

研究生教学用书

公共基础课系列

矩阵论

(第二版)

Matrix Theory

杨明 刘先忠

BOOKS FOR GRADUATE STUDENTS

华中科技大学出版社

研究生教学用书
公共基础课系列

矩阵论

(第二版)

杨明 刘先忠

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

矩阵论(第二版)/杨 明 刘先忠
武汉:华中科技大学出版社,2005年3月
ISBN 7-5609-3046-8

- I. 矩…
- II. ①杨… ②刘…
- III. 矩阵-研究生教育-教材
- IV. O151.21

矩阵论(第二版)

杨 明 刘先忠

责任编辑:李 德

封面设计:潘 群

责任校对:刘 飞

责任监印:熊庆玉

出版发行:华中科技大学出版社

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录 排:华大图文设计室

印 刷:湖北恒泰印务有限公司

开本:787×960 1/16

印张:12

字数:215 000

版次:2005年3月第2版

印次:2006年9月第3次印刷

定价:15.00元

ISBN 7-5609-3046-8/O·290

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

“研究生教学用书”可供书目

书 名	作 者
机械工程测试·信息·信号分析(第二版)(教育部推荐教材,获国家级 优秀教材奖、获部委优秀教材奖、省科技进步奖)	卢文祥等
应用泛函简明教程(第三版)	李大华
时间序列分析与工程应用(上)(下)(获中国图书奖、国家图书奖)	杨叔子等
偏微分方程数值解法(第二版)	徐长发
数字语音处理(获部委优秀教材奖、省科技进步奖)	姚天任
辩证法史论稿	阳作华等
机械振动系统——分析、测试、建模与对策(上)(下)(第二版) (教育部推荐教材,获部委优秀教材奖)	师汉民等
薄膜生长理论(获部委优秀教材奖)	王敬义
高等弹性力学	钟伟芳等
硒的化学、生物化学及其在生命科学中的应用	徐辉碧等
水电系统最优控制	张勇传
高等工程数学(第三版)	于 寅
并行分布式程序设计	刘 健
损伤力学(获中国图书奖)	沈 为
非线性分析——理论与方法	胡运耕
模糊专家系统	李 凡
现代数字信号处理	姚天任等
动态传热学	郭方中
内燃机工作过程模拟	刘永长
半鞅序列理论及应用	胡必锦
化学计量学	陆晓华等
自然辩证法新编(第二版)	李思孟等
机电动力系统分析	辜承林
并行程序设计方法学	刘 健
加工过程数控(第二版)(教育部推荐教材)	宾鸿赞
近代数学基础	于 寅
气体电子学	丘军林
工程噪声控制学	黄其柏
最优化原理	胡运耕

书 名	作 者
随机过程(第二版)	刘次华
信息存储技术原理	张江陵
应用群论导引	张瑞明
高等教育管理学	姚启和
稳定性的理论方法和应用	廖晓昕
动力工程现代测试技术	黄素逸
行政学原理(第二版)(教育部推荐教材)	徐晓林
中国传统文化十二讲	王炯华
实用小波方法(第二版)	徐长发
建筑结构诊断鉴定与加固修复	李惠强
国际经济学	方齐云
遗传算法及其在电力系统中的应用	熊信银等
英语科技学术论文——撰写与投稿(第二版)	朱月珍
非线性固体计算力学	宋天震
现代制造系统的监控与故障诊断	周祖德
制造系统性能分析建模——理论与方法	李培根
快速成形技术	王运赣
智能系统非经典数学方法	朱剑英
面向对象程序设计及其应用	刘正林
激光先进制造技术	郑启光
断裂力学及断裂物理	赵建生
水力发电过程控制	叶鲁卿
科学社会主义理论与实践	编写组
现代实用光学系统	陈海清
矩阵论	杨明 刘光忠
微观经济的数理分析	胡连耕
矩阵论学习辅导与典型题解析	林升旭
数值分析	李 红
钢筋混凝土非线性有限元及其优化设计	宋天震等
快速模具制造及其应用	王运赣
高等流体力学	王献孚
工业激光技术	丘军林
计算流体力学	李万平
科技应用中的微分变分模型	徐长发
动力机械电子控制	张宗杰

