cos2x+\tan^2x$,求$f(x)$.

得分	评卷人

※ 五、(本题满分 6 分)

设$f(u)$有连续的二阶导数且$z=f(e^x\sin y)$满足方程$\frac{\partial^2z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2z}{\partial y^2}=e^{2x}z$,求$f(u)$.

得分	评卷人

六、(本题满分 7 分)

设面密度为 1 的均匀平面薄板 D 由抛物线$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$和两坐标轴围成.求 D 关于过原点的直线的转动惯量的最大值和最小值.

得分	评卷人

七、(本题满分 6 分)

设 $f(x)$ 是区间$[-\pi,\pi]$上的偶函数,且满足 $f(\frac{\pi}{2}+x)=-f(\frac{\pi}{2}-x)$.证明:$f(x)$ 在$[-\pi,\pi]$上的傅里叶级数展开式中系数 $a_{2n}=0,n=1,2,\cdots$.

得分	评卷人

※ 八、(本题满分 7 分)

一密度为 $\rho>1$ 的均匀立方体浸没在水池底,立方体边长为 a 米,池水深为 $h+a$ 米,求

(1) 水对物体每个侧面的总压力;

(2) 将此物体铅直地捞出水面,所作的功.

得分	评卷人

※ 九、(本题满分 6 分)

设 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$二次可导,且 $|f(x)|\leqslant M_0$, $|f''(x)|\leqslant M_2$, $\forall x\in(-\infty,+\infty)$, M_0,M_2 为非负常数.

求证:$\forall x\in(-\infty,+\infty)$, $|f'(x)|\leqslant\sqrt{2M_0M_2}$.

得分	评卷人

十、(本题满分 6 分)

设 n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关$(m<n)$,矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,向量 $\boldsymbol{\beta}_j=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\boldsymbol{\alpha}_i$($j$

$= 1,2,\cdots,n)$. 证明:向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的秩等于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

得分	评卷人

※ 十一、(本题满分 8 分)

已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + (a+4)x_2 - 5x_3 = 6 \\ -x_1 - 2x_2 + ax_3 = -3 \end{cases}$$

有无穷多解,而 A 是3阶矩阵,$\begin{bmatrix} 1 \\ 2a \\ -1 \end{bmatrix}$,$\begin{bmatrix} a \\ a+3 \\ a+2 \end{bmatrix}$,$\begin{bmatrix} a-2 \\ -1 \\ a+1 \end{bmatrix}$分别是 A 关于特征值 $1,-1,0$ 的三个特征向量,求 A.

得分	评卷人

十二、(本题满分 8 分)

袋中有 N 个大小相同的球,其中红球数目为随机变量,其数学期望为 $n(n < N)$,试求从袋中任取一球为红球的概率.

得分	评卷人

※ 十三、(本题满分 6 分)

设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是它的一个样本,令 $d = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |X_i - \mu|$,试求 $E(d)$,$D(d)$.

数学一　经典预测试卷一参考答案

黑博士考研信息工作组
2001年10月于北京

一、填空题

(1) $\frac{3}{16}$

[解析] 令 $A=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$,则 $f(x,y)=xy+Ax$

两边积分,得

$$A=\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D[xy+Ax]dxdy=\int_0^1dx\int_0^x[xy+Ax]dy$$

$$=\int_0^1[\frac{1}{2}x^3+Ax^2]dx=\frac{1}{8}+\frac{1}{3}A$$

从而,有 $A=\frac{3}{16}$,故$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\frac{3}{16}$.

(2) $f''_{12}+xe^yf''_{13}+e^yf_3+e^yf''_{32}+xe^{2y}f''_{33}$

[解析] $\frac{\partial u}{\partial x}=f'_1+f'_3\frac{\partial z}{\partial x}=f'_1+e^yf'_3$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f''_{12}+f''_{13}\frac{\partial z}{\partial y}+e^yf'_3+e^y[f''_{32}+f''_{33}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}]$$

$$=f''_{12}+xe^yf''_{13}+e^yf'_3+e^yf''_{32}+xe^{2y}f''_{33}.$$

(3) $3a^{\frac{1}{3}}|xy|^{\frac{1}{3}}$

[解析] 由隐函数求导法则计算 y' 和 y'',并代入曲率半径公式 $\rho=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$ 即可

已知等式两边对 x 求导,得

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\cdot y'=0,\text{即 } y^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y'=0$$

于是　$y'=-(\frac{y}{x})^{\frac{1}{3}}$

又因　$\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}\cdot y'+\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y'+x^{\frac{1}{3}}y''=0$

从而　$y''=-\frac{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}{3xy^{2/3}}y'=\frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}$

代入曲率半径公式,得 $\rho=3a^{\frac{1}{3}}|xy|^{\frac{1}{3}}$

(4) 12

[解析] 将第1行与第4行相交换,第2行与第3行交换,即为范德蒙行列式,所以

$$\text{原式}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&4&5\\4&9&16&25\\8&27&64&125\end{vmatrix}=(3-2)(4-2)(5-2)(4-3)(5-3)(5-4)=12$$

(5) 1

[解析] 解方程组,得 $Y=\frac{X+1}{2}$,

故 $P\{0 \leqslant Y \leqslant 1\} = P\{0 \leqslant \frac{X+1}{2} \leqslant 1\} = P\{-1 \leqslant X \leqslant 1\} = \int_0^1 dx = 1$

二、选择题

(1)(D). (2)(D). (3)(C). (4)(B). (5)(A).

三、[解]

$$原式 = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\ln(1+x)\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1$,即

$\ln(x+\sqrt{1+x^2}) \sim x(x\to 0)$,故

$$原式 = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2(1+x)\sqrt{1+x^2}} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - (1+x)}{x}$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} - 1\right) = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1} - 1\right) = -\frac{1}{2}$$

四、[解]

$f(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{2}{3}x^3 + c(0 \leqslant x \leqslant 1)$.提示:令 $t = \sin^2 x$.

五、[解]

令 $u = e^x \sin y$,则有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u)\frac{\partial u}{\partial x} = f'(u)e^x \sin y = uf'(u)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'(u)\frac{\partial u}{\partial y} = e^x \cos y f'(u)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(u)u^2 + f'(u)u$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -e^x \sin y f'(u) + e^x \cos y f''(u)\frac{\partial u}{\partial y} = -uf'(u) + f''(u)e^{2x}\cos^2 y$$

所以 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(u)e^{2x}$

由已知条件,得 $f''(u)e^{2x} = e^{2x}f(u)$,即 $f''(u) - f(u) = 0$.此二阶常系数方程的特征方程是 $\lambda^2 - 1 = 0$,特征根 $\lambda = \pm 1$,故 $f(u) = C_1 e^u + C_2 e^{-u}$.

六、[解]

过原点的直线方程为 $y = kx$,或 $kx - y = 0$,关于此直线的转动惯量为 $J = \frac{1}{1+k^2}\iint\limits_D (kx - y)^2 d\sigma = \iint\limits_D x^2 d\sigma - \frac{2k}{1+k^2}\iint\limits_D xyd\sigma$.

只要求 $\frac{k}{1+k^2}$ 的最值.令 $\left(\frac{k}{1+k^2}\right)' = \frac{1}{1+k^2} - \frac{2k^2}{(1+k^2)^2} = 0$ 得 $k \pm 1$.于是当 $k = 1$ 时 J 取最小值.$k = -1$ 时取最大值.

而 $\iint\limits_D x^2 d\sigma = \int_0^1 x^2 dx \int_0^{(1-\sqrt{x})^2} dy = \frac{1}{84}$;$\iint\limits_D xyd\sigma = \frac{1}{280}$.故

$J_{max}=\frac{1}{84}+\frac{1}{280}=\frac{13}{840}$;$J_{min}=\frac{1}{84}-\frac{1}{280}=\frac{7}{840}$.

七、[解]

由于 $f(x)$ 为偶函数,所以

$$a_{2n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos(2nx)dx=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos(2nx)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)\cos(2nx)dx\right]$$

对于右端前一个积分,令 $x=\frac{\pi}{2}-t$,后一个积分,令 $x=\frac{\pi}{2}+t$,则

$$a_{2n}=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\frac{\pi}{2}-t)\cos(n\pi-2nt)dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\frac{\pi}{2}+t)\cos(n\pi+2nt)dt\right]$$

$$=(-1)^n\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\frac{\pi}{2}-t)\cos(2nt)dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\frac{\pi}{2}+t)\cos(2nt)dt\right]$$

$$=(-1)^n\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(\frac{\pi}{2}-t)+f(\frac{\pi}{2}+t)\right]\cos2ntdt$$

由题设 $f(\frac{\pi}{2}-t)+f(\frac{\pi}{2}+t)=0$,所以 $a_{2n}=0,n=1,2,\cdots$.

八、[解]

(1) 求水对侧面总压力:$df=(h+x)\cdot agdx$. $f=ag\int_0^a(h+x)dx=(ha^2+\frac{a^3}{2})g$.