内 容 简 介

本教材适用于工学硕士和工程硕士研究生数学基础课——矩阵论. 全书共分7章, 主要内容为线性空间与线性变换、Jordan 标准形、矩阵分解、矩阵的广义逆、矩阵分析、矩阵的 Kronecker 积与 Hadamard 积和非负矩阵介绍. 为工学硕士研究生的应用研究提供所需的数学工具. 为他们的继续学习提供必需的数学基础.

本书适用于 50 学时左右的矩阵论课程的教学使用, 也可作为同类课程的教学参考书.

Abstract

Matrix Theory is an important component of postgraduate mathematics, particularly for postgraduate students majoring in the scientific and engineering. This book is a text book for MA program course—matrix theory. The topics been covered in the seven chapters are general vector space and linear transformations, Jordan Canonical matrix of matrices, matrix decomposition, generalized inverse of matrix, matrix analyses, the Kronecker product and Hadamard product and introduction to nonnegative matrices. The text contains all the topics recommended by the Ministry of Education.

This book is suitable for 50 lectures.

写在“研究生教学用书”出版15周年前夕

“接天莲叶无穷碧，映日荷花别样红。”今天，我国的教育正处在一个大发展的崭新时期，而高等教育即将跨入“大众化”的阶段，蓬蓬勃勃，生机无限。在高等教育中，研究生教育的发展尤为迅速。在盛夏已临，面对池塘中亭亭玉立的荷花，风来舞举的莲叶，我深深感到，我国研究生教育就似夏季映日的红莲，别样多姿。

党的十六大报告以空前的力度强调了“科教兴国”的发展战略，强调了教育的重大作用，强调了教育的基础性全局性先导性，强调了在社会主义建设中教育的优先发展的战略地位。从报告中，我们可以清楚看到，对高等教育而言，不仅赋予了重大的历史任务，而且更明确提出了要培养一大批拔尖创新人才。不言而喻，培养一大批拔尖创新人才的历史任务主要落在研究生教育肩上。“百年大计，教育为本；国家兴亡，人才为基。”国家之间的激烈竞争，在今天，归根结底，最关键的就是高级专门人才，特别是拔尖创新人才的竞争。由此观之，研究生教育的任务可谓重矣！重如泰山！

前事不忘，后事之师。历史经验已一而再、再而三地证明：一个国家的富强，一个民族的繁荣，最根本的是要依靠自己，要以“自力更生”为主。《国际歌》讲得十分深刻，世界上从来就没有什么救世主，只有靠自己救自己。寄希望于别人，期美好于外力，只能是一种幼稚的幻想。内因是发展的决定性的因素。当然，我们决不应该也绝不可能采取“闭关锁国”，自我封闭，故步自封的方式来谋求发展，重犯历史错误。外因始终是发展的必要条件。正因为如此，我们清醒看到了，“自助者人助”，只有“自信、自尊、自主、自强”，只有独立自主，自强不息，走以“自力更生”为主的发展道路，才有可能在向世界开放中，争取到更多的朋友，争取到更多的支持，充分利用好外部的各种有利条件，来扎扎实实地而又尽可能快地发展自己。这一切的关键就在于，我们要有数量与质量足够的高级专门人才，特别是拔尖创新人才。何况，在科技高速发展与高度发达，而知识经济已初见端倪的今天，更加如此。人才，

高级专门人才,拔尖创新人才,是我们一切事业发展的基础.基础不牢,地动山摇;基础坚牢,大厦凌霄;基础不固,木凋树枯;基础深固,硕茂葱绿!