(2) 先求将物体捞至上底面与水平面一致时作的功 W_1,这时力是 $a^3(\rho-1)g$(重力减浮力),得 $W_1=a^3h(\rho-1)g$. 再求得物体捞出水面的功 W_2,因为 $dW_2=gdy(\rho a^3-(a-y)^3)$,故 $W_2=a^4\rho g-\int_0^a(a-y)^3dy=a^4\rho g-\frac{1}{4}a^4g(J)$.

于是总功 $W=W_1+W_2=[a^3(\rho-1)gh+\frac{a^4}{4}(4\rho-1)]g(J)$.

九、[解]

对 $\forall h>0,\forall x\in(-\infty,+\infty)$,考察二阶泰勒公式

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(\xi_1)h^2$$

$$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{1}{2}f''(\xi_2)h^2$$

其中 $\xi_1\in(x,x+h),\xi_2\in(x-h,x)$,两式相减,得

$$2hf'(x)=f(x+h)-f(x-h)-\frac{1}{2}f''(\xi_1)h^2+\frac{1}{2}f''(\xi_2)h^2$$

则 $|2hf'(x)|\leqslant 2M_0+M_0h^2$

即 $|f'(x)|\leqslant\frac{M_0}{h}+\frac{1}{2}M_2h$

令 $g(h)=\frac{M_0}{h}+\frac{1}{2}M_2h\quad h\in(0,+\infty)$

则有

$$g'(h)=-\frac{M_0}{h^2}+\frac{1}{2}M_2=\begin{cases}<0,0<h<h_0\\=0,h=h_0\\>0,h>h_0\end{cases}$$

其中 $h_0=\sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$(设 $M_0,M_2\neq0$),则

$$g(h)\geqslant g(h_0)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{M_0M_2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{M_0M_2}=\sqrt{2M_0M_2}$$

所以取 $h=h_0$ 得

$$|f'(x)| \leqslant \sqrt{2M_0M_2}, \forall x \in (-\infty, +\infty)$$

$M_0 = 0$ 时，$f(x) \equiv 0$，显然成立.

$M_2 = 0$ 时，$f''(x) \equiv 0$，由 $|f(x)| \leqslant M_0$，得 $f(x) \equiv 0$，结论也显然成立.

十、[解]

由题设知 $[\beta_1 \cdots \beta_n] = [\alpha_1 \cdots \alpha_m]A$. 而矩阵 $[\alpha_1 \cdots \alpha_m]$ 的秩为 m，故矩阵 $[\beta_1 \cdots \beta_m]$ 与 A 有相同的秩.

十一、[解]

化增广矩阵为阶梯形，有

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & a+4 & -5 & 6 \\ -1 & -2 & a & -3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & a & -7 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 \end{array}\right]$$

由于方程组有无穷多解，得 $a = -1$ 或 $a = 0$.

当 $a = -1$ 时，三个特征向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 线性相关，不合题意，舍去；

当 $a = 0$ 时，$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 线性无关，是 A 的特征向量，故 $a = 0$.

令 $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$，有

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}，从而 A = P\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}P^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 4 & -6 \\ 3 & -3 & 3 \\ & -6 & 8 \end{bmatrix}$$

十二、[解]

设 X 表示袋中红球数，且 $P\{X = k\} = P_k, k = 0, 1, \cdots, N$，则 $E(X) = 0p_0 + 1p_1 + \cdots + Np_N = n$.

再设 A_k:“$X = k$”；B:“任抽一球为红球”.

则
$$P(B) = \sum_{k=0}^{N} P(A_k) \cdot P(B \mid A_k) = p_0 \cdot \frac{0}{N} + p_1 \cdot \frac{1}{N} + \cdots + p_N \cdot \frac{N}{N}$$
$$= \frac{1}{N}E(x) = \frac{n}{N}.$$

十三、[解]

$$E(d) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E|X_i - \mu| = E|X - \mu|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} |x - \mu| e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\xlongequal{令\frac{x-\mu}{\sigma} = t} \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} |t| e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= -\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_0^{+\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma.$$

由于 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立且与 X 同分布，所以

$$D(d) = \frac{1}{n^2}D\left[\sum_{i=1}^{n} |X_i - \mu|\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D|X_i - \mu|$$

$$= \frac{1}{n}D|X - \mu| = \frac{1}{n}[E|X - \mu|^2 - (E|X - \mu|)^2]$$

$$= \frac{1}{n}\left[DX - \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sigma^2 - \frac{2}{\pi}\sigma^2\right) = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\frac{\sigma^2}{n}.$$

2002年全国硕士研究生入学考试
数学最后30天冲刺名家预测试卷之一

黑博士考研信息工作组
2001年10月于北京

数学一　经典预测试卷二

注意:以下题目中带※者为2002年重点预测典型题.