“工欲善其事,必先利其器.”自古凡事皆然,教育也不例外.教学用书是“传道授业解惑”培育人才的基本条件之一.“巧妇难为无米之炊”.特别是在今天,学科的交叉及其发展越来越多及越快,人才的知识基础及其要求越来越广及越高,因此,我一贯赞成与支持出版“研究生教学用书”,供研究生自己主动地选用.早在1990年,本套用书中的第一本即《机械工程测试·信息·信号分析》出版时,我就为此书写了个“代序”,其中提出:一个研究生应该博览群书,博采百家,思路开阔,有所创见.但这不等于他所在一切方面均能如此,有所不为才能有所为.如果一个研究生的主要兴趣与工作不在某一特定方面,他也可选择一本有关这一特定方面的书作为了解与学习这方面知识的参考;如果一个研究生的主要兴趣与工作在这一特定方面,他更应选择一本有关的书作为主要的学习用书,寻觅主要学习线索,并缘此展开,博览群书.这就是我赞成要为研究生编写系列的“研究生教学用书”的原因.今天,我仍然如此来看.

还应提及一点,在教育界有人讲,要教学生“做中学”,这有道理;但须补充一句,“学中做”.既要在实践中学习,又要在学习中实践,学习与实践紧密结合,方为全面;重要的是,结合的关键在于引导学生思考,学生积极主动思考.当然,学生的层次不同,结合的方式与程度就应不同,思考的深度也应不同.对研究生特别是对博士研究生,就必须是而且也应该是“研中学,学中研”,在研究这一实践中,开动脑筋,努力学习,在学习这一过程中,开动脑筋,努力研究;甚至可以讲,研与学通过思考就是一回事了.正因为如此,“研究生教学用书”就大有英雄用武之地,供学习之用,供研究之用,供思考之用.

在此,还应进一步讲明一点.作为一个研究生,来读“研究生教学用书”中的某书或其他有关的书,有的书要精读,有的书可泛读.记住了书上的知识,明白了书上的知识,当然重要;如果能照着用,当然更重要.因为知识是基础.有知识不一定有力量,没有知识就一定没有力量,千万千万不要轻视知识.对研究生特别是博士研究生而言,最为重要的还不是知识本身这个形而下,而是以知识作为基础,努力通过某

种实践,同时深入独立思考而体悟到的形而上,即《老子》所讲的不可道的“常道”,即思维能力的提高,即精神境界的升华。《周易·系辞》讲了:“形而上谓之道,形而下谓之器。”我们的研究生要有器,要有具体的知识,要读书,这是基础;但更要有“道”,更要一般,要体悟出的形而上。《庄子·天道》讲得多么好:“书不过语。语之所贵者意也,意有所随。意之所随者,不可以言传也。”这个“意”,就是孔子所讲的“一以贯之”的“一”,就是“道”,就是形而上。它比语、比书,重要多了。要能体悟出形而上,一定要有足够数量的知识作为必不可缺的基础,一定要在读书去获得知识时,整体地读,重点地读,反复地读;整体地想,重点地想,反复地想。如同韩愈在《进学解》中所讲的那样,能“提其要”,“钩其玄”,以达到南宋张孝祥所讲的“悠然心会,妙处难与君说”的体悟,化知识为己之素质,为“活水源头”。这样,就可驾驭知识,发展知识,创新知识,而不是为知识所驾驭,为知识所奴役,成为计算机的存储装置。

这套“研究生教学用书”从第一本于1990年问世以来,到明年,就经历了不平凡的15个春秋。从研究生教育开始以来,我校历届领导都十分关心研究生教育,高度重视研究生教学用书建设,亲自抓研究生教学用书建设;饮水思源,实难忘怀!“逝者如斯夫,不舍昼夜。”截至今天,“研究生教学用书”的出版已成了规模,蓬勃发展。目前已出版了用书69种,有的书发行了数万册,有22种分别获得了国家级、省部级教材奖、图书奖,有数种已为教育部列入向全国推荐的研究生教材,有20种一印再印,久销不衰。采用此书的一些兄弟院校教师纷纷来信,称赞此书为研究生培养与学科建设做出了贡献。我们深深感激这些鼓励,“衷心藏之,何日忘之?!”没有读者与专家的关爱,就没有我们“研究生教学用书”的发展。

唐代大文豪李白讲得十分正确:“人非尧舜,谁能尽善?”我始终认为,金无足赤,物无足纯,人无完人,文无完文,书无完书。“完”全了,就没有发展了,也就“完”蛋了。江泽民同志在党的十六大报告中讲得多么深刻:“实践没有止境,创新也没有止境。”他又指出,坚持“三个代表”重要思想的关键是与时俱进。这套“研究生教学用书”更不会例外。这套书如何?某本书如何?这样的或那样的错误、不妥、疏忽或不足,必然会有。但是,我们又必须积极、及时、认真而不断地加以改进,与时俱进,奋发前进。我们衷心希望与真挚感谢读者与专家不吝指教,及时批

评。当局者迷，兼听则明；“嚶其鸣矣，求其友声。”这就是我们肺腑之言。当然，在这里，还应该深深感谢“研究生教学用书”的作者、审阅者、组织者（华中科技大学研究生院的有关领导和工作人员）与出版者（华中科技大学出版社的编辑、校对及其全体同志）；深深感谢对“研究生教学用书”的一切关心者与支持者，没有他们，就决不会有今天的“研究生教学用书”。

我们真挚祝愿，在我们举国上下，万众一心，在“三个代表”重要思想的指引下，努力全面建设小康社会，加速推进社会主义现代化，为实现中华民族伟大复兴，“芙蓉国里尽朝晖”这一壮丽事业中，让我们共同努力，为培养数以千万计高级专门人才、特别是一大批拔尖创新人才，完成历史赋予研究生教育的重大任务而做出应有的贡献。

谨为之序。

中国科学院院士
华中科技大学学术委员会主任
杨叔子
2003年7月于喻园

第二版前言

本书的第二版是在第一版的基础上,根据教学实践和工科硕士研究生学习和应用中对矩阵理论的需要,从便于研究生阅读自学的角度做了一些扩充和修改而成.

本版全书的内容为7章:线性空间和线性变换、Jordan标准形、矩阵分解、矩阵的广义逆、矩阵分析、矩阵的Kronecker积和Hadamard积、非负矩阵介绍.其中第1、2、3、6章由杨明编写,第4、5、7章由刘先忠编写.

本版的扩充主要是在第1章中增加了从 m 维线性空间 $V_m(F)$ 到 n 维线性空间 $V_n(F)$ 的线性变换;在第3章和第5章中分别增加了极分解和数值范围等部分内容;增写了第6章:矩阵的Kronecker积和Hadamard积.在各章节增补了部分内容、例题以介绍矩阵理论在一些特殊矩阵上的研究成果.

本版对矩阵的奇异值分解根据现代应用的发展做了较大的修改.另外,重新修订了原书的部分证明和习题.

本书适用于50学时左右的教学,可以根据学生的线性代数基础做相应的内容取舍.其中部分内容可供研究生自学和应用查阅.

本书第一版在应用过程中,得到了华中科技大学数学系课程教学组教师、研究生院教学顾问组余明书教授和修矩阵论课程的研究生的宝贵意见和建议,在本版中,作者考虑了这些意见和建议,在此对他们表示衷心地感谢.同时作者对华中科技大学出版社编辑们为本书出版所做的工作表示感谢.

本书虽经多次修改和讲授,但不足之处一定不少,尚祈读者不吝指正.