得分	评卷人

一、填空题(本题共5小题,每题3分,满分15分.把答案填在题中横线上)

※(1) 若$\lim\limits_{x\to 0}(\cos\omega x)^{1/x^2}=\dfrac{\sqrt{e}}{e}(\omega>0)$,则$\omega=$ ______.

※(2) 设$y=y(x)$由$\begin{cases}x=3t^2-2t+3,\\ e^y\sin t-y+1=0,\end{cases}$所确定,则$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=$ ______.

(3) 线密度为1的均匀圆丝:$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2,\\ x+y+z=0,\end{cases}$绕$oz$轴的转动惯量$J=$ ______.

※(4) 设矩阵$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&0&3\end{bmatrix}$,则行列式$|2A^{-1}+E|=$ ______.

(5) 从1,2,…,9这9个数中任取一数,记A为取得3的倍数;B为取得素数;C为取得奇数三个事件,则$P(A\cup B/C)=$ ______.

得分	评卷人

二、选择题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 设对任意的x,总有$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$,且$\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$,则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$(　　)

(A) 存在且等于零　　(B) 存在但不一定为零

(C) 一定不存在　　(D) 不一定存在

※(2) 设函数$f(x)$满足关系式$f''(x)+\sin^2 f'(x)=\sin x$,且$f'(0)=0$,则(　　)

(A)$f(0)$是$f(x)$的极大值

(B)$f(0)$是$f(x)$的极小值

(C) 点$(0,f(0))$是曲线$y=f(x)$的拐点

(D)$f(0)$不是$f(x)$的极值,点$(0,f(0))$也不是曲线$y=f(x)$的拐点

(3) 设直线L为$\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\ 2x-y-10z+3=0\end{cases}$,平面$\Pi$为$4x-2y+z-2=0$,则(　　)

(A)L平行于Π　　(B)L在Π上

(C) L 垂直于 Π　　　　(D) L 与 Π 斜交

(4) 设 A、B、C、D 为四个 n 阶方阵,且满足 $ABCD = E$,则(　　)

(A) $ADBC = E$　　　　(B) $BCDA = E$

(C) $CDBA = E$　　　　(D) $DACB = E$

※(5) 设随机变量 X 与 Y 独立同分布,记 $U = X - Y$, $V = X + Y$,则随机变量 U 和 V 必然(　　)

(A) 不独立　　　　(B) 独立

(C) 相关系数不为 0　　　　(D) 相关系数为 0

得分	评卷人

三、(本题满分 5 分)

设可微函数 $u = f(x,y)$,满足关系:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

试证明:在极坐标系中,函数 $f(x,y)$ 只与极角 θ 有关.

得分	评卷人

※ 四、(本题满分 5 分)

计算 $\iint\limits_{D} |3x + 4y|\,dxdy$,其中 $D: x^2 + y^2 \leqslant 1$.

得分	评卷人

※ 五、(本题满分 6 分)

求二抛物线 $y = x^2$ 和 $y = -x^2 + 4x - 4$ 的公切线,并求此公切线与此二抛物线所围成图形的面积.

得分	评卷人

※ 六、(本题满分 7 分)

设 S 是上半空间 $z > 0$ 中任意光滑闭曲面,S 围成区域 Ω,函数 $u = rk(r)$, ($r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) 在上半空间有连续的二阶偏导数,满足

$$\oiint_S \frac{\partial u}{\partial x}dydz + \frac{\partial u}{\partial y}dzdx + \frac{\partial u}{\partial z}dxdy = \iiint_\Omega e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dV$$

求 $k(r)$.

得分	评卷人

※ 七、(本题满分 6 分)

设 $f(x)$ 严格单调增且具有一阶连续导数,函数 $z(x,y) = f(x+\varphi(y))$ 满足方程 $\varphi(y)\dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$,求可导函数 $\varphi(y)$.

得分	评卷人

※ 八、(本题满分 7 分)

求曲面 $\sum: z = x^2 + y^2 + 1$ 上任一点的切平面与曲面 $S: z = x^2 + y^2$ 所围立体 Ω 的体积.

得分	评卷人

※ 九、(本题满分 6 分)

证明 (1) $\sin x + \tan x > 2x, (0 < x < \dfrac{\pi}{2})$;

(2) $\dfrac{\sqrt{2}}{8} < \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\sin x + \tan x}dx < \frac{1}{2}$.

得分	评卷人

十、(本题满分 6 分)

A 是 n 阶矩阵,a_1, a_2, a_3 是 n 维列向量,且 $a_1 \neq 0, Aa_1 = ka_1, Aa_2 = la_1 + ka_2, Aa_3 = la_2 + ka_3, l \neq 0$,证明:$a_1, a_2, a_3$ 线性无关.