作者

2004年11月于华中科技大学

前 言

本书是为工学硕士研究生数学基础课“矩阵论”编写的教材。全书由线性空间和线性变换、Jordan 标准形、矩阵分解、矩阵的广义逆、矩阵分析和非负矩阵介绍等6章构成,其内容符合教育部工学硕士研究生矩阵论教学基本要求。

在科学技术和工程应用中,矩阵理论的重要性的应用的广泛性是众所周知的。计算机的广泛使用和 MATLAB, MAPLE 等数学计算软件的迅猛普及为矩阵理论提供了更为广阔的发展和前景。本书注重将线性空间、线性变换和内积、赋范空间的各种问题对应到数值向量空间 \mathbf{R}^n 上,强调抽象内容的矩阵处理技巧,使问题的描述形式和处理方法简洁,可有效地利用矩阵这一数学工具,同时为将功能强大的矩阵计算数学软件有效地使用到各类问题上奠定了基础,便于提高教学效率。本书的内容取舍力求理论体系简明清晰,适合工学硕士后续学习和研究应用的需要,深浅适度。本书的推荐教学学时为 50 学时。

本书是在华中科技大学(原华中理工大学)数学系为硕士研究生开设矩阵论课程的长期教学实践中发展形成的。第 1、2、3 章由杨明编写,第 4、5、6 章由刘先忠编写。本书的编写得到了华中科技大学研究生院的教改项目支持,得到了华中科技大学数学系和课程教学组老师们的关心和协助,在此表示衷心的感谢。作者对华中科技大学出版社和本书编辑为本书出版所做的工作表示感谢。

本书内容虽经多次讲授,随着科学技术的发展仍然需要不断的完善,其问题和不足,敬请同行和读者不吝指正。

作 者

2003 年 9 月于华中科技大学

本书使用符号一览表

$V_n(F)$	数域 F 上的 n 维线性空间
F^n	以数域 F 中的数为分量的 n 维列向量集合
$F^{m \times n}$	以数域 F 中的数为元素的 $m \times n$ 阶矩阵集合
$P_n[x]$	次数不超过 $n-1$ 次的实系数多项式集合
$L\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$	由线性空间中向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 生成的子空间
W^\perp	W 的正交补子空间
$W_1 \oplus W_2$	子空间 W_1 与 W_2 的直和
$ k $	复数 k 的模长
$\ \alpha\ $	向量 α 的长度(范数): $\ \alpha\ ^2 = \sum_{i=1}^n a_i ^2$
e_i	第 i 个分量为 1, 其余分量为 0 的基本单位向量
$[A]_{ij}$	矩阵的第 i 行, 第 j 列位置上的元素或子块
E_{ij}	第 i 行, 第 j 列位置上元素为 1, 其余元素为 0 的矩阵
A^H	矩阵 A 的共轭转置矩阵, $A^H = (\bar{A})^T$
$\det(A)$	矩阵 A 的行列式
$\text{rank}(A)$	矩阵 A 的秩
$R(A)$	矩阵 A 的列空间
$N(A)$	矩阵 A 的零空间
$\text{tr}(A)$	矩阵 A 的迹 $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$
V_λ	特征值 λ 对应的特征子空间
$m_A(\lambda)$	矩阵 A 的最小多项式
A_R^{-1}	矩阵 A 的右逆
A_L^{-1}	矩阵 A 的左逆
$A\{1\}$	矩阵 A 的减号逆或 $\{1\}$ 逆
A^+	矩阵 A 的 Moore-Penrose 广义逆
$\rho(A)$	矩阵 A 的谱半径
$\ X\ _p$	向量 X 的 p 范数 $\ X\ _p = \left(\sum_i x_i ^p\right)^{\frac{1}{p}}$
$\ A\ _F$	矩阵 A 的 Frobenius 范数:

$$\|A\|_F = \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right]^{\frac{1}{2}} = [\text{tr}(A^H A)]^{\frac{1}{2}}$$

$\text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_m)$ 以 J_1, J_2, \dots, J_m 为对角线上子块的对角阵

$A \otimes B$ 矩阵 A 与 B 的 Kronecker 积

$A \circ B$ 矩阵 A 与 B 的 Hadamard 积

Vec 向量化算子

$A > 0$ A 为正矩阵

$A \geq 0$ A 为非负矩阵

目 录

第1章 线性空间与线性变换	(1)
1.1 线性空间	(1)
一、线性空间的概念	(1)
二、线性空间的基与维数	(2)
三、坐标	(3)
四、基变换与坐标变换	(5)
五、子空间	(8)
1.2 内积空间	(13)
一、欧氏空间与酉空间	(13)
二、标准正交基	(16)
1.3 线性变换	(19)
一、线性变换	(19)
二、线性变换的矩阵	(21)
三、不变子空间	(24)
四、正交变换与酉变换	(25)
五、线性空间 $V_n(F)$ 到线性空间 $V_m(F)$ 的线性变换	(28)
习题一	(31)
第2章 Jordan 标准形介绍	(35)
2.1 线性变换的对角矩阵表示	(35)
一、线性变换的特征值与特征向量	(35)
二、线性变换矩阵的对角化	(38)
2.2 Jordan 矩阵介绍	(40)
一、Jordan 矩阵	(40)
二、Jordan 标准形的求法	(42)
2.3 最小多项式	(48)
一、矩阵多项式	(49)
二、方阵的化零多项式	(52)
三、最小多项式	(53)
习题二	(57)
第3章 矩阵的分解	(60)

3.1 常见的矩阵标准形与分解	(60)
一、矩阵的三角分解	(61)
二、矩阵的满秩分解	(66)
三、可对角化矩阵的谱分解	(70)
3.2 Schur 分解与正规矩阵	(74)
一、Schur 分解	(74)
二、正规矩阵	(77)
3.3 矩阵的奇异值分解	(81)
一、矩阵的奇异值及其性质	(82)
二、矩阵的奇异值分解	(83)
三、矩阵 A 的奇异值分解与线性变换 T_A	(88)
四、方阵的极分解	(89)
习题三	(91)
第4章 矩阵的广义逆	(93)
4.1 矩阵的左逆与右逆	(93)
一、满秩矩阵与单侧逆	(93)
二、单侧逆与解线性方程组	(94)
4.2 广义逆矩阵	(95)
一、减号广义逆	(95)
二、Moore-Penrose 广义逆(加号广义逆)	(98)
4.3 投影变换	(101)
一、投影变换与投影矩阵	(101)
二、正交投影变换与正交投影矩阵	(103)
4.4 最佳的最小二乘解	(105)
习题四	(108)
第5章 矩阵分析	(109)
5.1 向量范数	(109)
一、向量范数的概念	(109)
二、向量范数的连续性与等价性	(110)
5.2 矩阵范数	(111)
一、矩阵范数的概念	(112)
二、诱导范数	(114)
5.3 向量序列和矩阵序列的极限	(115)
5.4 矩阵幂级数	(118)
一、谱半径	(118)

二、数值范围	(120)
三、矩阵幂级数	(122)
5.5 矩阵函数	(125)
一、矩阵函数的定义与性质	(125)
二、矩阵函数的求法	(127)
5.6 函数矩阵的微分与积分	(130)
5.7 矩阵函数的应用	(131)
一、一阶线性常系数齐次微分方程组	(132)
二、一阶线性常系数非齐次微分方程组	(133)
习题五	(134)
第6章 矩阵的 Kronecker 积与 Hadamard 积	(136)
6.1 Kronecker 积与 Hadamard 积的定义	(136)
6.2 Kronecker 积与 Hadamard 积的性质	(140)
6.3 矩阵的向量化算子与 Kronecker 积	(145)
习题六	(150)
*第7章 非负矩阵介绍	(151)
7.1 非负矩阵	(151)
7.2 正矩阵	(154)
7.3 素矩阵	(158)
7.4 M 矩阵	(160)
习题答案与提示	(163)
参考书目	(172)